ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 8, с. 1046–1056

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.32+517.954

ЗАДАЧА О ДВУМЕРНЫХ КОЛЕБАНИЯХ СТРУНЫ С НЕЛИНЕЙНЫМ УСЛОВИЕМ

© 2023 г. М. Б. Зверева

Исследована модель малых пространственных поперечных колебаний струны, когда отклонение любой её точки от положения равновесия характеризуется двумя координатами. При этом предполагается, что в процессе колебаний один из концов струны находится внутри ограниченного, замкнутого, выпуклого множества C, принадлежащего плоскости π, перпендикулярной к отрезку, вдоль которого натянута струна. В свою очередь, множество C может перемещаться в плоскости π, его движение задано отображением $C(t)$. Пока конец струны не соприкоснулся с границей множества $C(t)$, он остаётся свободным. При соприкосновении начинается их совместное перемещение. Получена формула представления решения начально-краевой задачи, описывающей этот колебательный процесс. Рассмотрена задача граничного управления колебательным процессом.

DOI: 10.31857/S0374064123080046, EDN: INHCCO

Введение. Задачам граничного управления и их оптимизации посвящены работы многих математиков. Особенно можно выделить публикации В.А. Ильина, Е.И. Моисеева и их учеников [1–7], а также статьи А.И. Егорова, Л.Н. Знаменской [8, 9], А.В. Боровских [10], В.В. Провоторова [11]. При изучении таких задач, в первую очередь, исследуются условия, при которых колебательный процесс под воздействием некоторого граничного управления может быть переведен из состояния, определяемого начальными условиями, в заданное финальное состояние.

В настоящей работе изучается начально-краевая задача, описывающая пространственный колебательный процесс с нелинейным краевым условием. Такого рода задача возникает при моделировании колебаний струны с ограничителем на перемещение одного из концов. Получена формула представления решения. Для случая, когда время колебаний не превышает длины струны, записан явный вид функции граничного управления.

1. Постановка задачи. Введём декартову систему координат $Oxyz$. Предположим, что вдоль отрезка $[0,l]$ оси Ox натянута струна (положение равновесия), и каждая её точка характеризуется координатой x этой оси. Один из концов струны жёстко закреплен. Другой находится внутри ограниченного, замкнутого, выпуклого множества C (ограничителя), принадлежащего плоскости π, параллельной zOy. Рассмотрим задачу о малых пространственных поперечных колебаниях струны, когда отклонение любой точки струны от положения равновесия в момент времени t описывается двумя координатами: $u^1(x,t)$ характеризует смещение вдоль оси Oy, $u^2(x,t)$ характеризует смещение вдоль оси Oz. Обозначим через $u(x,t)=(u^1(x,t),u^2(x,t))$ вектор перемещения. Условие жёсткого закрепления первого конца струны означает, что $u(0,t)=0$. Пусть множество C, внутри которого находится второй конец струны, может двигаться в плоскости π, и его перемещение описывается отображением $C(t)$. Тогда выполнено условие $u(l,t)\in C(t)$. Пока $u(l,t)$ является внутренней точкой $C(t)$, выполняется условие свободного конца, т.е. $u_x(l,t)=0$. Если происходит соприкосновение соответствующего конца струны с граничной точкой ограничителя, то в течении некоторого времени выполнено условие $u(l,t)=c(t)$, где $c(t)$ – граничная точка $C(t)$. При этом со стороны ограничителя дополнительно возникает сила реакции опоры. Таким образом, должно выполняться условие

$$-u_x(l,t)\in N_{C(t)}(u(l,t)),$$

где множество $N_{C(t)}(u(l,t))$ обозначает внешний нормальный конус к $C(t)$ в точке $u(l,t)\in C(t)$, определяемый как

$$N_{C(t)}(u(l,t))=\{\xi\in R^2:\langle\xi,c-u(l,t)\rangle\leqslant 0\ \text{ для любых }\ c\in C(t)\}.$$

Пусть начальная форма струны задана функцией $\varphi(x) = (\varphi^1(x), \varphi^2(x))$. Начальная скорость предполагается нулевой.

Таким образом, математическая модель задачи имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad -u_x(l,t) \in N_{C(t)}(u(l,t)),$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) \in C(t). \tag{1}$$

Всюду далее будем предполагать выполнение условий $\varphi(l) \in C(0)$, $\varphi(0) = 0$, $-\varphi'(l) \in \in N_{C(0)}(\varphi(l))$. В настоящей работе для задачи (1) получен аналог формулы Даламбера для представления решения. Также решена задача граничного управления колебательным процессом для случая, когда время колебаний $0 < t \leqslant T < l$. Задача о двумерных деформациях струны (не зависящая от t) под воздействием внешней силы была рассмотрена в работе [12]. Колебательный процесс на графе-звезде с ограничителями на движение концов струн изучался в статье [13].

2. Предварительные сведения. Приведём некоторые понятия и определения, которые понадобятся в дальнейшем.

Пусть H – гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Для замкнутого выпуклого множества $C \subset H$ множество

$$N_C(x) = \{\xi \in H : \langle \xi, c - x\rangle \leqslant 0 \ \text{ для любых } \ c \in C\}$$

обозначает внешний нормальный конус к C в точке $x \in C$. Заметим, что всегда $0 \in N_C(x)$, $N_{\{x\}}(x) = H$, и $N_C(x) = \{0\}$ для $x \in \operatorname{int} C$, где $\operatorname{int} C$ –множество внутренних точек C (предполагается, что $\operatorname{int} C \neq \varnothing$). Последнее соотношение показывает, что внешний нормальный конус нетривиален только при $x \in \partial C$, где ∂C – граница множества C.

Хаусдорфово расстояние $d_H(C_1, C_2)$ между замкнутыми множествами C_1 и C_2 задаётся формулой

$$d_H(C_1, C_2) = \max\Big\{\sup_{x\in C_2} \operatorname{dist}(x, C_1), \sup_{x \in C_1} \operatorname{dist}(x, C_2)\Big\},$$

где $\operatorname{dist}(x, C) = \inf\{\|x - c\|, c \in C\}$.

Рассмотрим процесс выметания, описанный в работе [14]:

$$-u'(t) \in N_{C(t)}(u(t)), \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$u(0) = u_0 \in C(0). \tag{3}$$

Функция $u : [0,T] \to H$ называется *решением задачи* (2), (3), если:

а) $u(0) = u_0$;
б) $u(t) \in C(t)$ для всех $t \in [0,T]$;
в) u дифференцируема для п.в. $t \in [0,T]$;
г) $-u'(t) \in N_{C(t)}(u(t))$ для п.в. $t \in [0,T]$.

Нам понадобятся следующие теоремы из статьи [14].

Теорема 1. *Предположим, что отображение $t \to C(t)$ удовлетворяет условию Липшица в смысле расстояния по Хаусдорфу, т.е.*

$$d_H(C(t), C(s)) \leqslant L|t - s|,$$

где $C(t) \subset H$ – непустое, замкнутое и выпуклое множество для всех $t \in [0,T]$. Пусть $u_0 \in \in C(0)$. Тогда существует решение $u : [0,T] \to H$ задачи (2), (3), которое удовлетворяет условию Липшица с константой L. При этом $|u'(t)| \leqslant L$ для п.в. $t \in [0,T]$.

Теорема 2. *Решение (2), (3) единственно в классе абсолютно непрерывных функций.*

Далее будем применять классы функций, введённые В.А. Ильиным (см., например, [2]). Обозначим через Q_T прямоугольник $Q_T = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant l,\ \ 0 \leqslant t \leqslant T\}$. Будем говорить, что функция $u(x,t)$ принадлежит классу $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, если $u(x,t)$ непрерывна в Q_T и имеет в этом прямоугольнике обе обобщённые частные производные $u_x(x,t)$ и $u_t(x,t)$, каждая из которых принадлежит классу $L_2(Q_T)$ и, кроме того, принадлежит классу $L_2(0 \leqslant x \leqslant l)$ при любом фиксированном t из сегмента $[0,T]$ и классу $L_2(0 \leqslant t \leqslant T)$ при любом фиксированном x из сегмента $[0,l]$.

Будем говорить, что $\Phi(x,t)$ принадлежит классу $\widehat{W}_2^2(Q_T)$, если функция $\Phi(x,t)$ и её частные производные первого порядка непрерывны в Q_T и если $\Phi(x,t)$ имеет в этом прямоугольнике все обобщённые частные производные второго порядка, каждая из которых принадлежит классу $L_2(Q_T)$ и, кроме того, принадлежит классу $L_2(0 \leqslant x \leqslant l)$ при любом фиксированном t из сегмента $[0,T]$ и классу $L_2(0 \leqslant t \leqslant T)$ при любом фиксированном x из сегмента $[0,l]$.

3. Формула представления решения. *Решением задачи* (1) будем называть функцию $u(x,t) = (u^1(x,t), u^2(x,t))$ такую, что:

1) для всех $T > 0$ выполнены условия $u^i(x,t) \in \widehat{W}_2^1(Q_T)$, $\ i = 1,2$;

2) для всех $t \geqslant 0$ выполнены условия $u(l,t) \in C(t)$, $\ u(0,t) = 0$;

3) для п.в. $t \geqslant 0$ выполнено условие $-u_x(l,t) \in N_{C(t)}(u(l,t))$;

4) условия $u^i(x,0) = \varphi^i(x)$ выполнены для всех $x \in [0,l]$, а условия $\dfrac{\partial u^i}{\partial t}(x,0) = 0$ выполнены для п.в. $x \in [0,l]$, $\ i = 1,2$;

5) для любых $T > 0$ выполняются интегральные равенства

$$\int\limits_0^l \int\limits_0^T u^i(x,t)\left[\frac{\partial^2 \Psi^i}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 \Psi^i}{\partial x^2}(x,t)\right] dx\,dt + \int\limits_0^l \frac{\partial \Psi^i}{\partial t}(x,0)\varphi^i(x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_0^T \left[u^i(l,t)\frac{\partial \Psi^i}{\partial x}(l,t) - \Psi^i(l,t)\frac{\partial u^i}{\partial x}(l,t)\right] dt = 0, \tag{4}$$

где произвольные функции $\Psi^i \in \widehat{W}_2^2(Q_T)$ такие, что $\Psi^i(0,t) = 0$, $\ \Psi^i(x,T) = 0$, $\ \dfrac{\partial \Psi^i}{\partial t}(x,T) = 0$, $i = 1,2$.

Рассмотрим функции Φ^i $\ (i = 1,2)$ следующего вида:

если $x \in [0,l]$, то $\Phi^i(x) = \varphi^i(x)$;

если $x \in [(m+1)l, (m+2)l]$ и m – чётное число, то

$$\Phi^i(x) = 2\sum_{k=0}^{m/2} g_{2k}^i(x - (m+1-2k)l) - \varphi^i((m+2)l - x);$$

если m – нечётное число, то

$$\Phi^i(x) = 2\sum_{k=1}^{(m+1)/2} g_{2k-1}^i(x - (m+2-2k)l) + \varphi^i(x - (m+1)l);$$

$$\Phi^i(-x) = -\Phi^i(x).$$

Здесь функции $g_0(t) = (g_0^1(t), g_0^2(t))$ и $g_1(t) = (g_1^1(t), g_1^2(t))$ – решения задач

$$-\,g_0'(t) \in N_{C(t)}(g_0(t)) + \varphi'(l-t), \quad t \in [0,l],$$

$$g_0(0) = \varphi(l)$$

и

$$-g_1'(t)\in N_{C(t)}(g_1(t))+\varphi'(t-l),\quad t\in[l,2l],$$

$$g_1(l)=g_0(l).$$

Функции $g_m(t)=(g_m^1(t),g_m^2(t))$, где $t\in[ml,(m+1)l]$, для чётных номеров $m\geqslant 2$ являются решениями задач

$$-g_m'(t)\in N_{C(t)}(g_m(t))+2\sum_{k=0}^{(m-2)/2}g_{2k}'(t-ml+2kl)+\varphi'(ml+l-t),$$

$$g_m(ml)=g_{m-1}(ml),$$

а для нечётных $m\geqslant 3$, где $t\in[ml,(m+1)l]$, – решениями задач

$$-g_m'(t)\in N_{C(t)}(g_m(t))+2\sum_{k=1}^{(m-1)/2}g_{2k-1}'(t-l-ml+2kl)+\varphi'(t-ml),$$

$$g_m(ml)=g_{m-1}(ml).$$

Теорема 3. *Пусть функции $\varphi^i(x)$ $(i=1,2)$ и отображение $C(t)$ удовлетворяют условию Липшица на своих областях определения. Тогда решение задачи (1) может быть представлено в виде*

$$u^i(x,t)=\frac{\Phi^i(x-t)+\Phi^i(x+t)}{2},\tag{5}$$

где $i=1,2$.

Доказательство. Предположим формально, что решение задачи (1) имеет вид (5). Тогда $u^i(x,0)=\Phi^i(x)=\varphi^i(x)$, где $x\in[0,l]$, $i=1,2$. Из условия $u^i(0,t)=0$ следует, что функции $\Phi^i(x)$ должны определяться при $x<0$ нечётным образом. Поскольку $u_x^i(x,t)=(\Phi^{i'}(x-t)+\Phi^{i'}(x+t))/2$, $u_t^i(x,t)=(-\Phi^{i'}(x-t)+\Phi^{i'}(x+t))/2$, то $-u_t^i(l,t)=-u_x^i(l,t)+\Phi^{i'}(l-t)$ и, следовательно,

$$-u_t(l,t)=-u_x(l,t)+\Phi'(l-t),$$

где $\Phi'(l-t)=(\Phi_1'(l-t),\Phi_2'(l-t))$. Обозначим $g(t)=(g^1(t),g^2(t))=u(l,t)=(u^1(l,t),u^2(l,t))$. Заметим, что

$$-g'(t)\in N_{C(t)}(g(t))+\Phi'(l-t).$$

Рассмотрим случай, когда $0\leqslant t\leqslant l$. Тогда $\Phi'(l-t)=\varphi'(l-t)$. Введём функцию $g_0(t)$, равную $g(t)$ при $0\leqslant t\leqslant l$. Получим, что $g_0(t)$ – решение задачи

$$-g_0'(t)\in N_{C(t)}(g_0(t))+\varphi'(l-t),\quad t\in[0,l],$$

$$g_0(0)=\varphi(l).\tag{6}$$

Покажем, что данная задача имеет единственное решение, которое определено для всех $t\in\in[0,l]$.

Рассмотрим функцию $w(t)=g_0(t)+\int_0^t\varphi'(l-s)\,ds$, где

$$\int\limits_0^t\varphi'(l-s)\,ds=\biggl(\int\limits_0^t\varphi^{1'}(l-s)\,ds,\int\limits_0^t\varphi^{2'}(l-s)\,ds\biggr),$$

и множество $D(t)=C(t)+\int_0^t\varphi'(l-s)\,ds$. Так как функции $\varphi^i(x)$ и отображение $C(t)$ удовлетворяют условию Липшица, то отображение $D(t)$ также удовлетворяет условию Липшица (в смысле расстояния по Хаусдорфу). Заметим, что $N_{C(t)}(g_0(t)) = N_{D(t)}(w(t))$. Таким образом, получаем задачу

$$-\frac{d}{dt}w(t) \in N_{D(t)}(w(t)), \quad w(0) = \varphi(l) \in D(0), \quad t \in [0, l].$$

Согласно теоремам 1 и 2 эта задача имеет единственное решение $w(t)$, определённое на всём отрезке $[0, l]$. Функция $w(t)$ удовлетворяет условию Липшица, и её производная почти всюду ограничена. Тогда задача (6) имеет единственное решение $g_0(t)$, где $g_0(t) \in C(t)$, и $g_0(t)$ также удовлетворяет условию Липшица. Поскольку для $i = 1, 2$ имеют место равенства

$$\Phi^i(l-t) + \Phi^i(l+t) = 2g_0^i(t),$$

то получаем $\Phi^i(x) = 2g_0^i(x-l) - \varphi^i(2l-x)$, где $x \in [l, 2l]$. Заметим, что каждая функция $\Phi^i(x)$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[l, 2l]$ и имеет почти всюду ограниченную производную. Таким образом, $\Phi^i \in W_2^1[l, 2l]$. Покажем, что $\Phi^i(l-0) = \Phi^i(l+0)$. Имеем $\Phi^i(l-0) = \varphi^i(l)$ и $\Phi^i(l+0) = 2g_0^i(0) - \varphi^i(l) = 2\varphi^i(l) - \varphi^i(l) = \varphi^i(l)$.

Пусть $t \in [l, 2l]$. Определим на данном отрезке функцию $g_1(t) = g(t)$. Рассмотрим задачу

$$-\frac{d}{dt}g_1(t) \in N_{C(t)}(g_1(t)) + \Phi'(l-t), \quad t \in [l, 2l],$$

$$g_1(l) = g_0(l).$$

Так как $\Phi(l-t) = -\varphi(t-l)$, то получаем задачу

$$-g_1'(t) \in N_{C(t)}(g_1(t)) + \varphi'(t-l), \quad t \in [l, 2l],$$

$$g_1(l) = g_0(l).$$

Аналогично (6) доказывается, что последняя задача имеет единственное решение $g_1(t)$, где $g_1(t) \in C(t)$ и $g_1(t)$ удовлетворяет условию Липшица. Таким образом, можем определить $\Phi^i(x)$, где $x \in [2l, 3l]$, как

$$\Phi^i(x) = 2g_1^i(x-l) + \varphi^i(x-2l).$$

Отметим, что $\Phi^i \in W_2^1[2l, 3l]$. Покажем, что $\Phi^i(2l-0) = \Phi^i(2l+0)$. Имеем равенства $\Phi^i(2l-0) = 2g_0^i(l) - \varphi^i(0) = 2g_0^i(l)$ и $\Phi^i(2l+0) = 2g_1^i(l) + \varphi^i(0) = 2g_0^i(l)$.

Аналогично рассмотрим случай, когда $t \in [2l, 3l]$. Определим функцию $g_2(t) = g(t)$, где $t \in [2l, 3l]$. Тогда функция $g_2(t)$ – решение задачи

$$-\frac{d}{dt}g_2(t) \in N_{C(t)}(g_2(t)) + 2g_0'(t-2l) + \varphi'(3l-t), \quad t \in [2l, 3l],$$

$$g_2(2l) = g_1(2l).$$

Теперь можем определить каждую функцию $\Phi^i(x)$ на отрезке $x \in [3l, 4l]$ как

$$\Phi^i(x) = 2g_2^i(x-l) + 2g_0^i(x-3l) - \varphi^i(4l-x).$$

Рассмотрим случай $t \in [3l, 4l]$. Определив $g_3(t) = g(t)$, получим, что $g_3(t)$ – решение задачи

$$-\frac{d}{dt}g_3(t) \in N_{C(t)}(g_3(t)) + 2g_1'(t-2l) + \varphi'(t-3l), \quad t \in [3l, 4l],$$

$$g_3(3l) = g_2(3l),$$

и при $x \in [4l, 5l]$ определим функции

$$\Phi^i(x) = 2g_3^i(x-l) + 2g_1^i(x-3l) + \varphi^i(x-4l).$$

Покажем, что при $x \in [(m+1)l, (m+2)l]$, где m – чётное число, функции $\Phi^i(x)$ имеют вид

$$\Phi^i(x) = 2\sum_{k=0}^{m/2} g^i_{2k}(x-(m+1-2k)l) - \varphi^i((m+2)l-x);$$

если же m – нечётное число, то

$$\Phi^i(x) = 2\sum_{k=1}^{(m+1)/2} g^i_{2k-1}(x-(m+2-2k)l) + \varphi^i(x-(m+1)l).$$

В свою очередь, функции $g_m(t)$, где $t \in [ml, (m+1)l]$, для чётных номеров $m \geqslant 2$ являются решениями задач

$$-g'_m(t) \in N_{C(t)}(g_m(t)) + 2\sum_{k=0}^{(m-2)/2} g'_{2k}(t-ml+2kl) + \varphi'(ml+l-t),$$

$$g_m(ml) = g_{m-1}(ml),$$

а для нечётных $m \geqslant 3$ – решениями задач

$$-g'_m(t) \in N_{C(t)}(g_m(t)) + 2\sum_{k=1}^{(m-1)/2} g'_{2k-1}(t-l-ml+2kl) + \varphi'(t-ml),$$

$$g_m(ml) = g_{m-1}(ml).$$

Для $m=2,3$ утверждение доказано. Предположим, что оно верно для $m \leqslant M$. Проверим справедливость утверждения для $m = M+1$. Рассмотрим случай, когда M – чётное число. Покажем, что

$$\Phi^i(x) = 2\sum_{k=1}^{(M+2)/2} g^i_{2k-1}(x-(M+3-2k)l) + \varphi^i(x-(M+2)l),$$

где $x \in [(M+2)l, (M+3)l]$. Определив $g(t) = g_{M+1}(t)$, где $t \in [(M+1)l, (M+2)l]$, получим

$$-g'_{M+1}(t) \in N_{C(t)}(g_{M+1}(t)) + \Phi'(l-t), \quad \Phi = (\Phi^1, \Phi^2).$$

Поскольку

$$\Phi'(l-t) = 2\sum_{k=1}^{M/2} g'_{2k-1}(t-l-(M+1-2k)l) + \varphi'(t-l-Ml),$$

то

$$-g'_{M+1}(t) \in N_{C(t)}(g_{M+1}(t)) + 2\sum_{k=1}^{M/2} g'_{2k-1}(t-2l-Ml+2kl) + \varphi'(t-l-Ml).$$

Заметим, что

$$g_{M+1}((M+1)l) = \frac{\Phi((2+M)l) - \Phi(Ml)}{2}.$$

Так как $\Phi((M+2)l) = 2\sum_{k=0}^{M/2} g_{2k}(l+2kl)$ и $\Phi(Ml) = 2\sum_{k=0}^{(M-2)/2} g_{2k}(l+2kl)$, то

$$g_{M+1}((M+1)l) = g_M((M+1)l).$$

Задача

$$-g'_{M+1}(t) \in N_{C(t)}(g_{M+1}(t)) + 2\sum_{k=1}^{M/2} g'_{2k-1}(t-2l-Ml+2kl) + \varphi'(t-l-Ml),$$

$$g_{M+1}((M+1)l) = g_M((M+1)l)$$

имеет единственное решение $g_{M+1}(t)$, определёное на промежутке $[(M+1)l,(M+2)l]$. Поскольку

$$g_{M+1}(t) = \frac{\Phi(l-t)+\Phi(l+t)}{2},$$

то

$$\Phi^i(x) = 2g^i_{M+1}(x-l) - \Phi^i(2l-x),$$

где $x \in [(M+2)l,(M+3)l]$. Так как

$$\Phi^i(2l-x) = -2\sum_{k=1}^{M/2} g^i_{2k-1}(x-3l-Ml+2kl) - \varphi^i(x-2l-Ml),$$

то

$$\Phi^i(x) = 2g^i_{M+1}(x-l) + 2\sum_{k=1}^{M/2} g^i_{2k-1}(x-3l-Ml+2kl) + \varphi^i(x-2l-Ml) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{(M+2)/2} g^i_{2k-1}(x-3l-Ml+2kl) + \varphi^i(x-2l-Ml),$$

что и требовалось. Другие случаи рассматриваются аналогично.

Таким образом, получено представление для функций $\Phi^i(x)$, $i=1,2$. Покажем, что функции $u^i(x,t)$, определённые равенством (5), составляют решение задачи (1). Заметим, что $u^i \in \widehat{W}^1_2(Q_T)$ для всех T, поскольку $\Phi_i(x)$ непрерывны на всей оси; $\Phi^i \in W^1_2(ml,(m+1)l)$ для $m=0,1,2,\ldots;$ при $x<0$ функции $\Phi^i(x)$ определены нечётным образом.

Так как $u(l,t)=g(t)$, где $g(t)=g_m(t)$ при $t\in[ml,(m+1)l]$, $g_m(ml)=g_{m-1}(ml)$ и $g_m(t)\in C(t)$, то $u(l,t)\in C(t)$ для всех $t\geqslant 0$. Также условия $u^i(0,t)=0$ $(i=1,2)$ выполнены для всех $t\geqslant 0$; $\dfrac{\partial u^i}{\partial t}(x,0)=0$ выполнены для п.в. $x\in[0,l]$; $u^i(x,0)=\varphi^i(x)$ выполнены для всех $x\in[0,l]$ $(i=1,2)$.

Поскольку почти всюду справедливы отношения

$$-u^i_x(l,t) = -\frac{1}{2}(\Phi^{i'}(l-t)+\Phi^{i'}(l+t)), \quad \Phi^{i'}(l+t) = 2g^{i'}(t)+\Phi^{i'}(l-t), \quad -g'(t)\in N_{C(t)}(g(t))+\Phi'(l-t),$$

то $-u_x(l,t)\in N_{C(t)}(u(l,t))$.

Покажем теперь, что для $i=1,2$ выполняется интегральное тождество. Интегральное равенство (4) может быть представлено в виде

$$\int_0^l\biggl(\int_0^T u^i(x,t)\Psi^i_{tt}(x,t)\,dt\biggr)dx - \int_0^T\biggl(\int_0^l u^i(x,t)\Psi^i_{xx}(x,t)\,dx\biggr)dt +$$

$$+\int_0^l \Psi^i_t(x,0)\varphi^i(x)\,dx - \int_0^T \Psi^i(l,t)u^i_x(l,t)\,dt + \int_0^T \Psi^i_x(l,t)u^i(l,t)\,dt =$$

$$
= \int_0^l [u^i(x,T)\Psi^i_t(x,T) - u^i(x,0)\Psi^i_t(x,0)]\,dx - \int_0^l \int_0^T u^i_t(x,t)\Psi^i_t(x,t)\,dt\,dx -
$$

$$
- \int_0^T [\Psi^i_x(l,t)u^i(l,t) - \Psi^i_x(0,t)u^i(0,t)]\,dt + \int_0^T \int_0^l u^i_x(x,t)\Psi^i_x(x,t)\,dx\,dt + \int_0^l \Psi^i_t(x,0)\varphi^i(x)\,dx -
$$

$$
- \int_0^T \Psi^i(l,t)u^i_x(l,t)\,dt + \int_0^T \Psi^i_x(l,t)u^i(l,t)\,dt =
$$

$$
= \int_0^T \int_0^l u^i_x(x,t)\Psi^i_x(x,t)\,dx\,dt - \int_0^l \int_0^T u^i_t(x,t)\Psi^i_t(x,t)\,dx\,dt - \int_0^T \Psi^i(l,t)u^i_x(l,t)\,dt =
$$

$$
= \frac{1}{2}\int_0^T \int_0^l [\Phi^{i'}(x-t) + \Phi^{i'}(x+t)]\Psi^i_x(x,t)\,dx\,dt -
$$

$$
- \frac{1}{2}\int_0^l \int_0^T [\Phi^{i'}(x+t) - \Phi^{i'}(x-t)]\Psi^i_t(x,t)\,dt\,dx - \sum_{i=1}^n \int_0^T \Psi^i(l,t)u^i_x(l,t)\,dt =
$$

$$
= \frac{1}{2}\int_0^l \Psi^i_x(x,T)[-\Phi^i(x-T) + \Phi^i(x+T)]\,dx - \frac{1}{2}\int_0^l \Psi^i_x(x,0)[-\Phi^i(x) + \Phi^i(x)]\,dx -
$$

$$
- \frac{1}{2}\int_0^T \int_0^l \Psi^i_{xt}(x,t)[\Phi^i(x+t) - \Phi^i(x-t)]\,dx\,dt - \frac{1}{2}\int_0^T \Psi^i_t(l,t)[\Phi^i(l+t) - \Phi^i(l-t)]\,dt +
$$

$$
+ \frac{1}{2}\int_0^T \Psi^i_t(0,t)[\Phi^i(t) - \Phi^i(-t)]\,dt + \frac{1}{2}\int_0^l \int_0^T \Psi^i_{tx}(x,t)[\Phi^i(x+t) - \Phi^i(x-t)]\,dx\,dt -
$$

$$
- \int_0^T \Psi(l,t)u^i_x(l,t)\,dt = -\frac{1}{2}\int_0^T \Psi^i_t(l,t)[\Phi^i(l+t) - \Phi^i(l-t)]\,dt - \frac{1}{2}\int_0^T [\Phi^{i'}(l-t) + \Phi^{i'}(l+t)]\Psi^i(l,t)\,dt =
$$

$$
= -\frac{1}{2}\int_0^T \Psi^i_t(l,t)[\Phi^i(l+t) - \Phi^i(l-t)]\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T \Psi^i_t(l,t)[\Phi^i(l+t) - \Phi^i(l-t)]\,dt = 0.
$$

Теорема доказана.

Замечание. Задача (1) имеет единственное решение. Предположим, что $\varphi(l)$ является внутренней точкой множества $C(0)$. Тогда колебательный процесс осуществляется подобно процессу для струны с жёстко закреплённым и свободным концами до момента времени t_1, когда происходит соприкосновение с границей множества $C(t)$ (если соприкосновения не происходит, то правый конец струны остаётся свободным всё время). Таким образом, для $t \in [0, t_1]$ получаем задачи

$$
\frac{\partial^2 u^i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < t_1,
$$

$$
u^i(x,0) = \varphi^i(x), \quad \frac{\partial u^i}{\partial t}(x,0) = 0,
$$

$$
u^i(0,t) = 0, \quad u^i_x(l,t) = 0,
$$

где $i = 1, 2$. Согласно [2] каждая из этих задач имеет единственное решение $u^i(x,t)$. Таким образом, для $t \in [0, t_1]$ функция $u(x,t)$ однозначно определена.

В момент времени t_1 происходит соприкосновение струны с ограничителем, т.е. $u(l,t) = c(t) = (c_1(t), c_2(t))$, где $c(t) \in C(t)$. Таким образом, $u_1(l,t) = c_1(t)$, $u_2(l,t) = c_2(t)$. И в течение временного промежутка $[t_1, t_2]$ происходит совместное перемещение конца струны с ограничителем, т.е. функции $u^i(x,t)$ являются решением задач

$$\frac{\partial^2 v^i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v^i}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, \quad t_1 < t < t_2,$$

$$v^i(x,t_1) = u(x,t_1), \quad \frac{\partial v^i}{\partial t}(x,t_1) = u'_t(x,t_1),$$

$$v^i(0,t) = 0, \quad v^i(l,t) = c^i(t).$$

Согласно [2] каждая из этих задач также имеет единственное решение $u^i(x,t)$, где $t \in [t_1, t_2]$. Продолжая аналогичные рассуждения, получаем, что исходная задача может иметь лишь единственное решение.

4. Задача граничного управления. Рассмотрим теперь задачу граничного управления колебательным процессом

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0,$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) \in N_{C(t)}(u(l,t)), \quad u(0,t) = \mu(t). \tag{7}$$

Требуется найти функцию $\mu(t) = (\mu^1(t), \mu^2(t))$, где $\mu^i(t) \in W_2^1[0,T]$, такую, что

$$u(x,T) = \varphi^*(x), \quad u_t(x,T) = \psi^*(x),$$

где $\varphi^{*i} \in W_2^1[0,l]$, $\psi^{*i} \in L^2[0,l]$, $i = 1, 2$, – заданные функции. Предполагаем, что функции $\varphi^i(x)$ и отображение $C(t)$ удовлетворяют условию Липшица на своих областях определения.

Решением задачи (7) будем называть функцию $u(x,t) = (u^1(x,t), u^2(x,t))$ такую, что:

1) $u^i(x,t) \in \widehat{W}_2^1(Q_T)$, $i = 1, 2$;

2) для всех $0 \leqslant t \leqslant T$ выполнены условия $u(l,t) \in C(t)$, $u^i(0,t) = \mu^i(t)$;

3) для п.в. $0 \leqslant t \leqslant T$ выполнено условие $-\dfrac{\partial u}{\partial x}(l,t) \in N_{C(t)}(u(l,t))$;

4) условия $u^i(x,0) = \varphi^i(x)$ выполнены для всех $x \in [0,l]$, а условия $\dfrac{\partial u^i}{\partial t}(x,0) = 0$ выполнены для п.в. $x \in [0,l]$, $i = 1, 2$;

5) для $i = 1, 2$ выполняются интегральные равенства

$$\int_0^l \int_0^T u^i(x,t) \left[\frac{\partial^2 \Psi^i}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 \Psi^i}{\partial x^2}(x,t) \right] dx\, dt + \int_0^l \frac{\partial \Psi^i}{\partial t}(x,0) \varphi^i(x)\, dx +$$

$$+ \int_0^T \left[u^i(l,t) \frac{\partial \Psi^i}{\partial x}(l,t) - \Psi^i(l,t) \frac{\partial u^i}{\partial x}(l,t) \right] dt - \int_0^T \frac{\partial \Psi^i}{\partial x}(0,t) \mu^i(t)\, dt = 0,$$

где произвольные функции $\Psi^i \in \widehat{W}_2^2(Q_T)$, $i = \overline{1,n}$, такие, что $\Psi^i(0,t) = 0$, $\Psi^i(x,T) = 0$, $\dfrac{\partial \Psi^i}{\partial t}(x,T) = 0$.

Рассмотрим случай, когда $T < l$.

Теорема 4. *Для $T < l$ решение задачи (7) определено единственным образом. Функции $\mu^i(t)$ должны иметь вид*

$$\mu^i(t) = \frac{1}{2}(\varphi^i(t) - \widehat{\psi^{*i}}(T-t) + \varphi^{*i}(T-t)).$$

При этом для всех $i = 1, 2$ начальные и финальные данные должны быть связаны между собой равенствами

$$\widehat{\psi^{*i}}(x) - \varphi^{*i}(x) + \varphi^i(x-T) \equiv 0, \quad T \leqslant x \leqslant l,$$

$$\widehat{\psi^{*i}}(x) + \varphi^{*i}(x) - \varphi^i(x+T) \equiv 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l-T,$$

$$\widehat{\psi^{*i}}(x) + \varphi^{*i}(x) - 2g_0^i(T+x-l) + \varphi^i(2l-x-T) \equiv 0, \quad l-T \leqslant x \leqslant l.$$

Здесь для каждого $i = 1, 2$ через $\widehat{\psi^{*i}}$ обозначена первообразная для функции ψ^{*i}, удовлетворяющая равенству

$$\widehat{\psi^{*i}}(x_0) - \varphi^{*i}(x_0) + \varphi^i(x_0-T) = 0,$$

$x_0 \in [T, l]$ – фиксированная точка; $g_0(t) = (g_0^1(t), g_0^2(t))$ – решение задачи (6).

Доказательство. Введём функции

$$\underline{\mu}^i(t) = \begin{cases} \mu^i(t), & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

Обозначим через $v(x,t) = (v^1(x,t), v^2(x,t))$ решение задачи (1). Аналогично теореме 3 непосредственной проверкой устанавливается, что $u^i(x,t) = \underline{\mu}^i(t-x) + v^i(x,t)$, $i = 1, 2$, – решение задачи (7). Таким образом, получаем равенство

$$u^i(x,t) = \underline{\mu}^i(t-x) + \frac{\Phi^i(x-t) + \Phi^i(x+t)}{2}.$$

Тогда

$$\underline{\mu}^i(T-x) + \frac{\Phi^i(x-T) + \Phi^i(x+T)}{2} = \varphi^{*i}(x)$$

и, следовательно,

$$-\underline{\mu}^{i\prime}(T-x) + \frac{\Phi^{i\prime}(x+T) + \Phi^{i\prime}(x-T)}{2} = \varphi^{*i\prime}(x). \tag{8}$$

С другой стороны,

$$\underline{\mu}^{i\prime}(T-x) + \frac{\Phi^{i\prime}(x+T) - \Phi^{i\prime}(x-T)}{2} = \psi^{*i}(x). \tag{9}$$

Вычитая из (9) равенство (8), получаем

$$2\underline{\mu}^{i\prime}(T-x) - \Phi^{i\prime}(x-T) = \psi^{*i}(x) - \varphi^{*i\prime}(x). \tag{10}$$

Рассмотрим случай, когда $T \leqslant x \leqslant l$. Воспользовавшись представлениями для функций $\underline{\mu}^i$ и Φ^i, имеем

$$\widehat{\psi^{*i}}(x) - \varphi^{*i}(x) + \varphi^i(x-T) \equiv 0, \quad T \leqslant x \leqslant l,$$

где первообразную $\widehat{\psi^{*i}}(x)$ функции $\psi^{*i}(x)$ выберем так, чтобы она удовлетворяла равенству

$$\widehat{\psi^{*i}}(x_0) - \varphi^{*i}(x_0) + \varphi^i(x_0-T) = 0,$$

где $x_0 \in [T, l]$ – фиксированная точка.

Рассмотрим равенство (10) для $0 \leqslant x \leqslant T$:

$$2\mu^i(T-x) = \varphi^i(T-x) - \widehat{\psi^{*i}}(x) + \varphi^{*i}(x),$$

откуда для всех $0 \leqslant t \leqslant T$ найдём $\mu^i(t) = (\varphi^i(t) - \widehat{\psi^{*i}}(T-t) + \varphi^{*i}(T-t))/2$. Сложив (8) и (9), получим соотношение $\Phi^{i'}(x+T) = \psi^{*i}(x) + \varphi^{*i\prime}(x)$.

Рассмотрим случай, когда $l-T \leqslant x \leqslant l$. Воспользовавшись полученными в теореме 3 представлениями для функций Φ^i, имеем тождество

$$\widehat{\psi^{*i}}(x) + \varphi^{*i}(x) - 2g_0^i(T+x-l) + \varphi^i(2l-x-T) \equiv 0.$$

Если же $0 \leqslant x \leqslant l-T$, то $\widehat{\psi^{*i}}(x) + \varphi^{*i}(x) - \varphi^i(x+T) \equiv 0$. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства просвещения Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (проект QRPK-2023-0002).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // Успехи мат. наук. 2005. Т. 60. № 6 (366). С. 89–114.
2. *Ильин В.А.* Избранные труды: в 2-х т. М., 2008.
3. *Ильин В.А.* Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщённого решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 11. С. 1513–1528.
4. *Моисеев Е.И., Холомеева А.А., Фролов А.А.* Граничное управление смещением процессом колебаний при граничном условии типа торможения за время, меньшее критического // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. математика и её приложения. 2019. Т. 160. С. 74–84.
5. *Ильин В.А., Кулешов А.А.* Об эквивалентности двух определений обобщённого из класса Lp решения смешанной задачи для волнового уравнения // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 2014. Т. 284. С. 163–168.
6. *Моисеев Е.И., Холомеева А.А.* Оптимальное граничное управление смещением на одном конце струны при заданной упругой силе на другом конце // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 2. С. 151–158.
7. *Никитин А.А.* Граничное управление третьим краевым условием // Автоматика и телемеханика. 2007. № 2. С. 120–126.
8. *Егоров А.И., Знаменская Л.Н.* Об управляемости упругих колебаний последовательно соединённых объектов с распределёнными параметрами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 85–92.
9. *Егоров А.И., Знаменская Л.Н.* Наблюдаемость колебаний сети из связанных объектов с распределёнными и сосредоточенными параметрами в точке соединения // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. математика. Информатика. Процессы управления. 2011. № 1. С. 142–146.
10. *Боровских А.В.* Формулы граничного управления неоднородной струной // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 1. С. 64–89.
11. *Провоторов В.В.* Построение граничных управлений в задаче о гашении колебаний системы струн // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. математика. Информатика. Процессы управления. 2012. № 1. С. 62–71.
12. *Zvereva M.* A two-dimensional model of string deformations with a nonlinear boundary condition // J. of Nonlin. and Convex Anal. 2022. V. 23. № 12. P. 2775–2793.
13. *Kamenskii M., Liou Y.C., Wen Ch.-F., Zvereva M.* On a hyperbolic equation on a geometric graph with hysteresis type boundary conditions // Optimization: J. of Math. Program. and Oper. Res. 2020. V. 69. № 2. P. 283–304.
14. *Kunze M., Monteiro Marques M.* An introduction to Moreau's sweeping process // Lect. Notes in Phys. 2000. V. 551. P. 1–60.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 06.05.2023 г.
После доработки 06.05.2023 г.
Принята к публикации 20.07.2023 г.