ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 8, с. 1029–1045

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.955.8

# РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ НА ПОЛУОСИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ “СИЛЬНОЙ” ТОЧКИ ПОВОРОТА У ПРЕДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

© 2023 г. **А. Г. Елисеев, Т. А. Ратникова, Д. А. Шапошникова**

Исследованы сингулярно возмущённые задачи при наличии спектральных особенностей у предельного оператора с использованием метода регуляризации С.А. Ломова. В частности, построено регуляризованное асимптотическое решение сингулярно возмущённой неоднородной смешанной задачи на полуоси для параболического уравнения при наличии “сильной” точки поворота у предельного оператора. На основе идеи асимптотического интегрирования задач с нестабильным спектром показано, каким образом следует вводить регуляризирующие функции и дополнительные регуляризирующие операторы, подробно описан формализм метода регуляризации для такого вида особенности, проведено обоснование этого алгоритма и построено асимптотическое решение любого порядка по малому параметру.

DOI: 10.31857/S0374064123080034, EDN: INDIPZ

**Введение.** С помощью метода регуляризации активно развивается общая теория сингулярных возмущений в условиях стабильности спектра предельного оператора [1–3], которые, если говорить кратко, обеспечивают такое же поведение спектральных характеристик оператора (равномерное по независимой переменной), как и при постоянном спектре. Задачи с нестабильным спектром начали изучать около 50 лет назад, были получены (с определённой долей искусственных приёмов) асимптотические решения неоднородных задач с точками поворота и других задач с нарушением условий стабильности спектра. В результате стало очевидно, что в условиях нестабильного спектра существенно особые сингулярности в неоднородных задачах определяются не только общим числом точек спектра предельного оператора, как это имеет место при стабильном спектре, но и числом нулей у отдельных точек спектра переменного оператора. Тщательный анализ имеющихся результатов привёл к разработке общей теории асимптотического интегрирования для задач, в которых переменный предельный оператор дискретно необратим (т.е. необратим в нулях точек спектра). Метод регуляризации классифицирует три группы точек поворота.

1. “Простая” точка поворота – собственные значения предельного оператора изолированы друг от друга, одно собственное значение в отдельных точках $t$ обращается в нуль [4].

2. “Слабая” точка поворота – хотя бы два собственных значения пересекаются в отдельных точках $t$, но при этом предельный оператор сохраняет диагональную структуру вплоть до точек пересечения. Базис из собственных векторов остаётся гладким по $t$ [5].

3. “Сильная” точка поворота – хотя бы два собственных значения пересекаются в отдельных точках $t$, но при этом предельный оператор меняет диагональную структуру на жорданову в точках пересечения. Базис в точках пересечения теряет гладкость по $t$ [6].

Классические точки поворота, которые изучали Г. Вентцель, Х. А. Крамерс и Л. Бриллюэн, относятся к “сильным” точкам поворота.

Данная статья развивает метод регуляризации для сингулярно возмущённой задачи Коши для параболического уравнения с “сильной” точкой поворота первого порядка у предельного оператора.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим задачу

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2u + h(x,t), \quad t\in(0,T], \quad 0<x<+\infty,$$

$$u(x,0)=f(x),\quad 0\leqslant x<+\infty,$$
$$u(0,t)=\psi(t),\quad t\in[0,T],$$
$$f(0)=\psi(0) \tag{1}$$

с условиями:

1) существует число $M>0$ такое, что для любых $k,n\in\mathbb{N}$ выполняется оценка

$$\left|\frac{\partial^{k+n}}{\partial x^k\partial t^n}h(x,t)\right|<M,\quad h(x,t)\in C^\infty(0,+\infty)\times[0,T];$$

2) существует число $M>0$ такое, что для любых $k\in\mathbb{N}$ имеет место оценка $|f^{(k)}(x)|<M$, $f(x)\in C^\infty(0,+\infty)$.

*Классическим решением задачи* (1) называется функция $u(x,t,\varepsilon)$, имеющая непрерывные производные $\partial u/\partial t$, $\partial u/\partial x$, $\partial^2u/\partial x^2$ в области $Q_T=\{(x,t):x\in(0,+\infty),\ t\in(0,T]\}$, непрерывная в $\overline{Q}_T$ и удовлетворяющая во всех точках $Q_T$ уравнению и начальным условиям при $t=0$. Решение задачи (1) изучается при стремлении параметра $\varepsilon\to+0$, где $\varepsilon$ принадлежит некоторой окрестности нуля, т.е. $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$.

**Замечание 1.** Условия 1) и 2) избыточны для существования решения задачи (1). Они достаточны для построения регуляризованного асимптотического ряда для решения сингулярно возмущённой задачи (1).

Задача (1) относится к классической задаче с "сильной" точкой поворота. Действительно, если перевести уравнение в систему, предварительно сделав замену

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}=v,\quad \varepsilon\frac{\partial v}{\partial x}=x^2u+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}-h(x,t),$$

то получим

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\x^2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+\varepsilon\begin{pmatrix}0&0\\\partial/\partial t&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-h\end{pmatrix},$$

где матрица предельного оператора имеет вид

$$A(x)=\begin{pmatrix}0&1\\x^2&0\end{pmatrix}.$$

Можно заметить, что при $x\neq0$ матрица диагонализируемая, и $e_1(x)=(1,x)^{\text{т}}$, $e_2(x)=(1,-x)^{\text{т}}$ – базис из собственных векторов. При $x=0$ матрица принимает жорданову форму и базисом являются векторы $e_1(0)=(1,0)^{\text{т}}$, $e_1(0)=(0,1)^{\text{т}}$. Базис разрывен в точке $x=0$. В общем случае регуляризирующие функции необходимо строить, используя каноническую форму оператора, зависящего от переменной $x$, к которой можно привести с помощью гладких преобразований [7]. В данном случае предельный оператор уже имеет каноническую форму, поэтому в построении базиса и канонической формы нет необходимости. Кроме того, оператор $A(x)$ в точке $x=0$ необратим, что приводит к построению дополнительных сингулярных операторов $\sigma_0$, $\sigma_1$, описывающих сингулярную зависимость решения неоднородных задач от параметра $\varepsilon$. Это связано с тем, что образ оператора $A(x)$ есть не всё пространство непрерывных функций, а подпространство, элементы которого обращаются в нуль, второго порядка в точке $x=0$.

**2. Формализм метода регуляризации.** Регуляризирующую функцию будем искать в виде $e^{-\varphi(x,t)/\varepsilon}$. Сделав замену $u(x,t)=e^{-\varphi(x,t)/\varepsilon}v(x,t)$ в однородном уравнении задачи (1), получим

$$-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2-x^2\right)v(x,t)+\varepsilon\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}v(x,t)+2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right)-\varepsilon^2\frac{\partial^2v(x,t)}{\partial x^2}=0.$$

Выберем регуляризирующую функцию как решение задачи

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2-x^2=0,\quad \varphi(x,0)=0.$$

Начальное условие для функции $\varphi(x,t)$ выбрано так, чтобы в дальнейшем для $v(x,t,\varepsilon)$ оно не содержало сингулярной зависимости от $\varepsilon$. Кроме того, при таком выборе начальное условие для $v(x,t,\varepsilon)$ наследует начальное условие задачи (1).

Введём обозначения $p=\partial\varphi/\partial t$, $q=\partial\varphi/\partial x$, получим систему уравнений

$$p+q^2=x^2,\quad \frac{\partial p}{\partial t}+2q\frac{\partial p}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial q}{\partial t}+2q\frac{\partial q}{\partial x}=2x,$$

$$\varphi(x,0)=0,\quad q(x,0)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,0)=0.$$

Запишем уравнения характеристик

$$dt=\frac{dx}{2q}=\frac{dp}{0}=\frac{dq}{2x}=\frac{d\varphi}{p+2q^2}.$$

Параметризуем ось $Ox$, $x=s$. Тогда $p=s^2$, $q^2=x^2-s^2$. Последовательно получаем серию решений

$$2t=\ln\frac{x+\sqrt{x^2-s^2}}{s},\quad \varphi=\frac{x\sqrt{x^2-s^2}}{2}.$$

Из первого выражения находим параметр $s=x/\operatorname{ch}(2t)$. Подставив его во второе выражение, имеем

$$\varphi(x,t)=\frac{x^2\operatorname{th}(2t)}{2}.$$

Отсюда запишем регуляризирующую функцию в виде

$$\exp\left(-\frac{x^2\operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right).$$

Дополнительные регуляризирующие сингулярные операторы, связанные с точечной необратимостью предельного оператора, строятся с помощью фундаментального решения [8]. Их задача – вложить правую часть уравнения в образ предельного оператора. Предельный оператор получается, если положить в уравнении задачи (1) $\varepsilon=0$. Фундаментальное решение (в литературе называется *ядро Мелера*) уравнения (1), согласно работе [8], имеет вид

$$K(x,\xi,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon\operatorname{sh}(2t)}}\exp\left(-\operatorname{cth}(2t)\frac{x^2+\xi^2}{2\varepsilon}+\frac{x\xi}{\varepsilon\operatorname{sh}(2t)}\right)$$

и обладает свойством $K(x,\xi,0)=\delta(x-\xi)$. Так как работа [8] труднодоступна, получим фундаментальное решение с помощью преобразования Фурье (см. п. 4).

Проинтегрировав ядро Мелера по переменной $\xi$, получим дополнительные регуляризирующие сингулярные операторы

$$\sigma_0(x,t,\varepsilon)(\cdot)=\int\limits_0^t(\cdot)\,d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(x,\xi,t-\tau)\,d\xi=\int\limits_0^t(\cdot)\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))}}\exp\left(-\frac{x^2\operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\right)d\tau,$$

$$\sigma_1(x,t,\varepsilon)(\cdot)=\int\limits_0^t(\cdot)\,d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi K(x,\xi,t-\tau)\,d\xi=x\int\limits_0^t(\cdot)\frac{1}{(\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))})^3}\exp\left(-\frac{x^2\operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\right)d\tau.$$

Фактически сингулярные операторы $\sigma_0(x,t,\varepsilon)(\cdot)$, $\sigma_1(x,t,\varepsilon)(\cdot)$ являются решениями уравнения теплопроводности с правыми частями $\varepsilon$, $\varepsilon x$. Действия операторов на функцию запишутся как

$$\sigma_0(f(t)) = \int\limits_0^t \frac{f(\tau)}{\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))}} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\right) d\tau = f(t) * \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right),$$

$$\sigma_1(f(t)) = x \int\limits_0^t \frac{f(\tau)}{(\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))})^3} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\right) d\tau =$$

$$= xf(t) * \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}^3} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right).$$

Введём оператор $T_\varepsilon = \varepsilon \dfrac{\partial}{\partial t} - \varepsilon^2 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2$. Тогда

$$T_\varepsilon(\sigma_0(f(t))) = \varepsilon f(t) + f(t) * T_\varepsilon \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right) = \varepsilon f(t),$$

$$T_\varepsilon(\sigma_1(f(t))) = \varepsilon x f(t) + f(t) * T_\varepsilon\left(\frac{x}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}^3} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right)\right) = \varepsilon x f(t).$$

**Замечание 2.** Доказательство того, что

$$T_\varepsilon\left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right)\right) = 0, \quad T_\varepsilon\left(\frac{x}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}^3} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right)\right) = 0,$$

приведено в приложении 2.

Дополнительный сингулярный интегральный оператор для описания параболического пограничного слоя в точке $x = 0$ находится из решения задачи

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 u = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = 1.$$

Граничный оператор в результате решения имеет вид

$$G(\Psi) = \int\limits_0^t \Psi(\tau) W(x, t-\tau, \varepsilon)\, d\tau = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{x/(\sqrt{2\varepsilon \operatorname{th}(2t)})}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{1-b^2}} \Psi\left(t - \frac{1}{4} \ln\left(1 + \frac{2b}{1-b}\right)\right) e^{-z^2}\, dz,$$

где

$$W(x,t,\varepsilon) = \frac{4x}{\sqrt{\varepsilon\pi}\sqrt{2\operatorname{sh}(2t)}^3} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{cth}(2t)}{2\varepsilon}\right), \quad b = \frac{x^2}{2\varepsilon z^2}.$$

Отметим свойства оператора $G$:

$$T_\varepsilon G(\Psi) = 0, \quad G(\Psi)|_{x=0} = \Psi(t).$$

Регуляризованное решение задачи (1) ищем в виде

$$u(x,t,\varepsilon) = v(x,t,\varepsilon) \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right) + G(\Psi(t,\varepsilon)) + \sigma_0(y(t,\varepsilon)) + \sigma_1(z(t,\varepsilon)) + w(x,t,\varepsilon). \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1) и выделив слагаемые при регуляризирующих функциях, получим задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t}+2x\,\mathrm{th}\,(2t)\frac{\partial v}{\partial x}+\mathrm{th}\,(2t)v=\varepsilon\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\quad \Psi(t,\varepsilon)*T_\varepsilon W(t,\varepsilon)=0,$$

$$y(t,\varepsilon)*T_\varepsilon\bigg(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2t)}}\exp\bigg(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\bigg)\bigg)=0,\quad z(t,\varepsilon)*T_\varepsilon\bigg(\frac{x}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2t)}^3}\exp\bigg(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\bigg)\bigg)=0,$$

$$x^2w=h(x,t)-\varepsilon\frac{\partial w}{\partial t}+\varepsilon^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\varepsilon y(t,\varepsilon)-\varepsilon xz(t,\varepsilon),\quad v(x,0)+w(x,0)=f(x),$$

$$v(0,t,\varepsilon)+\Psi(t,\varepsilon)+\int\limits_0^t\frac{y(s,\varepsilon)}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2(t-s))}}ds+w(0,t,\varepsilon)=\psi(t). \tag{3}$$

Разложив функции $v(x,t,\varepsilon)$, $\Psi(t,\varepsilon)$, $y(t,\varepsilon)$, $z(t,\varepsilon)$, $w(x,t,\varepsilon)$ из (2) по степеням $\varepsilon$:

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{k=-1}^{\infty}\varepsilon^k(v_k(x,t))e^{-\varphi(x,t)/\varepsilon}+G(\Psi_k(t))+\sigma_0(y_k(t))+\sigma_1(z_k(t))+w_k(x,t),$$

получим из системы (3) серию итерационных задач:

$$\frac{\partial v_k}{\partial t}+2x\,\mathrm{th}\,(2t)\frac{\partial v_k}{\partial x}+\mathrm{th}\,(2t)v_k=\frac{\partial^2 v_{k-1}}{\partial x^2},\quad \Psi_k(t)*T_\varepsilon W(t,\varepsilon)=0,$$

$$y_k(t)*T_\varepsilon\bigg(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2t)}}\exp\bigg(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\bigg)\bigg)=0,\quad z_k(t)*T_\varepsilon\bigg(\frac{x}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2t)}^3}\ \exp\bigg(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\bigg)\bigg)=0,$$

$$x^2w_k=h(x,t)\delta_0^k-\frac{\partial w_{k-1}}{\partial t}+\frac{\partial^2 w_{k-2}}{\partial x^2}-y_{k-1}(t)-xz_{k-1}(t),$$

$$v_k(x,0)+w_k(x,0)=f(x)\delta_k^0,$$

$$v_k(0,t)+\Psi_k(t)+\int\limits_0^t\frac{y_k(s)}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2(t-s))}}ds+w_k(0,t)=\delta_k^0\psi(t),\quad k=\overline{-1,\infty}.$$

Здесь $\delta_k^0$ – символ Кронекера: $\delta_0^0=1$, $\delta_k^0=0$ при $k\neq 0$.

**Замечание 3.** Разложение по $\varepsilon$ начинается со степени $-1$, так как правая часть уравнения в общем случае не принадлежит образу предельного оператора умножения на функцию $x^2$.

Система на итерационном шаге $k=-1$ имеет вид

$$\frac{\partial v_{-1}}{\partial t}+2x\,\mathrm{th}\,(2t)\frac{\partial v_{-1}}{\partial x}+\mathrm{th}\,(2t)v_{-1}=0,\quad \Psi_{-1}(t)*T_\varepsilon W(t,\varepsilon)=0,$$

$$y_{-1}(t)*T_\varepsilon\bigg(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2t)}}\exp\bigg(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\bigg)\bigg)=0,$$

$$z_{-1}(t)*T_\varepsilon\bigg(\frac{x}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2t)}^3}\ \exp\bigg(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\bigg)\bigg)=0,$$

$$x^2w_{-1}=0,\quad v_{-1}(x,0)+w_{-1}(x,0)=0,$$

$$v_{-1}(0,t)+\Psi_{-1}(t)+\int\limits_0^t\frac{y_{-1}(s)}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2(t-s))}}+w_{-1}(0,t)=0.$$

Решения на итерационном шаге $k-1$ будут $v_{-1}(x,t)\equiv 0$, $w_{-1}(x,t)\equiv 0$, а $\Psi_{-1}(t)$, $y_{-1}(t)$, $z_{-1}(t)$ – произвольные функции. Для их определения рассмотрим итерационную задачу на шаге $k=0$:

$$\frac{\partial v_0}{\partial t}+2x\,\mathrm{th}\,(2t)\frac{\partial v_0}{\partial x}+\mathrm{th}\,(2t)v_0=0,\quad \Psi_0(t)*T_\varepsilon W(t,\varepsilon)=0,$$

$$y_0(t)*T_\varepsilon\bigg(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2t)}}\,\exp\bigg(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\bigg)\bigg)=0,\quad z_0(t)*T_\varepsilon\bigg(\frac{x}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2t)}^3}\exp\bigg(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\bigg)\bigg)=0,$$

$$x^2w_0=h(x,t)-y_{-1}(t)-xz_{-1}(t),\quad v_0(x,0)+w_0(x,0)=f(x),$$

$$v_0(0,t)+\Psi_0(t)+\int\limits_0^t\frac{y_0(\tau)}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2(t-\tau))}}\,d\tau+w_0(0,t)=\psi(t). \tag{4}$$

Функции $y_0(t)$, $z_0(t)$ на данном шаге произвольны. Для разрешимости уравнения относительно $w_0(x,t)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения $y_{-1}(t)=h(0,t)$, $z_{-1}(t)=\dfrac{\partial h}{\partial x}(0,t)$. Отсюда имеем

$$w_0(x,t)=\frac{1}{x^2}\bigg(h(x,t)-h(0,t)-x\frac{\partial h}{\partial x}(0,t)\bigg)=h_0(x,t),$$

где $h_0(x,t)$ – гладкая функция. Определив $y_{-1}(t)$, найдём функцию $\Psi_{-1}(t)$ из граничного условия:

$$\Psi_{-1}(t)=-\int\limits_0^t\frac{h(0,\tau)}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2(t-\tau))}}\,d\tau.$$

Теперь можем записать решение на итерационном шаге $k=-1$:

$$u_{-1}(x,t)=G(\Psi_{-1}(t))+\int\limits_0^t\frac{h(0,\tau)}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2(t-\tau))}}\exp\bigg(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\bigg)\,d\tau+$$

$$+\,x\int\limits_0^t\frac{\partial h(0,\tau)}{\partial x}\frac{1}{(\sqrt{\mathrm{ch}\,(2(t-\tau))})^3}\exp\bigg(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\bigg)\,d\tau.$$

Для решения уравнения относительно $v_0(x,t)$ сделаем замену $v_0(x,t)=\alpha(x,t)/\sqrt{\mathrm{ch}\,(2t)}$. Тогда получим уравнение

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}+2x\,\mathrm{th}\,(2t)\frac{\partial\alpha(x,t)}{\partial x}=0.$$

Запишем уравнение характеристик

$$dt=\frac{dx}{2x\,\mathrm{th}\,(2t)}=\frac{d\alpha}{0}.$$

Первый интеграл соответственно равен $x/\mathrm{ch}\,(2t)=c_1$. Отсюда получим общее решение

$$\alpha(x,t)=g_0(x/\mathrm{ch}\,(2t)),$$

где функция $g_0(x,t)$ определяется из начальных условий. Таким образом, общее решение $v_0(x,t)$ имеет вид

$$v_0(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2t)}}\,g_0\bigg(\frac{x}{\mathrm{ch}\,(2t)}\bigg).$$

Из начального условия определим произвольную функцию $g_0(x,t)$. При $t=0$ имеем

$$g_0(x)+h_0(x,0)=f(x).$$

Отсюда $g_0(x)=f(x)-h_0(x,0)$ (здесь учитывается, что $\Psi_0(0)=0$). Или в развёрнутом виде

$$g_0(x,t)=f\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}\right)-h_0\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)},0\right)=$$

$$=f\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}\right)-\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}\right)^{-2}\left(h\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)},0\right)-h(0,0)-\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}\frac{\partial h}{\partial x}(0,0)\right).$$

Для определения произвольных функций $y_0(t)$, $z_0(t)$ рассмотрим задачу на итерационном шаге $k=1$:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}+2x\operatorname{th}(2t)\frac{\partial v_1}{\partial x}+\operatorname{th}(2t)v_1=\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2},\quad \Psi_1(t)*T_\varepsilon W(t,\varepsilon)=0,$$

$$y_1(t)*T_\varepsilon\left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}}\exp\left(-\frac{x^2\operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right)\right)=0,\quad z_1(t)*T_\varepsilon\left(\frac{x}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}^3}\exp\left(-\frac{x^2\operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right)\right)=0,$$

$$x^2w_1=-\frac{\partial h_0}{\partial t}(x,t)-y_0(t)-xz_0(t),\quad v_1(x,0)+w_1(x,0)=0,$$

$$v_1(0,t)+\Psi_1(t)+\int_0^t\frac{y_1(\tau)}{\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))}}\,d\tau+w_1(0,t)=0. \tag{5}$$

Для определения $w_1(x,t)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$y_0(t)=-\frac{\partial h_0}{\partial t}(0,t),\quad z_0(t)=-\frac{\partial^2 h_0}{\partial x\partial t}(0,t).$$

Теперь из граничного условия задачи (4) определим функцию $\Psi_0(t)$. Для этого рассмотрим граничное условие при $x=0$:

$$\Psi_0(t)=\psi(t)-v_0(0,t)+\int_0^t\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))}}\frac{\partial h_0}{\partial\tau}(0,\tau)\,d\tau-w_0(0,t).$$

Таким образом, на данном шаге найдено слагаемое на нулевом шаге, которое можно записать в виде

$$u_0(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}}\left[f\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}\right)-h_0\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)},0\right)\right]\exp\left(-\frac{x^2\operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right)+G(\Psi_0(t))-$$

$$-\int_0^t\frac{\partial h_0(0,\tau)}{\partial\tau}\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))}}\exp\left(-\frac{x^2\operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\right)d\tau-$$

$$-x\int_0^t\frac{\partial^2 h_0}{\partial\tau\partial x}(0,\tau)\frac{1}{(\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))})^3}\exp\left(-\frac{x^2\operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\right)d\tau+\frac{1}{x^2}\left(h(x,t)-h(0,t)-x\frac{\partial h}{\partial x}(0,t)\right).$$

Теперь можно записать главный член асимптотики

$$u_{gl}(x,t)=\frac{1}{\varepsilon}\left[G(\Psi_{-1}(t))+\int_0^t\frac{h(0,\tau)}{\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))}}\exp\left(-\frac{x^2\operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\right)d\tau+\right.$$

$$+ x\int\limits_0^t \frac{\partial h(0,\tau)}{\partial x}\,\frac{1}{(\sqrt{\mathrm{ch}\,(2(t-\tau))})^3}\,\exp\Big(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\Big)\,d\tau\Big] +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2t)}}\Big[f\Big(\frac{x}{\mathrm{ch}\,(2t)}\Big) - h_0\Big(\frac{x}{\mathrm{ch}\,(2t)},0\Big)\Big]\exp\Big(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\Big) + G(\Psi_0(t)) -$$

$$-\int\limits_0^t \frac{\partial h_0(0,\tau)}{\partial\tau}\,\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2(t-\tau))}}\,\exp\Big(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\Big)\,d\tau -$$

$$-x\int\limits_0^t \frac{\partial^2 h_0}{\partial\tau\partial x}(0,\tau)\,\frac{1}{(\sqrt{\mathrm{ch}\,(2(t-\tau))})^3}\,\exp\Big(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\Big)\,d\tau + \frac{1}{x^2}\Big(h(x,t) - h(0,t) - x\frac{\partial h}{\partial x}(0,t)\Big).$$

Для практического использования можно воспользоваться леммой 1 (см. п. 3). Тогда формула главного члена упрощается:

$$u_{gl}(x,t) = \frac{1}{\varepsilon}\Big[\Psi_{-1}(t)\,\mathrm{erfc}\,\Big(\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{th}\,(2t)}}\Big) + \int\limits_0^t \frac{h(0,\tau)}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2(t-\tau))}}\exp\Big(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\Big)\,d\tau +$$

$$+ x\int\limits_0^t \frac{\partial h(0,\tau)}{\partial x}\,\frac{1}{(\sqrt{\mathrm{ch}\,(2(t-\tau))})^3}\,\exp\Big(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\Big)\,d\tau\Big] +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2t)}}\Big[f\Big(\frac{x}{\mathrm{ch}\,(2t)}\Big) - h_0\Big(\frac{x}{\mathrm{ch}\,(2t)},0\Big)\Big]\exp\Big(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\Big) +$$

$$+ \Psi_0(t)\,\mathrm{erfc}\,\Big(\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{th}\,(2t)}}\Big) - \int\limits_0^t \frac{\partial h_0(0,\tau)}{\partial\tau}\,\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2(t-\tau))}}\,\exp\Big(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\Big)\,d\tau -$$

$$- x\int\limits_0^t \frac{\partial^2 h_0}{\partial\tau\partial x}(0,\tau)\,\frac{1}{(\sqrt{\mathrm{ch}\,(2(t-\tau))})^3}\,\exp\Big(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\Big)\,d\tau +$$

$$+ \frac{1}{x^2}\Big(h(x,t) - h(0,t) - x\frac{\partial h}{\partial x}(0,t)\Big) + O(\varepsilon^\infty).$$

Здесь

$$\mathrm{erfc}\,\Big(\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{th}\,(2t)}}\Big) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{x/\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{th}\,(2t)}}^{\infty} e^{-z^2}\,dz,$$

а символом $O(\varepsilon^\infty)$ в асимптотическом анализе обозначается асимптотический нуль, т.е. слагаемые, убывающие быстрее любой степени $\varepsilon$.

Теперь можно записать решение $w_1(x,t)$ системы (5):

$$w_1(x,t) = -\frac{1}{x^2}\Big(\frac{\partial h_0}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial h_0}{\partial t}(0,t) - x\frac{\partial^2 h_0}{\partial t\partial x}(0,t)\Big) = h_1(x,t),$$

где $h_1(x,t)$ – гладкая функция.

Решим неоднородное относительно $v_1(x,t)$ уравнение

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + 2x\,\mathrm{th}\,(2t)\frac{\partial v_1}{\partial x} + \mathrm{th}\,(2t)v_1 = \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}.$$

Сделав замену $v_1(x,t)=\alpha(x,t)/\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}$ и вычислив $\partial^2 v_0/\partial x^2$, получим уравнение

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}+2x\operatorname{th}(2t)\frac{\partial\alpha(x,t)}{\partial x}=\frac{g_0''(x/\operatorname{ch}(2t))}{\operatorname{ch}^2(2t)}.$$

Запишем уравнение характеристик

$$dt=\frac{dx}{2x\operatorname{th}(2t)}=\frac{\operatorname{ch}^2(2t)d\alpha}{g_0''(x/\operatorname{ch}(2t))}.$$

Первые интегралы соответственно равны

$$\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}=c_1,\quad \alpha(x,t)-\frac{1}{2}\operatorname{th}(2t)g_0''(c_1)=c_2.$$

Отсюда получим общее решение

$$\alpha(x,t)=\frac{1}{2}\operatorname{th}(2t)g_0''\bigg(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}\bigg)+g_1\bigg(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}\bigg),$$

где функция $g_1$ определяется из начальных условий. Таким образом, решение $v_1(x,t)$ имеет вид

$$v_1(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}}\bigg[\frac{\operatorname{th}(2t)}{2}g_0''\bigg(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}\bigg)+g_1\bigg(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}\bigg)\bigg].$$

Определим функцию $g_1(x/\operatorname{ch}(2t))$. Воспользуемся начальным условием $g_1(x)=-h_1(x,0)$. Следовательно,

$$v_1(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}}\bigg[\frac{\operatorname{th}(2t)}{2}g_0''\bigg(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}\bigg)-h_1\bigg(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)},0\bigg)\bigg].$$

Функции $y_1(t)$, $z_1(t)$ находятся на следующем итерационном шаге из условия разрешимости уравнения относительно $w_2(x,t)$:

$$y_1(t)=-\frac{\partial h_1}{\partial t}(0,t)+\frac{\partial^2 h_0}{\partial x^2}(0,t),\quad z_1(t)=-\frac{\partial^2 h_1}{\partial t\partial x}(0,t)+\frac{\partial^3 h_0}{\partial x^3}(0,t).$$

Таким образом, найдено слагаемое на шаге $\varepsilon$, которое можно записать следующим образом:

$$u_1(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}}\bigg[\frac{\operatorname{th}(2t)}{2}g_0''\bigg(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}\bigg)+g_1\bigg(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}\bigg)\bigg]\exp\bigg(-\frac{x^2\operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\bigg)+$$
$$+G(\Psi_1(t))-\int\limits_0^t\frac{\dfrac{\partial h_1}{\partial\tau}(0,\tau)-\dfrac{\partial^2 h_0}{\partial x^2}(0,\tau)}{\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))}}\exp\bigg(-\frac{x^2\operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\bigg)\,d\tau-$$
$$-x\int\limits_0^t\bigg(\frac{\partial^2 h_1}{\partial\tau\partial x}(0,\tau)-\frac{\partial^3 h_0}{\partial x^3}(0,\tau)\bigg)\frac{1}{(\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))})^3}\exp\bigg(-\frac{x^2\operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\bigg)\,d\tau-$$
$$-\frac{1}{x^2}\bigg(\frac{\partial h_0}{\partial t}(x,t)-\frac{\partial h_0}{\partial t}(0,t)-x\frac{\partial^2 h_0}{\partial t\partial x}(0,t)\bigg).$$

По этой схеме (по индукции) находятся следующие слагаемые асимптотического ряда.

**3. Оценка остаточного члена.** Пусть решены $N+1$ итерационных задач. Тогда решение задачи Коши можно представить в виде

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{k=-1}^{N}\varepsilon^k u_k(x,t)+\varepsilon^{N+1}R_N(x,t,\varepsilon), \tag{6}$$

где $R_N(x,t,\varepsilon)$ – остаток, и слагаемые

$$u_k=v_k(x,t)e^{-\varphi(x,t)/\varepsilon}+G(\Psi_k(t))+\sigma_0(y_k(t))+\sigma_1(z_k(t))+w_k(x,t).$$

Подставив (6) в (1), получим задачу для остатка $R_N(x,t,\varepsilon)$:

$$\varepsilon\frac{\partial R_N}{\partial t}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 R_N}{\partial x^2}+x^2R_N=H(x,t,\varepsilon),\quad R_N(0,t,\varepsilon)=0,\quad R_N(x,0,\varepsilon)=0, \tag{7}$$

где

$$H(x,t,\varepsilon)=x^2w_{N+1}(x,t)+\varepsilon\bigg(\frac{\partial^2 v_N(x,t)}{\partial x^2}e^{-\varphi(x,t)/\varepsilon}+\frac{\partial^2 w_N(x,t)}{\partial x^2}\bigg).$$

Заметим, что так как итерационные задачи решены вплоть до $\varepsilon^{N+1}$, то слагаемое

$$x^2w_{N+1}(x,t)=O(x)$$

(см. приложение 3).

**Теорема** (оценка остаточного члена). *Пусть выполнены требования:*

*1) условия 1) и 2) для задачи (1);*

*2) $H(x,t,\varepsilon)=O(x)$ при любых $(x,t)\in[0,+\infty)\times[0,T]$ и $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$.*

*Тогда существует $C>0$ такое, что $|R_N(x,t,\varepsilon)|\leqslant C$ при всех $(x,t)\in[0,+\infty)\times[0,T]$ и $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$.*

**Доказательство.** Продолжим правую часть $H(x,t,\varepsilon)$ и начальное условие нулями на отрицательную полуось $Ox$. Используя фундаментальное решение Мелера, запишем решение задачи (7) в виде

$$R_N(x,t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}H(\xi,\tau,\varepsilon)K(x,\xi,t-\tau)\,d\xi.$$

Оценим с учётом условия 2) остаток по модулю:

$$|R_N(x,t,\varepsilon)|\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|H(\xi,\tau,\varepsilon)|K(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\leqslant\frac{C_1}{\varepsilon}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^{+\infty}\xi K(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C_1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\bigg(\frac{\sqrt{\operatorname{sh}(2(t-\tau))}}{\operatorname{ch}(2(t-\tau))}\exp\bigg(-\frac{x^2\operatorname{cth}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\bigg)+$$

$$+\frac{x}{(\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))})^3}\exp\bigg(-\frac{x^2\operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\bigg)\bigg)\,d\tau\leqslant\frac{C_2}{\varepsilon}.$$

Запишем остаточный член в виде $R_N=u_{N+1}+\varepsilon R_{N+1}$. Тогда $|R_N|\leqslant|u_{N+1}|+\varepsilon C_2/\varepsilon\leqslant C$.

**Лемма 1.** *Справедлива формула*

$$G(\Psi(t))=\Psi(t)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{x/\sqrt{2\varepsilon\operatorname{th}(2t)}}^{\infty}e^{-z^2}\,dz+O(\varepsilon^\infty),\quad\delta>0,\quad x\in[\delta,+\infty),\quad t\in[0,T].$$

**Доказательство.** Представим функцию в виде

$$G(\psi(t)) = \psi(t)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{x/\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{th}\,(2t)}}^{\infty} e^{-z^2}\,dz + \psi(t)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{x/\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{th}\,(2t)}}^{\infty}\biggl(\frac{1}{\sqrt[4]{1-b^2}}-1\biggr)e^{-z^2}\,dz +$$

$$+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{x/\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{th}\,(2t)}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{1-b^2}}\biggl(\psi\biggl(t-\frac{1}{4}\ln\biggl(1+\frac{2b}{1-b}\biggr)\biggr)-\psi(t)\biggr)e^{-z^2}\,dz.$$

Оценим второе слагаемое

$$\biggl|\psi(t)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{x/\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{th}\,(2t)}}^{\infty}\biggl(\frac{1}{\sqrt[4]{1-b^2}}-1\biggr)e^{-z^2}\,dz\biggr| \leqslant$$

$$\leqslant M\biggl|\int\limits_{x/\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{th}\,(2t)}}^{\infty}\biggl(\frac{1}{\sqrt[4]{1-\mathrm{th}^2(2t)}}-1\biggr)e^{-z^2}\,dz\biggr| \leqslant M_1\exp\biggl(-\frac{x^2}{4\varepsilon\,\mathrm{th}\,(2t)}\biggr) = O(\varepsilon^\infty)$$

и третье слагаемое (в силу непрерывности $\psi(t)$ на $[0,T]$)

$$\biggl|\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{x/\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{th}\,(2t)}}^{\infty}\frac{\Bigl(\psi\Bigl(t-\frac{1}{4}\ln\Bigl(1+\frac{2b}{1-b}\Bigr)\Bigr)-\psi(t)\Bigr)e^{-z^2}}{\sqrt[4]{1-b^2}}\,dz\biggr| \leqslant$$

$$\leqslant 2M\int\limits_{x/\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{th}\,(2t)}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{1-b^2}}e^{-z^2}\,dz \leqslant M_2\exp\biggl(-\frac{x^2}{4\varepsilon\,\mathrm{th}\,(2t)}\biggr) = O(\varepsilon^\infty).$$

Складывая эти оценки, получаем выражение

$$G(\Psi(t)) = \Psi(t)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{x/\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{th}\,(2t)}}^{\infty} e^{-z^2}\,dz + O(\varepsilon^\infty), \quad \delta>0, \quad x\in[\delta,+\infty), \quad t\in[0,T].$$

Функция $(2/\sqrt{\pi})\int_{x/\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{th}\,(2t)}}^{\infty}e^{-z^2}\,dz$ имеет обозначение $\mathrm{erfc}\,(x/\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{th}\,(2t)})$. Тогда $G(\Psi(t))$ можно записать в виде

$$G(\Psi(t)) = \Psi(t)\,\mathrm{erfc}\,\biggl(\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{th}\,(2t)}}\biggr) + O(\varepsilon^\infty).$$

**4. Фундаментальное решение Мелера.** Рассмотрим задачу

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2u = 0, \quad u(x,0) = \delta(x-\xi).$$

Сделав замену $u(x,t) = e^{-x^2/(2\varepsilon)-t}v(x,t)$, запишем её как

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2x\frac{\partial v}{\partial x} = \varepsilon\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad v(x,0) = e^{\xi^2/(2\varepsilon)}\delta(x-\xi).$$

Применим в этой задаче преобразование Фурье $F(\lambda,t)=\int_{-\infty}^{\infty}v(x,t)e^{-i\lambda x}\,dx$ и получим относительно $F$ задачу

$$\frac{\partial F}{\partial t}-2\lambda\frac{\partial F}{\partial \lambda}=(-\varepsilon\lambda^2+2)F,\quad F(\lambda,0)=e^{\xi^2/(2\varepsilon)-i\lambda\xi},$$

решение которой имеет вид

$$F(\lambda,t)=\exp\biggl(2t+\frac{\xi^2}{2\varepsilon}-\frac{\varepsilon\lambda^2}{4}-i\lambda\xi e^{2t}\biggr).$$

После обратного преобразования Фурье с учётом замены $u(x,t)=v(x,t)e^{-x^2/(2\varepsilon)-t}$ найдём решение исходной задачи

$$u(x,t)=\exp\biggl(-\frac{x^2-\xi^2}{2\varepsilon}+t\biggr)\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\biggl(\frac{\varepsilon\lambda^2}{4}(e^{4t}-1)-i\lambda(\xi e^{2t}-x)\biggr)\,d\lambda.$$

Выделив полный квадрат в показателе экспоненты и вычислив интеграл Пуассона, окончательно получим

$$K(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(2t)}}\exp\biggl[-\mathrm{cth}\,(2t)\frac{x^2+\xi^2}{2\varepsilon}+\frac{x\xi}{\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(2t)}\biggr].$$

**5. Построение граничного оператора.** Решим смешанную задачу

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x^2u=0,\quad u(x,0)=0,\quad u(0,t)=1.$$

Сделаем замену $u(x,t)=e^{-x^2/(2\varepsilon)}v(x,t)$ и в результате получим задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t}+2x\frac{\partial v}{\partial x}+v=\varepsilon\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0,\quad v(x,0)=0,\quad v(0,t)=1.$$

Проведём синус-преобразование. Тогда будем иметь в пространстве образов задачу для линейного относительно $F$ уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial t}-2\lambda\frac{\partial F}{\partial \lambda}=(-\varepsilon\lambda^2+1)F+\varepsilon\lambda,\quad F(\lambda,0)=0, \tag{8}$$

где введено обозначение

$$F(\lambda,t)=\int\limits_0^{\infty}v(x,t)\sin(\lambda x)\,dx.$$

Запишем характеристическую систему для линейного уравнения в задаче (8):

$$dt=\frac{d\lambda}{-2\lambda}=\frac{dF}{(-\varepsilon\lambda^2+1)F+\varepsilon\lambda}.$$

Система первых интегралов для неё имеет вид

$$\lambda e^{2t}=C_1,\quad e^{-\varepsilon^2\lambda^2/4}\sqrt{\lambda}F-\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\lambda}^{\infty}e^{-\varepsilon\mu^2/4}\sqrt{\mu}\,d\mu=C_2.$$

Теперь несложно, учитывая начальное условие, получить решение исходной задачи в пространстве образов:

$$F(\lambda,t)=\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\lambda}^{\lambda e^{2t}} e^{\varepsilon(\lambda^2-\mu^2)/4}\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\,d\mu.$$

Замена переменной $\mu=\lambda e^{2(t-\tau)}$ в последнем интеграле приведёт к более удобному в дальнейшем соотношению

$$F(\lambda,t)=\varepsilon\int\limits_0^t \exp\biggl(-\frac{\varepsilon}{4}\lambda^2(e^{4(t-\tau)}-1)+3(t-\tau)\biggr)\,d\tau.$$

Осталось осуществить обратное синус-преобразование Фурье, что в итоге позволит получить решение интересующей нас задачи:

$$v(x,t)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty F(\lambda,t)\sin(\lambda x)\,d\lambda=\frac{2\varepsilon}{\pi}\int\limits_0^\infty\biggl(\int\limits_0^t \exp\biggl(-\frac{\varepsilon}{4}\lambda^2(e^{4(t-\tau)}-1)+3(t-\tau)\biggr)\,d\tau\biggr)\sin(\lambda x)\,d\lambda.$$

Поменяв порядок интегрирования (что возможно в силу равномерной сходимости несобственного интеграла) и проделав несложные преобразования, получим

$$v(x,t)=\frac{4x}{\varepsilon\pi}\int\limits_0^t \frac{e^{-x^2/(\varepsilon a)}}{\sqrt{2\,\mathrm{sh}\,(2(t-\tau))}^3}\,d\tau,$$

где $a=e^{4(t-\tau)}-1$. Отсюда найдём

$$u(x,t)=\frac{4x}{\varepsilon\pi}\int\limits_0^t \frac{1}{\sqrt{2\,\mathrm{sh}\,(2(t-\tau))}^3}\,\exp\biggl(-\frac{x^2\,\mathrm{cth}\,(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\biggr)\,d\tau.$$

Решение для произвольного граничного условия $\psi(t)$ запишется в виде

$$u(x,t)=\frac{4x}{\varepsilon\pi}\int\limits_0^t \psi(\tau)\frac{1}{\sqrt{2\,\mathrm{sh}\,(2(t-\tau))}^3}\,\exp\biggl(-\frac{x^2\,\mathrm{cth}\,(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\biggr)\,d\tau. \tag{9}$$

Дадим другое представление решения (9), предварительно сделав замену переменных $z^2=$ $=x^2(2\varepsilon)^{-1}\,\mathrm{cth}\,(2(t-\tau))$:

$$u(x,t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{x/\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{th}\,(2t)}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{1-b^2}}\psi\biggl(t-\frac{1}{4}\ln\biggl(1+\frac{2b}{1-b}\biggr)\biggr)e^{-z^2}\,dz,\quad b=\frac{x^2}{2\varepsilon z^2}.$$

**Заключение.** Как уже было отмечено ранее, основной проблемой применения метода регуляризации С.А. Ломова является поиск регуляризирующих функций. В случае спектральных особенностей у предельного оператора выделение сингулярной зависимости решения от малого параметра – достаточно трудная задача. В предложенной работе для смешанной задачи на полуоси для неоднородного параболического уравнения со спектральной особенностью в виде “сильной” точки поворота задача построения регуляризованной асимптотики, как выяснилось, состоит из трёх частей:

1) описание пограничного слоя, обусловленного точкой $t=0$;

2) выделение сингулярностей, связанных с точечной необратимостью предельного оператора;

3) описание пограничного слоя, обусловленного точкой $x=0$.

В данной статье описанные проблемы разрешены путём введения регуляризирующей функции и трёх дополнительных сингулярных операторов. Тем самым основные трудности метода регуляризации для поставленной задачи преодолены, что подтверждается результатами наших исследований.

**Приложение 1.** Покажем, что функция

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(2t)}}\int\limits_0^\infty \exp\biggl(-\mathrm{cth}\,(2t)\frac{x^2+\xi^2}{2\varepsilon}+\frac{x\xi}{\varepsilon\,\mathrm{sh}\,2t}\biggr)f(\xi)\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(2t)}}\int\limits_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{(\xi-x\,\mathrm{ch}\,(2t))^2}{\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(4t)}+\frac{\xi^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\right)\right]f(\xi)\,d\xi, \tag{10}$$

где $f(x)$ – непрерывная ограниченная функция, удовлетворяет задаче

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}=\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-x^2u,\quad u(x,0)=f(x).$$

Заметим, что интеграл (10) сходится равномерно в области $\{(x,t): x\in(0,+\infty),\ t\in[0,T]\}$. Действительно,

$$|u(x,t)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(2t)}}\int\limits_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{(\xi-x\,\mathrm{ch}\,(2t))^2}{\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(4t)}+\frac{\xi^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\right)\right]|f(\xi)|\,d\xi\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(2t)}}\int\limits_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{(\xi-x\,\mathrm{ch}\,(2t))^2}{\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(4t)}\right)\right]|f(\xi)|\,d\xi\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-z^2}|f(x\,\mathrm{ch}\,(2t)+z\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(2t)})|\,dz\leqslant M,$$

так как $(\xi-x\,\mathrm{ch}\,(2t))/\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(2t)}=z,\ \ d\xi=\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(2t)}\,dz.$

*Шаг 1. Формальное дифференцирование и подстановка формальных производных в уравнение.* Найдём формально (т.е. не задумываясь над правомочностью этих действий) производные от функции $u(x,t)$, входящие в уравнение. Затем проверим, что полученный интеграл удовлетворяет однородному уравнению в задаче (1).

Вычислим входящие в уравнение частные производные

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(2t)}}\int\limits_0^\infty \exp(\ldots)\biggl(-\varepsilon\,\mathrm{cth}\,(2t)+\frac{x^2+\xi^2-2x\xi\mathrm{ch}\,(2t)}{\mathrm{sh}^2(2t)}\biggr)f(\xi)\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(2t)}}\int\limits_0^\infty \exp(\ldots)\biggl(-\varepsilon\,\mathrm{cth}\,(2t)-x^2+\frac{(x\,\mathrm{ch}\,(2t)-\xi)^2}{\mathrm{sh}^2(2t)}\biggr)f(\xi)\,d\xi,$$

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(2t)}}\int\limits_0^\infty \exp(\ldots)\biggl(-\varepsilon\,\mathrm{ch}\,(2t)+\frac{x^2\,\mathrm{ch}^2(2t)-2x\xi\mathrm{ch}\,(2t)+\xi^2}{\mathrm{sh}^2(2t)}\biggr)f(\xi)\,d\xi=$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(2t)}}\int\limits_0^\infty \exp(\ldots)\left(-\varepsilon\,\mathrm{ch}\,(2t) + \frac{(x\,\mathrm{ch}\,(2t)-\xi)^2}{\mathrm{sh}^2(2t)}\right) f(\xi)\,d\xi.$$

Здесь многоточием обозначен показатель экспоненты фундаментального решения.

Подставив вычисленные производные $u_t$, $u_{xx}$ в уравнение, получим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(2t)}}\int\limits_0^\infty \exp(\ldots)\biggl[-\varepsilon\,\mathrm{cth}\,(2t) - x^2 + \frac{(x\,\mathrm{ch}\,(2t)-\xi)^2}{\mathrm{sh}^2(2t)} +$$

$$+\varepsilon\,\mathrm{ch}\,(2t) - \frac{(x\,\mathrm{ch}\,(2t)-\xi)^2}{\mathrm{sh}^2(2t)} + x^2\biggr] f(\xi)\,d\xi = 0.$$

*Шаг 2. Обоснование правомочности формальных действий.* Для того чтобы показать, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению, нужно обосновать возможность дифференцирования по $x$ и $t$ под знаком интеграла при $t>0$, $0<x<+\infty$. Докажем этот факт при $t > t_0 > 0$, откуда в силу произвольности $t_0$ этот факт будет иметь место при $t>0$. Заметим, что если $u(x,t)$ дифференцировать по $x$ и $t$ произвольное число раз, то будет выделяться множитель $(\xi - x\,\mathrm{ch}\,(2t))$ в положительной степени, а множитель $\mathrm{sh}\,(2t)$ – в отрицательной степени. Таким образом, вопрос сводится к равномерной сходимости интеграла

$$J = (\mathrm{sh}\,(2t))^{-k} 2t\int\limits_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{(\xi - x\,\mathrm{ch}\,(2t))^2}{\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(4t)} + \frac{\xi^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\right)\right](\xi - x\,\mathrm{ch}\,(2t))^m f(\xi)\,d\xi.$$

Оценим интеграл

$$|J| \leqslant (\mathrm{sh}\,(2t))^{-k}\int\limits_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{(\xi - x\mathrm{ch}\,(2t))^2}{\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(4t)} + \frac{\xi^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\right)\right]|\xi - x\,\mathrm{ch}\,(2t)|^m |f(\xi)|\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant (\mathrm{sh}\,(2t))^{-k}\int\limits_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{(\xi - x\mathrm{ch}\,(2t))^2}{\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(4t)}\right)\right]|\xi - x\mathrm{ch}\,(2t)|^m |f(\xi)|\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant (\mathrm{sh}\,(2t))^{-k+(m+1)/2}\int\limits_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{z^2}{2\varepsilon}\right) z^m |f(\sqrt{\mathrm{sh}\,(2t)}z + x\,\mathrm{ch}\,(2t))|\,dz,$$

где $(\xi - x\,\mathrm{ch}\,(2t))/\sqrt{\mathrm{sh}\,(2t)} = z$, $d\xi = \sqrt{\mathrm{sh}\,(2t)}\,dz$.

Учитывая, что $|f(x)| \leqslant M$, получаем

$$e^{-z^2/(2\varepsilon)} z^m |f(\sqrt{\mathrm{sh}\,(2t)}z + x\,\mathrm{ch}\,(2t))| \leqslant M e^{-z^2/(2\varepsilon)} z^m.$$

Но функция $e^{-z^2/(2\varepsilon)}z^m$ интегрируема на промежутке $(0,+\infty)$, поэтому интеграл $J$ равномерно сходится при $0 < t_0 \leqslant t \leqslant T$. Отсюда следует, что функция $u(x,t)$ непрерывна и имеет непрерывные производные любого порядка по $x$ и $t$ при $t>0$. Кроме того, поскольку все интегралы, участвующие в наших формальных операциях, являются равномерно сходящимися по параметрам $x$, $t$ в любом замкнутом прямоугольнике $(x,t)\in[0,L]\times[t_0,T]$, $t_0>0$, то их можно в этом прямоугольнике дифференцировать по $x$ и $t$ сколь угодно раз.

*Шаг 3. Начальное условие.* Функция $u(x,t)$ не определена при $t=0$. Однако её можно доопределить в начальный момент времени по непрерывности, т.е. считать равной в момент

$t=0$ её пределу при $t\to+0$. Так как интеграл (10) сходится равномерно на множестве $(0,+\infty)\times[0,T]$, то возможен переход к пределу под знаком интеграла, т.е.

$$u(x,0)=\lim_{t\to+0}\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(2t)}}\int\limits_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{(\xi-x\,\mathrm{ch}\,(2t))^2}{\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(4t)}+\frac{\xi^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\right)\right]f(\xi)\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{x\,\mathrm{ch}\,(2t)/\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(2t)}}^{\infty}\lim_{t\to+0}\exp\left(-\frac{z^2}{\mathrm{ch}\,(2t)}\right)f(x\,\mathrm{ch}\,(2t)+z\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(2t)})\,dz=f(x),$$

здесь $(\xi-x\,\mathrm{ch}\,(2t))/\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(2t)}=z,$ $d\xi=\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(2t)}\,dz.$

Таким образом, функция $u(x,t)$ действительно является решением задачи.

**Приложение 2.** Докажем, что

$$T_\varepsilon\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2t)}}\,\exp\left(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\right)\right)=0,$$

где $T_\varepsilon=\varepsilon\dfrac{\partial}{\partial t}-\varepsilon^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+x^2.$

Найдём производные

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2t)}}\exp\left(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2t)}}\exp\left(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\right)\left(-\frac{x^2}{\mathrm{ch}^2(2t)}-\varepsilon\,\mathrm{th}\,(2t)\right),$$

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2t)}}\exp\left(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2t)}}\exp\left(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\right)\left(x^2\,\mathrm{th}^2(2t)-\varepsilon\,\mathrm{th}\,(2t)\right),$$

тогда

$$T_\varepsilon\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2t)}}\exp\left(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2t)}}\exp\left(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\right)\left(-\frac{x^2}{\mathrm{ch}^2(2t)}-\varepsilon\,\mathrm{th}\,(2t)-x^2\,\mathrm{th}^2(2t)+\varepsilon\,\mathrm{th}\,(2t)+x^2\right)=0.$$

Аналогично доказывается, что

$$T_\varepsilon\left(\frac{x}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2t)}^3}\,\exp\left(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\right)\right)=0.$$

**Приложение 3.** Уравнение для определения частного решения $w_0$ имеет вид

$$x^2w_0(x,t)=h(x,t)-h(0,t)-x\frac{\partial h}{\partial x}(0,t).$$

Отсюда

$$w_0(x,t)=\frac{h(x,t)-h(0,t)-x\dfrac{\partial h}{\partial x}(0,t)}{x^2}=h_0(x,t),$$

где $h_0(x,t)$ – гладкая функция. Проведём цепочку оценок.

1. $|h_0(x,t)|=\left|0,5\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(\xi,t)\right|\leqslant 0,5M<M,$ где $M$ – константа в задаче (1).

2. $\left|\dfrac{\partial w_0}{\partial x}\right| = \left|\dfrac{\partial h_0}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\dfrac{1}{6}\dfrac{\partial^3 h}{\partial x^3}(\xi_1,t)\right| \leqslant \dfrac{M}{6} < M$ и т.д., т.е. $w_0$ принадлежит классу ограниченных функций, для которых верна оценка $|w_0| \leqslant M$.

Отсюда следует, что и все частные решения $w_k$ итерационных задач по индукции также принадлежат этому классу: так как

$$w_k = \frac{1}{x^2}\left(-\frac{\partial w_{k-1}}{\partial t} + \frac{\partial^2 w_{k-2}}{\partial x^2} - y_{k-1}(t) - xz_{k-1}(t)\right), \quad k \geqslant 1,$$

то все эти оценки верны для любых $w_k$.

Оценим

$$|x^2 w_0| = \left|h(x,t) - h(0,t) - x\frac{\partial h}{\partial x}(0,t)\right| \leqslant 2xM,$$

т.е. $x^2 w_0 = O(x)$. Аналогично и $x^2 w_k = O(x)$, $k \geqslant 1$.

Результаты Елисеева А.Г. (постановка задачи, вывод уравнений для регуляризирующих функций, сингулярных операторов для регуляризации правых частей итерационных задач, граничного оператора для описания пограничного слоя в окрестности точки $x = 0$) были получены при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания (проект FSWF-2023-0012).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М., 1981.
2. *Ломов С.А., Ломов И.С.* Основы математической теории пограничного слоя. М., 2011.
3. *Eliseev A.G., Lomov S.A.* Asymptotic integration of singularly perturbed problems // London Math. Soc. Russ. Math. Surveys. 1988. V. 43. P. 1–63.
4. *Yeliseev A., Ratnikova T., Shaposhnikova D.* Regularized asymptotics of the solution of the singularly perturbed first boundary value problem on the semiaxis for a parabolic equation with a rational “simple” turning point // Mathematics. 2021. № 9. Art. 405.
5. *Елисеев А.Г., Кириченко П.В.* Сингулярно возмущённая задача Коши при наличии “слабой” точки поворота первого порядка у предельного оператора с кратным спектром // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 6. С. 733–746.
6. *Елисеев А.Г.* Пример решения сингулярно возмущённой задачи Коши для параболического уравнения при наличии “сильной” точки поворота // Дифференц. уравнения и процессы управления. 2022. № 3. С. 46–59.
7. *Арнольд В.И.* О матрицах, зависящих от параметров // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26. Вып. 2 (158). С. 101–114.
8. *Mehler F.G.* Ueber die Entwicklung einer Function von beliebig vielen Variablen nach Laplaceschen Functionen honerer Ordnung // J. fur die Reine und Angewandte Mathematik. 1866. S. 161–176.

Национальный исследовательский университет
“Московский энергетический институт”

Поступила в редакцию 31.01.2023 г.
После доработки 18.06.2023 г.
Принята к публикации 20.07.2023 г.