ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 8, с. 1057–1069

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.223+517.575

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ

© 2023 г. В. В. Карачик

Определяется элементарное решение полигармонического уравнения, с помощью которого приводится явное представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в единичном шаре при всех размерностях пространства, за исключением некоторого конечного множества. На основе полученной функции Грина строится решение однородной задачи Дирихле в единичном шаре. В качестве примера найден явный вид решения однородной задачи Дирихле для неоднородного полигармонического уравнения при простейшей полиномиальной правой части.

DOI: 10.31857/S0374064123080058, EDN: IOCEKI

Введение. Явный вид функций Грина для разных краевых задач представлен во многих работах. Приведём только некоторые из них. Например, в двумерном случае в [1] на основании известной гармонической функции Грина представлены функции Грина различных бигармонических задач. Явный вид функции Грина для 3-й краевой задачи был найден в работах [2–4], а функции Грина в секторе для бигармонического и 3-гармонического уравнений – в работах [5, 6]. Статьи [7–9] посвящены построению функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в единичном шаре, а в работе [10] находятся решения задач Дирихле и Неймана для однородного полигармонического уравнения. В [11–13] приведён явный вид функций Грина для бигармонического и 3-гармонического уравнений в единичном шаре. В связи с бигармоническим уравнением отметим работы [14, 15], посвящённые условиям разрешимости некоторых нестандартных задач в шаре для бигармонического уравнения. В качестве наиболее общих результатов по обобщённой задаче Неймана, содержащей степени нормальных производных в граничных условиях, отметим статью [16].

В работе [17] на основании интегрального представления функций $u \in C^4(D)\bigcap C^3(\bar D)$ даются интегральные представления решений задач Навье [18] и Рикье–Неймана [19] для бигармонического уравнения в единичном шаре, а также строятся функции Грина этих задач. В статьях [20, 21] эти результаты используются для полигармонического уравнения. Функция Грина применяется также и для исследования нелокальных уравнений. Например, в работе [22] исследована разрешимость четырёх краевых задач для одного нелокального бигармонического уравнения с инволюцией. Отметим также работы [23–26], где построены функции Грина различных краевых задач . Применение функций Грина в задачах механики и физики можно найти в работах [27, 28].

Хорошо известно (см., например, [29, с. 50]), что функция Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона в шаре $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ при $n \geqslant 2$ имеет вид

$$G_2(x,\xi) = E(x,\xi) - E\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right), \tag{1}$$

где

$$E(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{n-2}|x-\xi|^{2-n}, & n > 2, \\ -\ln|x-\xi|, & n = 2, \end{cases} \tag{2}$$

– элементарное решение уравнения Лапласа. По аналогии с этим в работе [11] было определено элементарное решение

$$E_4(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2(n-2)(n-4)}|x-\xi|^{4-n}, & n>4, \quad n=3,\\ -\dfrac{1}{4}\ln|x-\xi|, & n=4,\\ \dfrac{|x-\xi|^2}{4}(\ln|x-\xi|-1), & n=2,\end{cases} \tag{3}$$

бигармонического уравнения и доказано, что при $n\geqslant 3$ функция вида

$$G_4(x,\xi)=E_4(x,\xi)-E_4\left(\frac{x}{|x|},|x|\xi\right)-\frac{|x|^2-1}{2}\frac{|\xi|^2-1}{2}E\left(\frac{x}{|x|},|x|\xi\right) \tag{4}$$

является функцией Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре S. Далее, в статье [13] была введена функция

$$E_6(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{|x-\xi|^{6-n}}{2\cdot 4(n-2)(n-4)(n-6)}, & n\geqslant 3, \quad n\neq 4,6,\\ -\dfrac{1}{64}\ln|x-\xi|, & n=6,\\ \dfrac{|x-\xi|^2}{32}\left(\ln|x-\xi|-\dfrac{3}{4}\right), & n=4,\\ -\dfrac{|x-\xi|^4}{64}\left(\ln|x-\xi|-\dfrac{3}{2}\right), & n=2,\end{cases} \tag{5}$$

которая, по аналогии с функциями $E(x,\xi)$ из (2) и $E_4(x,\xi)$ из (3), названа *элементарным решением* 3-гармонического уравнения. При $\xi\neq x$ справедливо равенство $\Delta_\xi E_6(x,\xi)=-E_4(x,\xi)$. Функция Грина в этом случае при $n\geqslant 3$ и $n\neq 4$ представлена в виде

$$G_6(x,\xi)=E_6(x,\xi)-E_6\left(\frac{x}{|x|},|x|\xi\right)-\frac{1}{2}\frac{|x|^2-1}{2}\frac{|\xi|^2-1}{2}E_4\left(\frac{x}{|x|},|x|\xi\right)-$$
$$-\frac{1}{4}\frac{(|x|^2-1)^2}{4}\frac{(|\xi|^2-1)^2}{4}E\left(\frac{x}{|x|},|x|\xi\right).$$

В настоящей работе исследуется представление решений однородной задачи Дирихле для полигармонического уравнения в единичном шаре $S=\{x\in\mathbb{R}^n: |x|<1\}$

$$\Delta^m u(x)=f(x), \quad x\in S, \tag{6}$$

$$u|_{\partial S}=0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|_{\partial S}=0, \quad \ldots, \quad \left.\frac{\partial^{m-1}u}{\partial\nu^{m-1}}\right|_{\partial S}=0. \tag{7}$$

В статье [7] показано, что функция Грина $G_{2m}(x,\xi)$ этой задачи имеет вид (формула Боджио)

$$G_{2m}(x,\xi)=k_m|x-\xi|^{2m-n}\int\limits_1^{g(x,\xi)}(t^2-1)^{m-1}t^{1-n}\,dt,$$

где

$$g(x,\xi)=\frac{1}{|x-\xi|}\left|\frac{x}{|x|}-|x|\xi\right|, \quad k_m=\frac{1}{\omega_n((2m-2)!)^2},$$

а в [30] построена функция $G_{2m}(x,\xi)$ в случае $n=2$. В работе [9] находится явное представление функции $G_{2m}(x,\xi)$ в зависимости от чётности n и положительности величины $2m-n$.

1. Элементарное решение. Пусть $m \in \mathbb{N}$. Тогда множество $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ можно разбить на два непересекающихся множества $\mathbb{N}_m = \{n \in \mathbb{N} : n > 2m > 1\} \bigcup (2\mathbb{N}+1)$ и дополнение к нему $\mathbb{N}_m^c = \{2, 4, \ldots, 2m\}$. Поскольку множество $\mathbb{N}_m^c$ конечное, то $\mathbb{N}_m$ бесконечное. Очевидно, что $\mathbb{N}_{m-1}^c \subset \mathbb{N}_m^c$, а поэтому $\mathbb{N}_m \subset \mathbb{N}_{m-1}$. Определим элементарное решение m-гармонического уравнения $\Delta^m u = 0$ в виде

$$E_{2m}(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^m |x-\xi|^{2m-n}}{(2-n,2)_m (2,2)_{m-1}}, & n \in \mathbb{N}_m, \\ \dfrac{(-1)^m |x-\xi|^{2m-n}}{(2-n,2)_m^* (2,2)_{m-1}} \left(\ln|x-\xi| - \displaystyle\sum_{k=1}^{m-n/2} \frac{1}{2k} - \sum_{k=n/2}^{m-1} \frac{1}{2k} \right), & n \in \mathbb{N}_m^c, \end{cases} \tag{8}$$

где $(a,b)_k = a(a+b)\cdots(a+kb-b)$ – обобщённый символ Похгаммера с соглашением $(a,b)_0 = 1$, а символ $(a,b)_k^*$ означает, что если среди сомножителей a, $(a+b)$, $\ldots$, $(a+kb-b)$, входящих в $(a,b)_k$, есть 0, то его следует заменить на 1, например, $(-2,2)_3^* = (-2)\cdot 1 \cdot 2 = -4$. Кроме того, если в суммах, входящих в (8), верхний индекс становится меньше нижнего, то сумма считается равной нулю.

Замечание 1. В работе [21] установлено, что функция $E_{2m}(x,\xi)$ совпадает с элементарными функциями из (2), (3) и (5) при $m=1$, $m=2$ и $m=3$ соответственно.

Замечание 2. Элементарная функция $E_{2m}(x,\xi)$ незначительно отличается от фундаментального решения полигармонического уравнения $G_{m,n}(x)$, рассматриваемого С.Л. Соболевым [31, с. 521]. При $n \in \mathbb{N}_m$ отличие в множителе $(-1)^m$, а при $n \in \mathbb{N}_m^c$ различие более заметно. Это связано со следующим ниже свойством функции $E_{2m}(x,\xi)$, которого у функций $G_{m,n}(x)$ при $n \in \mathbb{N}_m^c$ нет.

Введём обозначения

$$E_{2m}^*(x,\xi) = E_{2m}\left(\frac{x}{|x|} - |x|\xi\right), \quad h(x,\xi) = |x-\xi|^2, \quad h_*(x,\xi) = \left|\frac{x}{|x|} - |x|\xi\right|^2. \tag{9}$$

Очевидно, что $h(x,\xi)$ и $h_*(x,\xi)$ – многочлены второго порядка. Относительно функций $E_{2m}(x,\xi)$ и $E_{2m}^*(x,\xi)$ необходимы некоторые утверждения.

Лемма 1. *1. Симметричая функция $E_{2m}(x,\xi)$, определённая при $x \neq \xi$, удовлетворяет равенствам*

$$\Delta_x E_{2m}(x,\xi) = -E_{2(m-1)}(x,\xi), \quad \Delta_x E_2(x,\xi) = 0.$$

2. Симметричная функция $E_{2m}^*(x,\xi)$ при $x \in S$ и $\xi \in \bar{S}$ удовлетворяет равенствам

$$\Delta_x E_{2m}^*(x,\xi) = -|\xi|^2 E_{2m-2}^*(x,\xi), \quad \Delta_x E_2^*(x,\xi) = 0,$$

а значит, является m-гармонической по $x \in S$ при $\xi \in \bar{S}$.

Доказательство. Первая часть утверждения леммы доказана в [20, лемма 2.1]. Для доказательства второй части заметим, что $|x/|x| - |x|\xi| \geqslant |x/|x|| - |x||\xi| = 1 - |x||\xi| \geqslant 1 - |x| > 0$ при $x \in S$, $\xi \in \bar{S}$, и значит, функция $E_{2m}^*(x,\xi)$ определена и дифференцируема при заданных значениях x и ξ. Симметричность $E_{2m}^*(x,\xi)$ следует из равенства $|x/|x| - |x|\xi|^2 = 1 - 2x\xi + |x|^2|\xi|^2 = |\xi/|\xi| - |\xi|x|^2$. Далее нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f\left(-x|\xi| + \frac{\xi}{|\xi|}\right) = -|\xi| f_i\left(-x|\xi| + \frac{\xi}{|\xi|}\right),$$

где $f_i(x)$ – производная функции $f(x)$ по i-й переменной. При $f(x) = |x|^{2m-n}(c_1 \ln|x| + c_2)$ производная $f_i(x)$ существует, если $|x| > 0$. В нашем случае $|x/|x| - |x|\xi| > 0$, а значит, производные любого порядка функции $f(x)$ существуют. Поэтому в силу первого утверждения леммы

$$\Delta E_{2m}^*(x,\xi) = \Delta(E_{2m}(-x|\xi| + \xi/|\xi|)) = (-|\xi|)^2 \Delta(E_{2m}(-x|\xi| + \xi/|\xi|)) = -|\xi|^2 E_{2m-2}^*(x,\xi).$$

Отсюда также следует, что $\Delta_x E_2^*(x,\xi)=0.$ Второе утверждение леммы доказано.

Исследуем произведение полигармонических функций. Известно, что произведение гармонических функций может быть как гармонической функцией, так и функцией, которая не m-гармоническая ни при каком $m\in\mathbb{N}$, например, uv и u^2 при $u(x_1,x_2)=e^{x_1}\cos x_2$, $v(x_1,x_2)=e^{x_1}\sin x_2$. Кроме того, по известной формуле Альманси функция $|x|^{2m-2}u(x)$ является m-гармонической функцией, если $u(x)$ – гармоническая. Введём оператор

$$\Lambda u(x)=\sum_{i=1}^n x_i u_{x_i}, \tag{10}$$

для которого верно равенство $\Delta\Lambda u=(\Lambda+2)\Delta u.$ Из этого равенства следует, что $\Delta^m\Lambda u= =(\Lambda+2m)\Delta^m u,$ а поэтому, если функция $u(x)$ является m-гармонической, функция Λu тоже m-гармоническая, хотя в её представлении есть слагаемые вида $x_iu_{x_i}.$

Для следующего результата необходима небольшая модификация метода математической индукции:

Утверждение. *Пусть даны утверждения $A_{n,m}$ при $n,m\in\mathbb{N}$ и для них выполнены следующие условия:*

1) утверждения $A_{n,1}$ и $A_{1,m}$ верны при $n,m\in\mathbb{N}$;

2) из справедливости утверждений $A_{n-1,m}$ и $A_{n,m-1},$ индекс которых принадлежит $\mathbb{N}^2$, следует справедливость $A_{n,m}.$

Тогда утверждения $A_{n,m}$ верны при всех $n,m\in\mathbb{N}.$

Доказательство. Пусть при выполненных условиях 1) и 2) найдутся утверждения $A_{n,m}$, которые не верны. Выберем среди них такое $A_{n^*,m^*},$ у которого сумма индексов n^*+m^* наименьшая. По условию 1) для A_{n^*,m^*} не может быть ни $n^*=1,$ ни $m^*=1.$ Тогда по условию 2) не должно быть выполнено либо утверждение $A_{n^*-1,m^*},$ либо утверждение $A_{n^*,m^*-1}.$ Для этих утверждений сумма индексов равна $n^*+m^*-1,$ чего не может быть по выбору утверждения $A_{n^*,m^*}.$ Значит все утверждения $A_{n,m}$ верны. Утверждение доказано.

Лемма 2. *Пусть $k_1,k_2\in\mathbb{N}_0,$ $k_3\in\mathbb{N}$ и $k=k_1+k_2+k_3.$ Тогда функция*

$$h^{k_1}(x,\xi)h_*^{k_2}(x,\xi)E_{2k_3}^*(x,\xi)$$

является k-гармонической по $x\in S$ при $\xi\in\bar S.$

Доказательство. 1°. Докажем, что функция $F_{k_2,k_3}(x,\xi)\equiv h_*^{k_2}(x,\xi)E_{2k_3}^*(x,\xi)$ при $k_2\in \in\mathbb{N}_0,$ $k_3\in\mathbb{N}$ является (k_2+k_3)-гармонической по $x\in S.$ Пусть сначала $n\in\mathbb{N}_{k_2+k_3}.$ Нетрудно видеть, что в этом случае $n\in\mathbb{N}_{k_3},$ и тогда из (8) получим

$$F_{k_2,k_3}(x,\xi)=C_{k_3}h_*^{k_3-n/2+k_2}(x,\xi)=\frac{C_{k_3}}{C_{k_2+k_3}}E_{2k_2+2k_3}^*(x,\xi),$$

где C_{k_3} – числовой коэффициент при $|x-\xi|^{2k_3-n}$ в $E_{2k_3},$ когда $n\in\mathbb{N}_{k_3}.$ Поэтому, в силу леммы 1, функция $F_{k_2,k_3}(x,\xi)$ является (k_2+k_3)-гармонической по $x\in S.$ Если же $n\in \in\mathbb{N}_{k_2+k_3}^c,$ но $n\in\mathbb{N}_{k_3},$ то найдётся натуральное s такое, что $k_3+1\leqslant s\leqslant k_2+k_3$ и $2s=n.$ В этом случае

$$F_{k_2,k_3}(x,\xi)=C_{k_3}h_*^{k_3+k_2-s}(x,\xi).$$

Далее нетрудно подсчитать, что

$$\Delta\left|\frac{x}{|x|}-|x|\xi\right|^{\alpha}=\alpha(\alpha+n-2)|\xi|^2\left|\frac{x}{|x|}-|x|\xi\right|^{\alpha-2}, \tag{11}$$

и поскольку $1\leqslant k_3+k_2-s+1\leqslant k_2,$ то полином $F_{k_2,k_3}(x,\xi)$ будет (k_2+1)-гармоническим по $x\in S.$ Так как $k_2+1\leqslant k_2+k_3,$ то утверждаемое верно.

Пусть теперь $n \in \mathbb{N}^c_{k_3}$. Тогда найдётся натуральное $s \leqslant k_3$ такое, что $2s = n$, а поэтому полином $h_*^{k_3-s}(x,\xi)$, аналогично предыдущему случаю, является $(k_3 - s + 1)$-гармоническим. Из формулы (8) найдём

$$E^*_{2k_3}(x,\xi) = C_{k_3} h_*^{k_3-s}(x,\xi) \ln |x/|x| - |x|\xi| - C_{k_3} L_{k_3} h_*^{k_3-s}(x,\xi),$$

где C_{k_3} – числовой множитель при $|x-\xi|^{2k_3-n}$, а L_{k_3} – числовое слагаемое при логарифме в E_{2k_3}, когда $n \in \mathbb{N}^c_{k_3}$. Поэтому

$$F_{k_2,k_3}(x,\xi) = C_{k_3} h_*^{k_3+k_2-s}(x,\xi) \ln |x/|x| - |x|\xi| - C_{k_3} L_{k_3} h_*^{k_3+k_2-s}(x,\xi).$$

Так как $n \in \mathbb{N}^c_{k_2+k_3}$, то из (8) следует

$$h_*^{k_2+k_3-s}(x,\xi) \ln |x/|x| - |x|\xi| = C^{-1}_{k_2+k_3} E^*_{2k_2+2k_3}(x,\xi) + L_{k_2+k_3} h_*^{k_2+k_3-s}(x,\xi)$$

и, значит,

$$F_{k_2,k_3}(x,\xi) = C_{k_3} C^{-1}_{k_2+k_3} E^*_{2k_2+2k_3}(x,\xi) + C_{k_3}(L_{k_2+k_3} - L_{k_3}) h_*^{k_2+k_3-s}(x,\xi).$$

Первое слагаемое в полученном равенстве согласно лемме 1 является (k_2+k_3)-гармонической функцией по $x \in S$, а второе слагаемое – (k_2+k_3-s+1)-гармоническим полиномом. Так как $s \geqslant 1$, то утверждение 1° выполнено.

2°. Теперь докажем, что функция $G_{k_1,k_2'}(x,\xi) = h^{k_1}(x,\xi) F_{k_2'}(x,\xi)$, где $F_{k_2'}(x,\xi)$ – произвольная k_2'-гармоническая функция по $x \in S$ и $k_1 \in \mathbb{N}_0$, $k_2' \in \mathbb{N}$, является (k_1+k_2')-гармонической по $x \in S$. Доказательство проведём методом индукции, сформулированном выше в утверждении, по двум индексам $k_1 \in \mathbb{N}_0$ и $k_2' \in \mathbb{N}$.

1. Если $k_1 = 0$, то $G_{0,k_2'}(x,\xi) = F_{k_2'}(x,\xi)$, и значит, $G_{0,k_2'}(x,\xi)$ является k_2'-гармонической по условию. Если $k_2' = 1$, то $G_{k_1,1}(x,\xi) = h^{k_1}(x,\xi) F_1(x,\xi)$, и поскольку $h(x,\xi) = |x-\xi|^2$, то согласно формуле Альманси функция $G_{k_1,1}(x,\xi)$ является (k_1+1)-гармонической.

2. Предположим, что функции вида $h^{k_1-1}(x,\xi) F_{k_2'}(x,\xi)$ и $h^{k_1}(x,\xi) F_{k_2'-1}(x,\xi)$ являются $(k_1+k_2'-1)$-гармоническими по $x \in S$. Так как ввиду (9)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} h^{k_1}(x,\xi) = 2k_1(x_i - \xi_i) h^{k_1-1}(x,\xi),$$

то, использовав оператор Λ из (10), получим

$$\Delta_x G_{k_1,k_2'}(x,\xi) = F_{k_2'}(x,\xi) \Delta_x h^{k_1}(x,\xi) + 4k_1 h^{k_1-1}(x,\xi) \sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i) \frac{\partial F_{k_2'}(x,\xi)}{\partial x_i} +$$

$$+ h^{k_1}(x,\xi) \Delta_x F_{k_2'}(x,\xi) = 2k_1(2k_1+n-2) h^{k_1-1}(x,\xi) F_{k_2'}(x,\xi) +$$

$$+ 4k_1 h^{k_1-1}(x,\xi)(\Lambda_x F_{k_2'}(x,\xi) - \xi \cdot \nabla_x F_{k_2'}(x,\xi)) + h^{k_1}(x,\xi) \Delta_x F_{k_2'}(x,\xi). \tag{12}$$

В последнем равенстве было использовано тождество, аналогичное (11):

$$\Delta_x h^{k_1}(x,\xi) = 2k_1(2k_1+n-2) h^{k_1-1}(x,\xi).$$

По предположению индукции и свойству оператора Λ каждое слагаемое в правой части (12) является $(k_1+k_2'-1)$-гармонической функцией по $x \in S$. Поэтому функция $G_{k_1,k_2'}(x,\xi)$ будет (k_1+k_2')-гармонической по $x \in S$. Теперь выберем $F_{k_2'}(x,\xi) = F_{k_2,k_3}(x,\xi)$, где $k_2' = k_2 + k_3$. Это возможно, поскольку, во-первых, по лемме 1 функция $F_1(x,\xi) = F_{0,1}(x,\xi) = E^*_2(x,\xi)$ гармоническая по $x \in S$, а во-вторых, по утверждению 1° леммы функция $F_{k_2,k_3}(x,\xi)$ является k_2'-гармонической по $x \in S$, когда $\xi \in \bar{S}$. Лемма доказана.

2. Функция Грина. Исследуем случай, когда $n \in \mathbb{N}_{m-1}$, т.е. для почти всех n, за исключением конечного множества $\mathbb{N}^c_{m-1}$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Функция Грина $G_{2m}(x,\xi)$ задачи Дирихле (6), (7) при $n \in \mathbb{N}_{m-1}$ может быть записана в виде суммы элементарного решения $E_{2m}(x,\xi)$ и m-гармонической функции*

$$G_{2m}(x,\xi) = E_{2m}(x,\xi) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(|x|^2-1)^k(|\xi|^2-1)^k}{(2m-2,-2)_k(2,2)_k} E_{2m-2k}\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right). \tag{13}$$

Функция $G_{2m}(x,\xi)$ является m-гармонической по $x \in S$, $x \neq \xi \in \bar{S}$, и удовлетворяет равенствам

$$G_{2m}(x,\xi)|_{x\in\partial S} = 0, \quad \frac{\partial G_{2m}(x,\xi)}{\partial \nu}\bigg|_{x\in\partial S} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{m-1} G_{2m}(x,\xi)}{\partial \nu^{m-1}}\bigg|_{x\in\partial S} = 0, \quad \xi \in S. \tag{14}$$

Доказательство. 1. Нетрудно видеть, что при $m=1$ из (13), учитывая обозначения (9), равенство $E(x,\xi) = E_2(x,\xi)$ и условие $(a,b)_0 = 1$, следует формула (1), а при $m=2$ из (13) получаем

$$G_4(x,\xi) = E_4(x,\xi) - E_4^*(x,\xi) - \frac{(|x|^2-1)(|\xi|^2-1)}{2\cdot 2} E_2^*(x,\xi),$$

что совпадает с (4) при $n \geqslant 3$. Если же $m=3$, то (13) даёт

$$G_6(x,\xi) = E_6(x,\xi) - E_6^*(x,\xi) - \frac{(|x|^2-1)(|\xi|^2-1)}{4\cdot 2} E_4^*(x,\xi) - \frac{(|x|^2-1)^2(|\xi|^2-1)^2}{8\cdot 8} E_2^*(x,\xi),$$

что соответствует функции $G_6(x,\xi)$.

2. Проверим m-гармоничность функции $G_{2m}(x,\xi)$ из (13) по $x \in S$, $x \neq \xi \in \bar{S}$. Для этого заметим, что в соответствии с обозначениями (9) верны равенства

$$h_*(x,\xi) - h(x,\xi) = 1 - 2x\cdot\xi + |x|^2|\xi|^2 - |x|^2 + 2x\cdot\xi - |\xi|^2 = (|x|^2-1)(|\xi|^2-1),$$

а поэтому формулу (13) можно записать в виде

$$G_{2m}(x,\xi) = E_{2m}(x,\xi) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(h_*(x,\xi)-h(x,\xi))^k}{(2m-2,-2)_k(2,2)_k} E^*_{2m-2k}(x,\xi). \tag{15}$$

В силу леммы 1 достаточно проверить m-гармоничность функций под знаком суммы в (15), но это сразу следует из леммы 2.

3. Теперь проверим выполнение граничных условий (14). Внешняя единичная нормальная производная к сфере радиуса $|x|<1$ от функции $G_{2m}(x,\xi)$ равна

$$\frac{\partial G_{2m}(x,\xi)}{\partial \nu_x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{|x|}\frac{\partial G_{2m}(x,\xi)}{\partial x_i} = \frac{1}{|x|}\Lambda_x G_{2m}(x,\xi),$$

поэтому

$$\frac{\partial^2 G_{2m}(x,\xi)}{\partial \nu_x^2} = \left(\frac{1}{|x|}\Lambda_x \frac{1}{|x|}\Lambda_x\right) G_{2m}(x,\xi) = \frac{1}{|x|^2}\Lambda_x(-1+\Lambda_x)G_{2m}(x,\xi).$$

Значит, используя обозначение $\Lambda^{[k]} = \Lambda(\Lambda-1)\cdots(\Lambda-k+1)$, можно записать

$$\frac{\partial^k G_{2m}(x,\xi)}{\partial \nu_x^k} = \left(\frac{1}{|x|}\Lambda_x\right)^k G_{2m}(x,\xi) =$$

$$= \frac{1}{|x|^k}\Lambda_x(\Lambda_x-1)\cdots(\Lambda_x-k+1)G_{2m}(x,\xi) = \frac{1}{|x|^k}\Lambda_x^{[k]} G_{2m}(x,\xi). \tag{16}$$

Таким образом, для выполнения граничных условий (14) нужно доказать справедливость равенств

$$G_{2m}(x,\xi)|_{x\in\partial S}=0,\quad \Lambda_x G_{2m}(x,\xi)|_{x\in\partial S}=0,\quad \ldots,\quad \Lambda_x^{[m-1]}G_{2m}(x,\xi)|_{x\in\partial S}=0.$$

Нетрудно видеть, что эти равенства эквивалентны следующим:

$$G_{2m}(x,\xi)|_{x\in\partial S}=0,\quad \Lambda_x G_{2m}(x,\xi)|_{x\in\partial S}=0,\quad \ldots,\quad \Lambda_x^{m-1}G_{2m}(x,\xi)|_{x\in\partial S}=0. \tag{17}$$

Докажем, что они верны, а значит, выполняются и граничные условия (14). Если в (15) положить $x\in\partial S,$ т.е. $|x|=1,$ то при $\xi\in S,$ учитывая, что $E_{2m}(x,\xi)=E^*_{2m}(x,\xi)$ и $h(x,\xi)=$ $=h_*(x,\xi)$ на $\partial S,$ получаем

$$G_{2m}(x,\xi)|_{x\in\partial S}=E_{2m}(x,\xi)|_{x\in\partial S}-\frac{E_{2m}(x,\xi)}{(2m-2,-2)_0(2,2)_0}\bigg|_{x\in\partial S}=0 \tag{18}$$

для любого $m\geqslant 1.$

Исследуем другие граничные условия из (17). Верно равенство

$$\Lambda_x G_{2m}(x,\xi)=\Lambda_x E_{2m}(x,\xi)-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(h_*(x,\xi)-h(x,\xi))^k}{(2m-2,-2)_k(2,2)_k}\Lambda_x E^*_{2m-2k}(x,\xi)-$$
$$-\sum_{k=1}^{m-1}k\Lambda_x(h_*(x,\xi)-h(x,\xi))\frac{(h_*(x,\xi)-h(x,\xi))^{k-1}}{(2m-2,-2)_k(2,2)_k}E^*_{2m-2k}(x,\xi). \tag{19}$$

Рассмотрим последний член в первой сумме в (19), имеющий вид

$$\varepsilon_{m-2}(x)\equiv\frac{(h_*(x,\xi)-h(x,\xi))^{m-1}}{(2m-2,-2)_{m-1}(2,2)_{m-1}}\Lambda_x E^*_2(x,\xi).$$

По лемме 2 эта функция m-гармоническая в $S.$ Поскольку $h_*(x,\xi)=h(x,\xi)$ при $x\in\partial S,$ то после применения к функции $\varepsilon_{m-2}(x)$ операторов $\Lambda_x^k,$ $k=\overline{0,m-2},$ пределы при $x\to\partial S$ всех полученных при этом функций обратятся в нуль. Нижний индекс у $\varepsilon_{m-2}(x)$ указывает на максимальный порядок оператора $\Lambda_x,$ при котором это свойство выполнено. Поэтому в дальнейшем изложении все функции, обладающие таким свойством, будем обозначать как $\varepsilon_{m-2}(x).$ Эти функции на выполнение граничных условий (17) не влияют. Кроме того, заметим, что при $n\in\mathbb{N}_m,$ в соответствии с (8), верны равенства

$$\Lambda_x E_{2m}(x,\xi)=\Lambda_x\frac{(-1)^m|x-\xi|^{2m-n}}{(2-n,2)_m(2,2)_{m-1}}=\frac{(-1)^m}{(2-n,2)_m(2,2)_{m-1}}\Lambda_x h^{m-n/2}(x,\xi)=$$
$$=(m-n/2)\frac{-E_{2m-2}(x,\xi)}{(2m-n)(2m-2)}\Lambda_x h(x,\xi)=-\frac{\Lambda_x h(x,\xi)}{2(2m-2)}E_{2m-2}(x,\xi).$$

Если же $n=2m,$ то опять, в соответствии с (8), имеем

$$\Lambda_x E_{2m}(x,\xi)=\Lambda_x\frac{(-1)^m\ln|x-\xi|}{(2-2m,2)^*_m(2,2)_{m-1}}=\frac{(-1)^m}{(-1)^{m-1}(2,2)_{m-1}(2,2)_{m-1}}\frac{1}{2}\Lambda_x\ln h(x,\xi)=$$
$$=\frac{-E_{2m-2}(x,\xi)}{2(2m-2)}\Lambda_x h(x,\xi)=-\frac{\Lambda_x h(x,\xi)}{2(2m-2)}E_{2m-2}(x,\xi).$$

Аналогично проделанным вычислениям нетрудно получить для $n\in\mathbb{N}_{m-1}$

$$\Lambda_x E^*_{2m}(x,\xi)=-\frac{\Lambda_x h_*(x,\xi)}{2(2m-2)}E^*_{2m-2}(x,\xi).$$

Исходя из сказанного, равенство (19) запишем в виде

$$\Lambda_x G_{2m}(x,\xi) = -\frac{\Lambda_x h(x,\xi)}{2(2m-2)} E_{2m-2}(x,\xi) +$$

$$+\sum_{k=0}^{m-2} \frac{(h_*(x,\xi)-h(x,\xi))^k}{(2m-2,-2)_k(2,2)_k} \frac{\Lambda_x h_*(x,\xi)}{2(2m-2k-2)} E^*_{2m-2k-2}(x,\xi) + \varepsilon_{m-2}(x) -$$

$$-\sum_{k=0}^{m-2}(k+1)\Lambda_x(h_*(x,\xi)-h(x,\xi)) \frac{(h_*(x,\xi)-h(x,\xi))^k}{(2m-2,-2)_{k+1}(2,2)_{k+1}} E^*_{2m-2k-2}(x,\xi). \tag{20}$$

Заметим, что в последней сумме была сделана замена индекса $k \to k+1$. Объединив две последние суммы, имеющие одинаковые верхние и нижние индексы, в одну сумму

$$\sum_{k=0}^{m-2} \frac{(h_*(x,\xi)-h(x,\xi))^k}{(2m-2,-2)_k(2,2)_k} E^*_{2m-2k-2}(x,\xi) \left(\frac{\Lambda_x h_*(x,\xi)}{2(2m-2k-2)} - \frac{(k+1)\Lambda_x(h_*(x,\xi)-h(x,\xi))}{(2m-2k-2)(2k+2)} \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-2} \frac{(h_*(x,\xi)-h(x,\xi))^k}{(2m-2,-2)_k(2,2)_k} \frac{\Lambda_x h(x,\xi)}{2(2m-2k-2)} E^*_{2m-2k-2}(x,\xi),$$

а затем использовав равенство

$$(2m-2,-2)_{k+1} = (2m-2,-2)_k(2m-2k-2) = (2m-2)(2m-4,-2)_k,$$

запишем

$$\frac{\Lambda_x h(x,\xi)}{2(2m-2)} \sum_{k=0}^{m-2} \frac{(h_*(x,\xi)-h(x,\xi))^k}{(2m-4,-2)_k(2,2)_k} E^*_{2m-2k-2}(x,\xi).$$

Таким образом, (20) преобразуется к виду

$$\Lambda_x G_{2m}(x,\xi) = -\frac{\Lambda_x h(x,\xi)}{2(2m-2)} E_{2m-2}(x,\xi) +$$

$$+\frac{\Lambda_x h(x,\xi)}{2(2m-2)} \sum_{k=0}^{(m-1)-1} \frac{(h_*(x,\xi)-h(x,\xi))^k}{(2(m-1)-2,-2)_k(2,2)_k} E^*_{2(m-1)-2k}(x,\xi) + \varepsilon_{m-2}(x),$$

откуда получаем

$$\Lambda_x G_{2m}(x,\xi) = -\frac{\Lambda_x h(x,\xi)}{4(m-1)} G_{2m-2}(x,\xi) + \varepsilon_{m-2}(x). \tag{21}$$

Отсюда сразу следует, что

$$\Lambda_x^2 G_{2m}(x,\xi) = -\frac{\Lambda_x^2 h(x,\xi)}{4(m-1)} G_{2m-2}(x,\xi) - \frac{\Lambda_x h(x,\xi)}{4(m-1)} \Lambda_x G_{2m-2}(x,\xi) + \Lambda_x \varepsilon_{m-2}(x).$$

В силу равенства (21), взятого при $m = m-1$, и с учётом равенств

$$\Lambda_x \varepsilon_{m-2}(x) = \varepsilon_{m-3}(x), \quad -\frac{\Lambda_x h(x,\xi)}{4(m-1)} \varepsilon_{m-3}(x) = \varepsilon_{m-3}(x),$$

а также $\varepsilon_{m-3}(x) + \varepsilon_{m-3}(x) = \varepsilon_{m-3}(x)$, можем записать

$$\Lambda_x^2 G_{2m}(x,\xi) = -\frac{\Lambda_x^2 h(x,\xi)}{4(m-1)} G_{2m-2}(x,\xi) + \frac{(\Lambda_x h(x,\xi))^2}{4^2(m-1)(m-2)} G_{2m-4}(x,\xi) + \varepsilon_{m-3}(x).$$

Основываясь на этом соотношении и учитывая (21), предположим, что при некотором $1 < k < m-1$ верно равенство

$$\Lambda_x^{k-1} G_{2m}(x,\xi) = \sum_{i=1}^{k-1} g_{2i}^{(k-1)}(x,\xi) G_{2m-2i}(x,\xi) + \varepsilon_{m-k}(x),$$

где $g_{2i}^{(k)}(x,\xi)$ – некоторые полиномы степени $2i$ от x. Например,

$$g_2^{(1)}(x,\xi) = -\frac{\Lambda_x h(x,\xi)}{4(m-1)}, \quad g_2^{(2)}(x,\xi) = -\frac{\Lambda_x^2 h(x,\xi)}{4(m-1)}, \quad g_4^{(2)}(x,\xi) = \frac{(\Lambda_x h(x,\xi))^2}{16(m-1)(m-2)}.$$

Используя (21) при $m = m - i$, запишем

$$\Lambda_x^k G_{2m}(x,\xi) = \sum_{i=1}^{k-1} \Lambda_x g_{2i}^{(k-1)}(x,\xi) G_{2m-2i}(x,\xi) - \sum_{i=1}^{k-1} g_{2i}^{(k-1)}(x,\xi) \frac{\Lambda_x h(x,\xi)}{4(m-i-1)} \times$$

$$\times G_{2m-2i-2}(x,\xi) + \sum_{i=1}^{k-1} g_{2i}^{(k-1)}(x,\xi) \varepsilon_{m-i-2}(x) + \Lambda_x \varepsilon_{m-k}(x).$$

Отсюда, поскольку

$$\sum_{i=1}^{k-1} g_{2i}^{(k-1)}(x,\xi) \frac{\Lambda_x h(x,\xi)}{4(m-i-1)} G_{2m-2i-2}(x,\xi) = \sum_{i=2}^{k} g_{2i-2}^{(k-1)}(x,\xi) \frac{\Lambda_x h(x,\xi)}{4(m-i)} G_{2m-2i}(x,\xi),$$

получим равенство

$$\Lambda_x^k G_{2m}(x,\xi) = \sum_{i=1}^{k} \left(\Lambda_x g_{2i}^{(k-1)}(x,\xi) - g_{2i-2}^{(k-1)}(x,\xi) \frac{\Lambda_x h(x,\xi)}{4(m-i)} \right) G_{2m-2i}(x,\xi) + \varepsilon_{m-k-1}(x),$$

где следует считать, что $g_{2i}^{(k)} = 0$ при $i = 0$ или $i > k$. Кроме того, здесь было учтено, что

$$\sum_{i=1}^{k-1} g_{2i}^{(k-1)}(x,\xi) \varepsilon_{m-i-2}(x) + \Lambda_x \varepsilon_{m-k}(x) = \varepsilon_{m-k-1}(x),$$

так как наименьший индекс у функций $\varepsilon_k(x)$ под знаком суммы равен $m-k-1$. Очевидно, что в предыдущем равенстве функция

$$g_{2i}^{(k)}(x,\xi) = \Lambda_x g_{2i}^{(k-1)}(x,\xi) - g_{2i-2}^{(k-1)}(x,\xi) \frac{\Lambda_x h(x,\xi)}{4(m-i)}$$

является полиномом степени $2i$ по x, так как $\deg g_{2i}^{(k)}(x,\xi) = 2i$ при $k = 1, 2$. Таким образом, при $1 \leqslant k \leqslant m-1$ справедлива формула

$$\Lambda_x^k G_{2m}(x,\xi) = \sum_{i=1}^{k} g_{2i}^{(k)}(x,\xi) G_{2m-2i}(x,\xi) + \varepsilon_{m-k-1}(x).$$

Если здесь воспользоваться равенством (18), то с учётом определения функций $\varepsilon_k(x)$ будем иметь

$$\Lambda_x^k G_{2m}(x,\xi)|_{x\in\partial S} = \sum_{i=1}^{k} g_{2i}^{(k)}(x,\xi) G_{2m-2i}(x,\xi)|_{x\in\partial S} + \varepsilon_{m-k-1}(x)|_{x\in\partial S} = 0$$

для $k = \overline{0, m-1}$. Это означает выполнение граничных условий (17) и, следовательно, (14). Теорема доказана.

Замечание 3. Если $n \in \mathbb{N}^c_{m-1}$, то функция Грина $G_{2m}(x,\xi)$ задачи Дирихле может иметь вид, несколько отличный от вида функции, полученной в теореме 1. Например, при $n = 4$ и $m = 3$ имеем $4 \in \mathbb{N}^c_2$. Для этого случая в работе [13, теорема 2] было получено представление

$$G_6(x,\xi) = E_6(x,\xi) - E_6^*(x,\xi) - \frac{(|x|^2-1)(|\xi|^2-1)}{8}\left(E_4^*(x,\xi) + \frac{1}{16}\right) - \frac{(|x|^2-1)^2(|\xi|^2-1)^2}{64}E_2^*(x,\xi).$$

Если же $n = 2$ и $m = 2$, а поэтому $2 \in \mathbb{N}^c_1$, то в соответствии с [11, теорема 2.3] имеем

$$G_4(x,\xi) = E_4(x,\xi) - E_4^*(x,\xi) - \frac{(|x|^2-1)(|\xi|^2-1)}{4}\left(E_2^*(x,\xi) + \frac{1}{2}\right).$$

3. Решение однородной задачи Дирихле. В качестве продолжения исследований по построению решений задачи Дирихле для полигармонического уравнения из работы [10] приведём следующее утверждение, вытекающее из теоремы 1.

Теорема 2. *Решение однородной задачи Дирихле (6), (7) для полигармонического уравнения в единичном шаре S при $f \in C^1(\bar S)$ и $n \in \mathbb{N}_{m-1}$ можно представить в виде*

$$u(x) = \frac{(-1)^m}{\omega_n}\int\limits_S G_{2m}(x,\xi)f(\xi)\,d\xi, \tag{22}$$

где ω_n – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Вычислим значение оператора Δ^{m-1} от функции, задаваемой равенством (22). Для этого заметим, что интегралы типа потенциала $\int_S \rho(\xi)|x-\xi|^{-\alpha}\,d\xi$ являются функциями класса $C^p(\mathbb{R}^n)$ при ограниченной и интегрируемой функции $\rho(x)$, и дифференцирование порядка $p \in \mathbb{N}_0$ возможно под знаком интеграла при всяком p таком, что $\alpha + p < n$ [32, с. 25]. В нашем случае для сингулярного слагаемого функции $G_{2m}(x,\xi)$ из (13) имеем $\alpha = n - 2m + 1$ при $n \in \mathbb{N}_{m-1}$, а значит, для интеграла

$$u_1(x) = \frac{(-1)^m}{\omega_n}\int\limits_S E_{2m}(x,\xi)f(\xi)\,d\xi$$

$p = 2m-2$ и поэтому $u_1 \in C^{2m-2}(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, оператор Δ^{m-1} можно внести под знак интеграла. В силу леммы 1 функция $E_{2m}(x,\xi)$ обладает следующим свойством: $\Delta_x E_{2m}(x,\xi) = -E_{2(m-1)}(x,\xi)$. Отсюда при $x \in S$ имеем равенства

$$\Delta^{m-1}u_1(x) = \frac{(-1)^m}{\omega_n}\int\limits_S \Delta_x^{m-1}E_{2m}(x,\xi)f(\xi)\,d\xi = -\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S E_2(x,\xi)f(\xi)\,d\xi,$$

и по свойству объёмного потенциала получим

$$\Delta^m u_1(x) = \Delta\left(-\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S E_2(x,\xi)f(\xi)\,d\xi\right) = f(x), \quad x \in S.$$

Условия $f \in C^1(\bar S)$ достаточно для выполнения в S равенства $\Delta(\Delta^{m-1}u_1(x)) = f(x)$ [29]. В лемме 2, с учётом обозначения $(|x|^2-1)(|\xi|^2-1) = h_*(x,\xi) - h(x,\xi)$ из теоремы 1, было доказано, что функция вида

$$\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(|x|^2-1)^k(|\xi|^2-1)^k}{(2m-2,-2)_k(2,2)_k}E^*_{2m-2k}(x,\xi) = \sum_{k=0}^{m-1}\frac{(h_*(x,\xi)-h(x,\xi))^k}{(2m-2,-2)_k(2,2)_k}E^*_{2m-2k}(x,\xi)$$

является m-гармонической по x в S при любом $\xi \in \bar{S}$ и её можно дифференцировать по x под знаком интеграла по ξ любое число раз. Обозначим интеграл по $\xi \in S$ от этой функции, умноженной на $(-1)^m/\omega_n f(\xi)$, через $u_2(x)$. Тогда будем иметь

$$\Delta^m u_2(x) = \frac{(-1)^m}{\omega_n} \sum_{k=0}^{m-1} \int\limits_S \Delta_x^m \frac{(|x|^2-1)^k(|\xi|^2-1)^k}{(2m-2,-2)_k(2,2)_k} E^*_{2m-2k}(x,\xi) f(\xi)\, d\xi = 0.$$

Поэтому, учитывая (13), функция $u(x)$ из (22) удовлетворяет уравнению (6):

$$\Delta^m u(x) = \Delta^m u_1(x) - \Delta^m u_2(x) = f(x), \quad x \in S.$$

В силу того, что для функции $u(x)$ из (21) в итоге имеем включение $u \in C^{2m-2}(\bar{S})$, предельный переход $x \to \partial S$ для функций $\Lambda_x^{[k]} u(x)$ можно внести под знак интеграла. С помощью (17) и (16) найдём

$$\frac{\partial^k u}{\partial \nu^k}\bigg|_{\partial S} = \frac{(-1)^m}{\omega_n} \int\limits_S \Lambda_x^{[k]} G_{2m}(x,\xi)|_{x\in\partial S} f(\xi)\, d\xi = 0, \quad k = \overline{0, m-1},$$

а значит, функция $u(x)$ из (22) удовлетворяет всем граничным условиям (7). Теорема доказана.

Рассмотрим частный случай простейшей полиномиальной правой части уравнения (6).

Теорема 3. *Пусть в уравнении (6) $f(x) = |x|^{2l} H_k(x)$, где $H_k(x)$ – однородный гармонический полином степени $k \in \mathbb{N}_0$, $l \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}_{m-1}$. Тогда решение задачи Дирихле (6), (7) имеет вид*

$$u(x) = \frac{(-1)^m}{\omega_n} \int\limits_{|\xi|<1} G_{2m}(x,\xi)|x|^{2l} H_k(\xi)\, d\xi =$$

$$= \left(|x|^{2l+2m} - \sum_{i=0}^{m-1} \binom{l+m}{i} (|x|^2-1)^i\right) \frac{H_k(x)}{(2l+2,2)_m (2l+2k+n,2)_m}, \tag{23}$$

где $(a,b)_m$ – обобщённый символ Похгаммера, определённый в (8).

Доказательство. Пусть $m=3$. В [13, следствие 2] было установлено, что решение задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения при $f(x) = |x|^{2l} H_m(x)$ можно записать как

$$u(x) = \frac{|x|^{2l+6} - 1 - (l+3)(|x|^2-1) - (l+2)(l+3)(|x|^2-1)^2/2}{(2l+2,2)_3(2l+2k+n,2)_3} H_k(x).$$

В силу единственности решения задачи Дирихле [33, с. 39] и равенства (22) без труда получаем формулу (23) при $m=3$. Равенство (23) обобщает эту формулу на произвольное $m \in \mathbb{N}$. Проверим, что функция $u(x)$, задаваемая правой частью (23), является решением однородной задачи Дирихле с правой частью $f(x) = |x|^{2l} H_k(x)$. Нетрудно видеть, что поскольку

$$\Delta |x|^{2l} H_k(x) = 2l(2l+2k+n-2)|x|^{2l-2} H_k(x),$$

то из (23), учитывая, что функции $|x|^{2k} H_k(x)$ при $k \leqslant m-1$ являются m-гармоническими полиномами, находим

$$\Delta^m u(x) = \frac{(2l+2m)\cdots(2l+2)(2l+2m+2k+n-2)\cdots(2l+2k+n)}{(2l+2,2)_m(2l+2k+n,2)_m} |x|^{2l} H_k(x) = |x|^{2l} H_k(x),$$

т.е. $u(x)$ удовлетворяет уравнению (6).

Проверим выполнение граничных условий (7). Сначала выделим из функции $u(x)$ постоянный множитель, т.е. представим эту функцию в виде $u(x) = (2l+2,2)_m(2l+2k+n,2)_m u^*(x)$.

Очевидно, что если $u^*(x)$ удовлетворяет условиям (17), то функция $u(x)$ тоже им удовлетворяет, а значит удовлетворяет и условиям (7). Далее представим функцию $u^*(x)$ в виде произведения двух полиномов $u^*(x) = R_m(x)H_k(x)$, где

$$R_m(x) = |x|^{2l+2m} - \sum_{i=0}^{m-1} \binom{l+m}{i} (|x|^2-1)^i.$$

Легко видеть, что $R_m(x)|_{|x|=1} = 0$ при $m \geqslant 1$, а значит, $u^*(x)|_{|x|=1} = 0$. Вычислим $\Lambda u^*(x)$. Имеем

$$\Lambda u^*(x) = H_k(x)\Lambda R_m(x) + R_m(x)\Lambda H_k(x) =$$

$$= \biggl((2l+2m)|x|^{2l+2m} - \sum_{i=1}^{m-1} \binom{l+m}{i} 2i|x|^2(|x|^2-1)^{i-1}\biggr) H_k(x) + kR_m(x)H_k(x) =$$

$$= (2l+2m)\biggl(|x|^{2l+2m-2} - \sum_{i=1}^{m-1} \binom{l+m-1}{i-1} (|x|^2-1)^{i-1}\biggr)|x|^2 H_k(x) + kR_m(x)H_k(x) =$$

$$= (2l+2m)R_{m-1}(x)H_{k+2}(x) + kR_m(x)H_k(x),$$

откуда следует, что $\Lambda u^*|_{|x|=1} = 0$ при $m \geqslant 2$. Здесь $H_{k+2}(x) = |x|^2 H_k(x)$. Если применить оператор Λ к полученному равенству, то аналогично проделанному выше получим

$$\Lambda(R_{m-i}(x)H_{k+j}(x)) = (2m-2i)R_{m-i-1}(x)|x|^2 H_{k+j}(x) + (k+j)R_{m-i}(x)H_{k+j}(x),$$

где $m-i-1 \geqslant 1$. Поэтому, выделив в функции $\Lambda^s u^*(x)$ слагаемое с наименьшим индексом у функции $G_i(x)$ отдельно, а остальные слагаемые с более высоким индексом у $G_i(x)$ обозначив как $O_i(x)$, можно записать

$$\Lambda^s u^*(x) = (2l+2m)\cdots(2l+2m-2s+2)G_{m-s}(x)H_{k+2s}(x) + O_{m-s}(x),$$

где $H_{k+2s}(x) = |x|^{2s}H_k(x)$ и $m-1 \geqslant s$. Поскольку $R_i(x)|_{|x|=1} = 0$ при $i \geqslant 1$, а значит, $O_{m-s}(x)|_{|x|=1} = 0$, то из полученного равенства следует, что $\Lambda^s u^*(x)|_{|x|=1} = 0$ для $s = \overline{0, m-1}$.

Таким образом, граничные условия (7) для функции $u^*(x)$, а значит и для функции (23), выполнены. Из единственности решения задачи Дирихле и равенства (22) следует справедливость (23). Теорема доказана.

Замечание 4. Полином из правой части (23) является решением задачи задачи Дирихле (6), (7) при всех $n \geqslant 2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Begehr H.* Biharmonic Green functions // Le Matematiche. 2006. V. 61. P. 395–405.
2. *Begehr H., Vaitekhovich T.* Modified harmonic Robin function // Complex Variables and Elliptic Equat. 2013. V. 58. № 4. P. 483–496.
3. *Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh.* On an explicit form of the Green function of the Robin problem for the Laplace operator in a circle // Adv. Pure Appl. Math. 2015. V. 6. № 3. P. 163–172.
4. *Karachik V.V., Turmetov B.Kh.* On Green's function of the Robin problem for the Poisson equation // Adv. in Pure and Appl. Math. 2019. V. 10. № 3. C. 203–214.
5. *Ying Wang, Liuqing Ye.* Biharmonic Green function and biharmonic Neumann function in a sector // Complex Variables and Elliptic Equat. 2013. V. 58. № 1. P. 7–22.
6. *Ying Wang.* Tri-harmonic boundary value problems in a sector // Complex Variables and Elliptic Equat. 2014. V. 59. № 5. P. 732–749.
7. *Boggio T.* Sulle funzioni di Green d'ordine m // Palermo Rend. 1905. V. 20. P. 97–135.
8. *Kalmenov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Y.* Green function representation for the Dirichlet problem of the polyharmonic equation in a sphere // Complex Variables and Elliptic Equat. 2008. V. 53. P. 177–183.

9. *Кальменов Т.Ш., Сураган Д.* О новом методе построения функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 3. С. 435–438.
10. *Karachik V.V.* Dirichlet and Neumann boundary value problems for the polyharmonic equation in the unit ball // Mathematics. 2021. V. 9. № 16. Art. 1907.
11. *Karachik V.V.* Green's function of Dirichlet problem for biharmonic equation in the ball // Complex Variables and Elliptic Equat. 2019. V. 64. № 9. P. 1500–1521.
12. *Карачик В.В.* О функции Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2019. Т. 59. № 1. С. 71–86.
13. *Карачик В.В.* Функция Грина задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в шаре // Мат. заметки. 2020. Т. 107. № 1. С. 87–105.
14. *Карачик В.В., Торебек Б.Т.* О задаче Дирихле–Рикье для бигармонического уравнения // Мат. заметки. 2017. Т. 102. № 1. С. 39–51.
15. *Карачик В.В.* Об одной задаче типа Неймана для бигармонического уравнения // Мат. тр. 2016. Т. 19. № 2. С. 86–108.
16. *Солдатов А.П.* О фредгольмовости и индексе обобщённой задачи Неймана // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 2. С. 217–225.
17. *Карачик В.В.* Функции Грина задач Навье и Рикье–Неймана для бигармонического уравнения в шаре // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 5. С. 673–686.
18. *Sweers G.* A survey on boundary conditions for the biharmonic // Complex Variables and Elliptic Equat. 2009. V. 54. P. 79–93.
19. *Карачик В.В.* Задача Рикье–Неймана для полигармонического уравнения в шаре // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 5. С. 653–662.
20. *Karachik V.V.* The Green function of the Navier problem for the polyharmonic equation in a ball // J. of Math. Sci. 2023. V. 269. № 2. P. 189–204.
21. *Karachik V.V.* Riquier–Neumann problem for the polyharmonic equation in a ball // Mathematics. 2023. V. 11. № 4. Art. 1000.
22. *Karachik V., Turmetov B., Yuan H.* Four boundary value problems for a nonlocal biharmonic equation in the unit ball // Mathematics. 2022. V. 10. № 7. Art. 1158.
23. *Begehr H., Burgumbayeva S., Shupeyeva B.* Remark on Robin problem for Poisson equation // Complex Variables and Elliptic Equat. 2017. V. 62. № 10. P. 1589–1599.
24. *Akel M., Begehr H.* Neumann function for a hyperbolic strip and a class of related plane domains // Math. Nachrichten. 2017. Bd. 290. H. 4. S. 490–506.
25. *Lin H.* Harmonic Green and Neumann functions for domains bounded by two intersecting circular arcs // Complex Variables and Elliptic Equat. 2020. V. 67. P. 79–95.
26. *Begehr H., Burgumbayeva S., Dauletkulova A., Lin H.* Harmonic Green functions for the Almaty apple // Complex Variables and Elliptic Equat. 2020. V. 65. № 11. P. 1814–1825.
27. *Grebenkov D.S., Traytak S.D.* Semi-analytical computation of Laplacian Green functions in three-dimensional domains with disconnected spherical boundaries // J. of Comput. Phys. 2019. V. 379. P. 91–117.
28. *Hsu C.-W., Hwu C.* Green's functions for unsymmetric composite laminates with inclusions // Proc. of the Royal Soc. A: Math., Phys. and Eng. Sci. 2020. V. 476. № 2233. Art. 20190437.
29. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. М., 1982.
30. *Begerh H., Vu T.N.H., Zhang Z.-X.* Polyharmonic Dirichlet problems // Тр. Мат. ин-та имени В.А. Стеклова. 2006. Т. 255. С. 19–40.
31. *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М., 1974.
32. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М., 1981.
33. *Gazzola F., Grunau H.C., Sweers G.* Polyharmonic Boundary Value Problems. Berlin, 2010.

Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет),
г. Челябинск

Поступила в редакцию 30.03.2023 г.
После доработки 30.03.2023 г.
Принята к публикации 14.06.2023 г.