ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 8, с. 1070–1083

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.95

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ В КРИВОЛИНЕЙНОМ КВАДРАНТЕ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

© 2023 г. **В. И. Корзюк, Я. В. Рудько**

Для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом, заданного в криволинейном квадранте, рассматривается смешанная задача с условиями Коши на пространственной полуоси и условием Дирихле на нехарактеристической кривой. Решение задачи строится методом характеристик в неявном аналитическом виде как решение интегральных уравнений. Исследуется разрешимость этих уравнений в зависимости от начальных данных и их гладкости. Для рассматриваемой задачи доказывается единственность решения и устанавливаются условия, при выполнении которых существует её классическое решение. В случае недостаточно гладких данных задачи строится слабое решение.

DOI: 10.31857/S037406412308006X, EDN: IOVDQE

Введение. Многие задачи математической физики решаются в областях с подвижными границами, например, течение со свободной поверхностью, течение жидкости в средах с ёмкостями в стенках, течение жидкости, связанное с аккрецией/эрозией, течение жидкости через деформируемые пористые среды, экструзия жидкостей, деформация и колебания пузырьков и капель, формование стекла, затвердевание, электроосаждение [1]. Эффекты движущихся границ часто вносят значительный вклад в изучаемые явления, и поэтому важно находить точные решения таких задач.

При решении этих задач появляется возможность сделать замену координат, чтобы выровнять область. Однако это приводит к изменению и усложнению вида уравнения и граничных условий. Также задача усложняется формой области, ведь многие функциональные методы, такие как преобразования Фурье или Лапласа и подобные, требуют определённого вида области и граничных условий. В случае же неограниченных областей ещё часто приходится добавлять условия роста на бесконечности, чтобы интегралы от искомых функций сходились. Несмотря на перечисленные выше недостатки, данные методы применяются для решения смешанных задач с движущимися границами (см., например, работы [2–11]). Но следует отметить, что в этих работах не указываются необходимые и достаточные условия существования и единственности решений, а либо приводятся достаточные условия, либо решения строятся формально, так как доказательство существования слабых решений в этих случаях весьма нетривиально [9].

Однако для решения таких задач можно применять классические методы, такие как метод характеристик и метод функции Римана, которые ранее были использованы для решения подобных задач [12, 13]. Как правило, такие методы приводят к эквивалентным интегральным уравнениям вместо дифференциальных.

В данной статье, используя метод характеристик, строится решение первой смешанной задачи для неоднородного гиперболического уравнения второго порядка с нелинейным потенциалом в неограниченном квадранте с подвижной границей. Для этого записываются эквивалентные интегральные уравнения и методом последовательных приближений доказывается существование и единственность их решения. Выводятся необходимые и достаточные условия, при которых существует классическое решение. В случае невыполнения однородных условий согласования рассматривается задача с условиями сопряжения на характеристике, а в случае недостаточно гладких функций строится слабое решение.

1. Постановка задачи. Рассмотрим первую смешанную задачу для уравнения

$$\Box u(t,x) - f(t,x,u(t,x)) = F(t,x) \tag{1}$$

в криволинейной области $Q = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t \in (0,\infty),\ \ x \in (\gamma(t),\infty)\}$.

Область Q ограничена следующими кривыми: $t = 0$ – нижняя граница области, $x = \gamma(t)$ – боковая граница. Полагаем, что функция γ, определяющая боковую границу области Q, удовлетворяет условиям

$$\gamma(0) = 0, \quad \gamma \in C^1([0,\infty)), \quad \gamma'(t) \in (-a,a), \quad t \in [0,\infty),$$
$$\lim_{t\to+\infty} \gamma(t) + at = +\infty, \quad \lim_{t\to+\infty} \gamma(t) - at = -\infty. \tag{2}$$

К уравнению (1) добавим начальные

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad u_t(0,x) = \psi(x), \quad x \in [0,\infty), \tag{3}$$

и граничное

$$u(t,\gamma(t)) = \mu(t), \quad t \in [0,\infty), \tag{4}$$

условия.

В (1)–(4) использованы следующие обозначения: $\Box = \partial_t^2 - a^2\partial_x^2$ – оператор Д'Аламбера ($a > 0$ для определённости); F – заданная на множестве $\overline{Q}$ функция; φ, ψ и μ – функции, заданные на полуоси $[0,\infty)$; f – функция, заданная на множестве $\overline{Q} \times \mathbb{R}$ и удовлетворяющая условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция $k(t,x) \in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ такая, что $|f(t,x,z_1) - f(t,x,z_2)| \leqslant k(t,x)|z_1 - z_2|$.

В работе [10] была изучена задача (1), (3) и (4) в случае безразмерного волнового уравнения ($a = 1$ и $f \equiv 0$) в классе затухающих кусочно-гладких функций. В [11] было формально построено кусочно-заданное решение задачи (1), (3) и (4) в случае уравнения Клейна–Гордона–Фока, а именно $a = 1$ и $f(t,x,u) = -u$.

В статье [14] изучалась первая смешанная задача для волнового уравнения в криволинейной полуполосе, откуда, в силу конечной скорости распространения, могут быть получены результаты о существовании и единственности классического решения задачи (1), (3) и (4) в случае $f \equiv 0$. В работе [12] также была изучена первая смешанная задача в криволинейной полуполосе для более общего линейного уравнения Клейна–Гордона–Фока с первыми производными и с переменными коэффициентами

$$u_{tt}(t,x) - a^2(t,x)u_{xx}(t,x) + a^{(1)}(t,x)u_t(t,x) + a^{(2)}(t,x)u_x(t,x) + a^{(0)}(t,x)u(t,x) = F(t,x),$$

где коэффициент $a(t,x)$ не обращается в нуль ни в одной точке. Поэтому в [12], опять же в силу конечной скорости распространения, задача (1), (3) и (4) была изучена в линейном случае $f(t,x,u) = a^{(0)}(t,x)u$. Однако там предполагалась ортогональность кривых $t = 0$ и $x = \gamma(t)$ в их точке пересечения $(0,0)$, т.е. налагалось дополнительное условие $\gamma'(0) = 0$. Мы же будем исследовать в настоящей работе задачу (1), (3) и (4) без этого предположения.

2. Криволинейный квадрант. Поскольку смешанная задача (1), (3) и (4) задаётся в области Q, отличающейся от стандартных, то представляется необходимым исследовать её свойства.

Заметим, что функция γ в силу ограниченности производной удовлетворяет условию Липшица с константой a. Из геометрических свойств липшицевых функций и условия $\gamma'(t) \in (-a,a)$, $t \in [0,\infty)$, из (2) заключаем, что для любого неотрицательного действительного числа t верно неравенство $-at < \gamma(t) < at$. Тогда для любой точки (t_0,x_0) области Q величина $x_0 + at_0$ принимает только положительные значения. Сформулируем два утверждения относительно разрешимости некоторых уравнений, содержащих функцию γ.

Утверждение 1. *Пусть $\alpha \in [0,\infty)$. Тогда уравнение $\gamma(t) + at = \alpha$ имеет единственное решение при выполнении условий (2).*

Доказательство. Введём функцию $\gamma_+(t)=\gamma(t)+at$. Очевидно, что $\lim\limits_{t\to\infty}\gamma_+(t)=+\infty$ и $\gamma_+(0)=0$. Значит, решение уравнения $\gamma(t)+at=\alpha$ существует на множестве $[0,\infty)$ и может быть найдено методом бинарного поиска. Оно единственно, поскольку функция γ_+ возрастающая, так как $\gamma'_+=\gamma'+a>0$.

Утверждение 2. *Пусть* $\alpha\in(-\infty,0]$. *Тогда уравнение* $\gamma(t)-at=\alpha$ *имеет единственное решение при выполнении условий (2).*

Доказательство аналогично доказательству предыдущего утверждения.

Следствие. *Пусть выбрана некоторая точка* $(t_0,x_0)\in\{(t,x):(t,x)\in Q,\ \ x-at\leqslant 0\}$. *Тогда кривая* $(t,\gamma(t))$ *пересекает прямые* $x-at=x_0-at_0$ *и* $x+at=x_0+at_0$ *в одной точке при выполнении условий (2).*

Для доказательства следствия необходимо составить системы уравнений для определения координат точек пересечения кривой с характеристическими кривыми и воспользоваться утверждениями 1 и 2.

Рассмотрим функцию $\gamma_-:(\infty,0]\ni t\mapsto\gamma(t)-at$. В дальнейшем нам понадобится обратная к данной функция, которую будем обозначать символом Φ, т.е. $\Phi(\gamma(t)-at)=t$. Такая функция существует согласно утверждению 2. Из теоремы об обратной функции устанавливаются формулы

$$\Phi'(t)=\frac{1}{\gamma'(\Phi(t))-a},\quad \Phi''(t)=-\frac{\gamma''(\Phi(t))}{(\gamma'(\Phi(t))-a)^3},\quad t\in(\infty,0]. \tag{5}$$

Подставив $t=0$ в (5), находим значения

$$\Phi(0)=0,\quad \Phi'(0)=\frac{1}{\gamma'(0)-a},\quad \Phi''(0)=-\frac{\gamma''(0)}{(\gamma'(0)-a)^3}. \tag{6}$$

Заметим, что из представлений (5) и условия (2) следует, что Φ – убывающая функция.

3. Интегральное уравнение. Разделим область Q характеристикой $x-at=0$ на две подобласти $Q^{(j)}=\{(t,x)\in Q:(-1)^j(at-x)>0\}$, $j=1,2$. Введём функции $u^{(j)}$, $j=1,2$, как решения задачи (1), (3) и (4) на замыкании $\overline{Q^{(j)}}$ области $Q^{(j)}$. Обозначим

$$u(t,x)=u^{(j)}(t,x),\quad (t,x)\in\overline{Q^{(j)}},\quad j=1,2. \tag{7}$$

На множестве $\overline{Q^{(1)}}$, в силу начальных условий (3), справедливо равенство [15]

$$u^{(1)}(t,x)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz+\frac{1}{4a^2}\int\limits_{x-at}^{x+at}dz\int\limits_{x-at}^{z}\left[F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dy,\quad (t,x)\in\overline{Q^{(1)}}, \tag{8}$$

или эквивалентное ему [16]

$$u^{(1)}(t,x)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz+$$
$$+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}[F(\tau,\xi)+f(\tau,\xi,u^{(1)}(\tau,\xi))]\,d\xi,\quad (t,x)\in\overline{Q^{(1)}}.$$

На множестве $\overline{Q^{(2)}}$ решение $u^{(2)}$ задачи (1), (3) и (4) найдём, используя тождество характеристического параллелограмма [17]. Пусть выбрана точка $P=(t,x)\in\overline{Q^{(2)}}$. Построим характеристический параллелограмм $PP_\mu P_\phi P^{(1)}$ такой, что $P_\mu\in\{(t,x):x=\gamma(t),\ \ t\in(0,\infty)\}$, $P_\phi\in\{(t,x):x=at,\ \ t\in(0,\infty)\}$ и $P^{(1)}\in\{(t,x):x=at,\ \ t\in(0,\infty)\}$.

Координаты точки $P_\mu(t_\mu, x_\mu)$ находятся как решение системы уравнений

$$x_\mu - at_\mu = x - at, \quad x_\mu = \gamma(t_\mu)$$

и имеют вид $t_\mu = \Phi(x - at)$, $x_\mu = \gamma(t_\mu)$.

Аналогично координаты точки $P_\phi(t_\phi, x_\phi)$ являются решением системы уравнений

$$x_\phi + at_\phi = x_\mu + at_\mu, \quad x_\phi = at_\phi$$

и имеют вид

$$t_\phi = \frac{\gamma(\Phi(x-at)) + a\Phi(x-at)}{2a}, \quad x_\phi = \frac{\gamma(\Phi(x-at)) + a\Phi(x-at)}{2}.$$

Заметим, что отрезок $P_\phi P_\mu$ принадлежит подмножеству $\overline{Q^{(2)}}$ в силу утверждения 1. Это значит, что весь параллелограмм $PP_\mu P_\phi P^{(1)}$ является подмножеством $\overline{Q^{(2)}}$.

Рассуждая таким же образом, координаты точки $P^{(1)}(t_1, x_1)$ находятся как решение системы уравнений

$$x_1 + at_1 = x + at, \quad x_1 = at_1$$

и имеют вид $t_1 = (x + at)/(2a)$ и $x_1 = (x + at)/2$.

Теперь, применив правило характеристического параллелограмма, получим

$$u(P) = u(P_\mu) + u(P^{(1)}) - u(P_\phi) - \frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x-at} dy \int\limits_{\gamma(\Phi(x-at))+a\Phi(x-at)}^{x+at} \left[F\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right)\right] dz, \quad (t,x) \in \overline{Q^{(2)}}.$$

Отсюда имеем

$$u^{(2)}(t,x) = \mu(\Phi(x-at)) + u^{(1)}\left(\frac{x+at}{2a}, \frac{x+at}{2}\right) -$$

$$- u^{(1)}\left(\frac{\gamma(\Phi(x-at)) + a\Phi(x-at)}{2a}, \frac{\gamma(\Phi(x-at)) + a\Phi(x-at)}{2}\right) -$$

$$- \frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x-at} dy \int\limits_{\gamma(\Phi(x-at))+a\Phi(x-at)}^{x+at} \left[F\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u^{(2)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right)\right] dz, \quad (t,x) \in \overline{Q^{(2)}}. \tag{9}$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* $\varphi \in C^2([0,\infty))$, $\psi \in C^1([0,\infty))$, $\mu \in C^2([0,\infty))$, $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$, $\gamma \in C^2([0,\infty))$. *Функция* u *принадлежит классу* $C^2(\overline{Q})$ *и удовлетворяет уравнению (1), условиям Коши (3) и условию Дирихле (4) тогда и только тогда, когда она является непрерывным решением уравнений (8) и (9) и выполняются условия согласования*

$$\mu(0) - \varphi(0) = 0, \tag{10}$$

$$\mu'(0) - \gamma'(0)\varphi'(0) - \psi(0) = 0, \tag{11}$$

$$\mu''(0) - (a^2 + (\gamma'(0))^2)\varphi''(0) - f(0,0,\varphi(0)) - F(0,0) - 2\gamma'(0)\psi'(0) - \gamma''(0)\varphi'(0) = 0. \tag{12}$$

Доказательство. 1. Пусть функция $u \in C^2(\overline{Q})$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям (3), (4). Тогда, согласно статье [15], имеет место представление (8). Формула (9) выводится из тождества характеристического паралелограмма [17]. Из начальных условий (3) и граничного условия (4) следуют величины $\partial_t^k\partial_x^p u(0,0)$, где k, p – целые неотрицательные числа, $0\leqslant k+p\leqslant 2$. Продифференцировав условие (4) по переменной t дважды, получим

$$\mu'(t)=u_t(t,\gamma(t))+\gamma'(t)u_x(t,\gamma(t)),\quad t\in[0,\infty),$$

$$\mu''(t)=u_{tt}(t,\gamma(t))+2\gamma'(t)u_{tx}(t,\gamma(t))+(\gamma'(t))^2u_{xx}(t,\gamma(t))+\gamma''(t)u_x(t,\gamma(t)),\quad t\in[0,\infty).\tag{13}$$

Аналогично, дифференцируя условия Коши (3) по переменной x, будем иметь

$$u_x(0,x)=\varphi'(x),\quad u_{xx}(0,x)=\varphi''(x),\quad u_{tx}(0,x)=\psi'(x),\quad x\in[0,\infty).\tag{14}$$

Из выражений (3), (14) и уравнения (1) при $t=0$ и $x=0$ получим

$$u(0,0)=\varphi(0),\quad u_t(0,0)=\psi(0),$$

$$u_x(0,0)=\varphi'(0),\quad u_{xx}(0,0)=\varphi''(0),\quad u_{tx}(0,0)=\psi'(0),$$

$$u_{tt}(0,0)=a^2u_{xx}(0,0)+f(0,0,u(0,0))+F(0,0)=a^2\varphi''(0)+f(0,0,\varphi(0))+F(0,0).\tag{15}$$

Подставив (15) в представления (13) и краевое условие (4) при $t=0$, имеем

$$\mu(0)=\varphi(0),\quad \mu'(0)=\psi(0)+\gamma'(0)\varphi'(0),$$

$$\mu''(0)=a^2\varphi''(0)+f(0,0,\varphi(0))+F(0,0)+2\gamma'(0)\psi'(0)+(\gamma'(0))^2\varphi''(0)+\gamma''(0)\varphi'(0).\tag{16}$$

Формулы (16) представляют собой условия согласования (10)–(12).

2. Предположим, что имеют место представления функции u в виде (8) и (9) и выполнены условия (10)–(12). В силу условий гладкости $\varphi\in C^2([0,\infty))$, $\psi\in C^1([0,\infty))$, $\mu\in C^2([0,\infty))$, $f\in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R})$, $F\in C^1(\overline{Q})$ и $\gamma\in C^2([0,\infty))$ заключаем, что $u^{(j)}\in C^2(\overline{Q^{(j)}})$, $j=1,2$. Подставив (8) и (9) в уравнение (1) и условия (3), (4), убеждаемся, что функция $u^{(j)}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в $\overline{Q^{(j)}}$ и краевым условиям. Чтобы при этом функция u принадлежала классу $C^2(\overline{Q})$, необходимо и достаточно совпадений на характеристике $x=at$ значений функций $u^{(j)}$, их производных первого и второго порядков, т.е.

$$\partial_t^k\partial_x^p u^{(1)}(t,x)|_{x=at}=\partial_t^k\partial_x^p u^{(2)}(t,x)|_{x=at},\tag{17}$$

где k, p – целые неотрицательные числа, $0\leqslant k+p\leqslant 2$.

Найдём значения функции $u^{(2)}$ на характеристике $x-at=0$. С учётом (6) имеем

$$u^{(2)}(t,x)|_{x=at}=u^{(1)}(t,x)|_{x=at}-u^{(1)}\left(\frac{a\Phi(0)+\gamma(\Phi(0))}{2a},\frac{a\Phi(0)+\gamma(\Phi(0))}{2}\right)+\mu(\Phi(0))=$$

$$=u^{(1)}(t,at)-u^{(1)}(0,0)+\mu(\Phi(0))=u^{(1)}(t,at)+\mu(0)-\varphi(0).\tag{18}$$

Из (18) и (10) следует (17) при $k=p=0$.

Вычисляем производные первого и второго порядков функций $u^{(j)}$ в $\overline{Q^{(j)}}$, $j=1,2$. Затем на характеристике $x-at=0$ рассмотрим с учётом (6) разность их предельных значений:

$$u_t^{(1)}(t,x)|_{x=at}-u_t^{(2)}(t,x)|_{x=at}=\frac{1}{4a}\int\limits_0^{2at}\left[f\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},u^{(1)}\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\right)\right)-\right.$$

$$\left.-f\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},u^{(2)}\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\right)\right)\right]dz+\frac{a(\gamma'(0)\varphi'(0)-\mu'(0)+\psi(0))}{a-\gamma'(0)}=$$

$$=-a(u_x^{(1)}(t,x)|_{x=at}-u_x^{(2)}(t,x)|_{x=at}).$$

Так как выполнены условия (11) и (17) при $k = p = 0$, то это влечёт за собой истинность (11) при $k + p = 1$.

Далее вычисляем в областях $\overline{Q^{(j)}}$, $j = 1, 2$, производные второго порядка по t функций $u^{(j)}$ и рассматриваем с учётом (6) их разность на характеристике $x - at = 0$:

$$u_{tt}^{(1)}(t,x)|_{x=at} - u_{tt}^{(2)}(t,x)|_{x=at} = \frac{1}{2}\biggl(\frac{f(0,0,\varphi(0))(a^2+\gamma'(0)^2)}{(a-\gamma'(0))^2} + (a-\gamma'(0))^{-3} \times$$
$$\times (2a^2(aF(0,0) - F(0,0)\gamma'(0) + \varphi''(0)(a-\gamma'(0))(a^2+\gamma'(0)^2) +$$
$$+ a\gamma''(0)\varphi'(0) + 2a\gamma'(0)\psi'(0) - a\mu''(0) + \gamma''(0)(\psi(0) - \mu'(0)) + \gamma'(0)\mu''(0) - 2\gamma'(0)^2\psi'(0))) +$$
$$+ \frac{f(0,0,\mu(0))(a+\gamma'(0))}{a-\gamma'(0)} + f(t,at,u^{(1)}(t,at)) - f(t,at,u^{(2)}(t,at))\biggr) +$$
$$+ \frac{1}{8a^2}\Biggl(\int\limits_0^{2at}\Biggl[\Biggl(u_t^{(1)}\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\biggr) - au_x^{(1)}\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\biggr)\Biggr)\partial_y f\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},y = u^{(1)}\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\biggr)\biggr) -$$
$$- af_x\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},u^{(1)}\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\biggr)\biggr) + f_t\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},u^{(1)}\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\biggr)\biggr) - aF_x\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\biggr) + F_t\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\biggr)\Biggr]\,dz -$$
$$- \int\limits_0^{2at}\Biggl[\Biggl(u_t^{(2)}\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\biggr) - au_x^{(2)}\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\biggr)\Biggr)\partial_y f\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},y = u^{(2)}\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\biggr)\biggr) -$$
$$- af_x\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},u^{(2)}\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\biggr)\biggr) + f_t\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},u^{(2)}\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\biggr)\biggr) - aF_x\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\biggr) + F_t\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\biggr)\Biggr]dz\Biggr). \quad (19)$$

Аналогично вычисляем разности $u_{xx}^{(1)}(t,x)|_{x=at} - u_{xx}^{(2)}(t,x)|_{x=at}$ и $(u_{xt}^{(1)}(t,x) - u_{xt}^{(2)}(t,x))$. В результате получаем

$$u_{tt}^{(1)}(t,x)|_{x=at} - u_{tt}^{(2)}(t,x)|_{x=at} = f(t,x,u^{(1)}(t,x)) - f(t,x,u^{(2)}(t,x)) + a^2(u_{xx}^{(1)}(t,x) - u_{xx}^{(2)}(t,x)),$$
$$u_{tt}^{(1)}(t,x)|_{x=at} - u_{tt}^{(2)}(t,x)|_{x=at} =$$
$$= \frac{1}{2}(f(t,x,u^{(1)}(t,x)) - f(t,x,u^{(2)}(t,x))) - a(u_{xt}^{(1)}(t,x) - u_{xt}^{(2)}(t,x)). \quad (20)$$

Воспользовавшись (12) и ранее установленными условиями (17) при $k + p \leqslant 1$, получаем, что из равенств (19) и (20) следует условие (17) при $k + p \leqslant 2$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi \in C([0,\infty))$, $\psi \in L_1^{\mathrm{loc}}([0,\infty))$, $\mu \in C([0,\infty))$, $f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in L_1^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $\gamma \in C^1([0,\infty))$, *функция* f *удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция* $k \in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ *такая, что* $|f(t,x,z_1) - f(t,x,z_2)| \leqslant k(t,x)|z_1 - z_2|$. *Тогда решения уравнений (8) и (9) существуют, единственны и непрерывно зависят от исходных данных.*

Доказательство теоремы проведём, следуя схеме, изложенной в работах [12, 15, 18–20]. Для определённости рассмотрим уравнение (8) для функции $u^{(1)}$, которое будем решать методом последовательных приближений. Обозначим

$$G(t,x) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz + \frac{1}{4a^2}\int\limits_{x-at}^{x+at}dz\int\limits_{x-at}^{z}F\biggl(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\biggr)dy.$$

Возьмём начальное приближение $u^{(1,0)} = G$. Тогда каждое следующее приближение будет вычисляться по формуле

$$u^{(1,m)}(t,x) = G(t,x) +$$

$$+\frac{1}{4a^2}\int\limits_{x-at}^{x+at}dz\int\limits_{x-at}^{z} f\bigg(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1,m-1)}\bigg(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\bigg)\bigg)\,dy,\quad (t,x)\in\overline{Q^{(1)}}. \tag{21}$$

Найдём оценки для последовательных приближений. Пусть $\widetilde{x}>0,$ множество

$$\mathcal{A}=\operatorname{Conv}\{(0,0),(0,\widetilde{x}),(\widetilde{x}/(2a),\widetilde{x}/2)\}\subset\overline{Q^{(1)}},$$

$$M_G=\max_{(t,x)\in\mathcal{A}}|G(t,x)|,\quad K=\sup_{(t,x)\in\mathcal{A}}\bigg(\int\limits_{x-at}^{x+at}dz\int\limits_{x-at}^{z}\bigg|k\bigg(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\bigg)\bigg|^2dy\bigg)^{1/2}.$$

Тогда

$$|u^{(1,1)}(t,x)-u^{(1,0)}(t,x)|\leqslant\mathcal{M}\equiv|u^{(1,1)}-u^{(1,0)}|_{C(\mathcal{A})},$$

$$|(u^{(1,2)}-u^{(1,1)})(t,x)|\leqslant\bigg|\frac{1}{4a^2}\int\limits_{x-at}^{x+at}dz\int\limits_{x-at}^{z} f\bigg(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1,1)}\bigg(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\bigg)\bigg)-$$

$$-f\bigg(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1,0)}\bigg(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\bigg)\bigg)\,dy\bigg|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{4a^2}\bigg|\int\limits_{x-at}^{x+at}dz\int\limits_{x-at}^{z}k\bigg(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\bigg)\bigg|u^{(1,1)}\bigg(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\bigg)-u^{(1,0)}\bigg(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\bigg)\bigg|\,dy\bigg|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{4a^2}\bigg|\bigg(\int\limits_{x-at}^{x+at}dz\int\limits_{x-at}^{z}\bigg|k\bigg(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\bigg)\bigg|^2dy\bigg)^{1/2}\bigg(\int\limits_{x-at}^{x+at}dz\int\limits_{x-at}^{z}\mathcal{M}^2\,dy\bigg)^{1/2}\bigg|\leqslant\frac{K\mathcal{M}t}{2\sqrt{2a}},\quad (t,x)\in\mathcal{A}.$$

Далее методом математической индукции, в качестве базы в которой здесь выбирается последнее неравенство, несложно доказывается, что имеет место оценка

$$|(u^{(1,i+1)}-u^{(1,i)})(t,x)|\leqslant\frac{K^i\mathcal{M}t^i}{2^ia^i\sqrt{(2i)!}},\quad (t,x)\in\mathcal{A}. \tag{22}$$

Заметим, что $u^{(1,m)}=u^{(1,0)}+\sum_{j=0}^{m-1}(u^{(1,j+1)}-u^{(1,j)})$. Из оценки (22) следует абсолютная и равномерная сходимость ряда $u^{(1,\infty)}=u^{(1,0)}+\sum_{j=0}^{\infty}(u^{(1,j+1)}-u^{(1,j)})$ на множестве $\mathcal{A}$, поскольку его члены мажорируются по абсолютной величине членами равномерно сходящегося ряда

$$\mathcal{M}+M_G+\sum_{i=0}^{\infty}\frac{K^i\mathcal{M}t^i}{2^ia^i\sqrt{(2i)!}}\leqslant M\bigg(1+\exp\bigg(\frac{Kt}{2a}\bigg)\bigg),$$

где $M=\mathcal{M}+M_G$. Таким образом, последовательные приближения непрерывных функций $u^{(1,m)}$ равномерно сходятся на множестве $\mathcal{A}$ к непрерывной в $\mathcal{A}$ функции $u^{(1)}:\mathbb{R}^2\supset\overline{Q^{(1)}}\supset\supset\mathcal{A}\ni(t,x)\to u^{(1)}(t,x)\in\mathbb{R}$, а в силу произвольности $\widetilde{x}$ – к непрерывной в $\overline{Q^{(1)}}$ функции $u^{(1)}:\mathbb{R}^2\supset\overline{Q^{(1)}}\ni(t,x)\to u^{(1)}(t,x)\in\mathbb{R}$. Переходя в равенстве (21) к пределу при $m\to\infty$, получаем, что функция $u^{(1)}$ является решением уравнения (8) на множестве $\overline{Q^{(1)}}$.

Докажем единственность решения уравнения (8) от противного. Пусть уравнение (8) имеет два решения: $u^{(1)}$ и $\widetilde{u}^{(1)}$. Обозначим $U=u^{(1)}-\widetilde{u}^{(1)}$. Тогда

$$U(t,x)=\frac{1}{4a^2}\int\limits_{x-at}^{x+at}dz\int\limits_{x-at}^{z} f\bigg(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1)}\bigg(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\bigg)\bigg)\,dy-$$

$$
-\frac{1}{4a^2}\int\limits_{x-at}^{x+at}dz\int\limits_{x-at}^{z} f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},\widetilde{u}^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)dy,\quad (t,x)\in\overline{Q^{(1)}}. \tag{23}
$$

Функция U является непрерывной, значит $|U(t,x)|\leqslant M_U$ при условии $(t,x)\in\mathcal{A}$, где M_U – некоторая константа. Из равенства (23) с учётом условия типа Липшица–Каратеодори и неравенства Коши–Буняковского–Шварца следует, что

$$
|U(t,x)|\leqslant\frac{1}{4a^2}\left(K^2\int\limits_{x-at}^{x+at}dz\int\limits_{x-at}^{z}M_U^2\,dy\right)^{1/2}\leqslant\frac{KM_Ut}{2\sqrt{2}a},\quad (t,x)\in\mathcal{A}.
$$

Применяя метод математической индукции, придём к следующей оценке:

$$
|U(t,x)|\leqslant\frac{K^iM_Ut^i}{2^ia^i\sqrt{(2i)!}}
$$

для любого положительного целого числа i и любой пары (t,x) из $\mathcal{A}$. Отсюда следует, что $U\equiv 0$ на множестве $\mathcal{A}$, а в силу произвольности $\widetilde{x}$ – что $U\equiv 0$ на множестве $\overline{Q^{(1)}}$. Таким образом, доказано существование единственного непрерывного решения уравнения (8).

Чтобы доказать непрерывную зависимость решения от начальных данных, рассмотрим, наряду с уравнением (8), возмущённое уравнение

$$
(u^{(1)}+\Delta u)(t,x)=(G+\Delta G)(t,x)-
$$

$$
-\frac{1}{4a^2}\int\limits_{x-at}^{x+at}dz\int\limits_{x-at}^{z} f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},(u^{(1)}+\Delta u)\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)dy,\quad (t,x)\in\overline{Q^{(1)}}, \tag{24}
$$

и разность возмущённого (24) и невозмущённого (8) уравнений

$$
\Delta u(t,x)=\Delta G(t,x)-\frac{1}{4a^2}\int\limits_{x-at}^{x+at}dz\int\limits_{x-at}^{z}\left[f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},(u^{(1)}+\Delta u)\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)-\right.
$$

$$
\left.-f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dy,\quad (t,x)\in\overline{Q^{(1)}}. \tag{25}
$$

Для уравнения (25) относительно возмущения Δu справедлива следующая оценка модуля возмущения:

$$
|\Delta u(t,x)|\leqslant M_{\Delta G}+\frac{1}{4a^2}\int\limits_{x-at}^{x+at}dz\int\limits_{x-at}^{z}k\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\left|\Delta u\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right|dy,
$$

где $M_{\Delta G}=\max\limits_{(t,x)\in\mathcal{A}}|\Delta G(t,x)|$. Применяя многомерную лемму Гроноулла [21, гл. 13] к предыдущему неравенству, получаем $|\Delta u(t,x)|\leqslant C^{(1)}M_{\Delta G}$, где $C^{(1)}$ – некоторая положительная константа, зависящая только от множества $\mathcal{A}$, функции k и числа a. Из полученного неравенства вытекает, что какое бы малое возмущение ΔG, $M_{\Delta G}=\varepsilon$, мы не взяли, для возмущения решения выполняется неравенство $|\Delta u(t,x)|=\delta\leqslant\varepsilon C^{(1)}$ на множестве $\mathcal{A}$. В силу произвольности $\widetilde{x}$ получаем, что решение $u^{(1)}$ уравнения (8) непрерывно зависит от исходных данных.

Существование единственного непрерывного и непрерывно зависящего от начальных данных решения уравнения (9) для функции $u^{(2)}$ доказывается аналогично – для оценки приближений в этом случае можно применить неравенство

$$\int\limits_0^{x-at} dy \int\limits_{\gamma(\Phi(x-at))+a\Phi(x-at)}^{x+at} |\Theta(y,z)|\,dz \leqslant \int\limits_0^{x-at} dy \int\limits_0^{x+at} |\Theta(y,z)|\,dz,$$

где функцию Θ можно считать дополненной нулём или продолженной по непрерывности вне множества $\overline{Q^{(2)}}$. Теорема доказана.

4. Классическое решение. Фактически теоремы 1 и 2 гарантируют существование и единственность классического решения задачи (1), (3) и (4).

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* $\varphi \in C^2([0,\infty))$, $\psi \in C^1([0,\infty))$, $\mu \in C^2([0,\infty))$, $f \in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$, $\gamma \in C^2([0,\infty))$ *и функция* f *удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция* $k \in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ *такая, что* $|f(t,x,z_1)-f(t,x,z_2)| \leqslant k(t,x)|z_1-z_2|$. *Первая смешанная задача (1), (3) и (4) имеет единственное решение* u, *определённое формулами (7)–(9), из класса* $C^2(\overline{Q})$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия (10)–(12).*

Доказательство следует из теорем 1 и 2.

5. Неоднородные условия согласования. Подобно тому как это было сделано в работах [15, 22–26], рассмотрим теперь задачу (1), (3) и (4) в случае, когда условия согласования (10)–(12) частично или полностью не выполняются.

Согласно теореме 1 присутствие неоднородных условий согласования нарушает непрерывность функции u или её производных, или всё вместе. Данное заключение можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Утверждение 3. *Если для заданных функций* μ, φ, ψ, γ, f, F *не выполняются однородные условия согласования (10)–(12), то какими бы гладкими не были функции* f, F, μ, φ *и* ψ, *задача (1), (3) и (4) не имеет классического решения, определённого на* $\overline{Q}$.

Доказательство следует из теоремы 1.

Пусть заданные функции уравнения (1) и условий (3), (4) являются достаточно гладкими и такими, как в теореме 3: $\varphi \in C^2([0,\infty))$, $\psi \in C^1([0,\infty))$, $\mu \in C^2([0,\infty))$, $f \in C^1(\overline{Q}\times \times\mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$, $\gamma \in C^2([0,\infty))$. Так как условия согласования (10)–(12), вообще говоря, не выполнены, то получим разрывные производные функции u:

$$[(u)^+ - (u)^-](t,x)|_{x=at} = \varphi(0) - \mu(0),$$

$$[(u_t)^+ - (u_t)^-](t,x)|_{x=at} = \frac{1}{4a}\int\limits_0^{2at}\biggl(f\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},(u)^+\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\biggr)\biggr) - f\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},(u)^-\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\biggr)\biggr)\biggr)\,dz +$$

$$+\frac{a(\gamma'(0)\varphi'(0)-\mu'(0)+\psi(0))}{a-\gamma'(0)} = -a[(u_x)^+ - (u_x)^-](t,x)|_{x=at},$$

$$[(u_{tt})^+ - (u_{tt})^-](t,x)|_{x=at} = \frac{1}{2}\biggl(\frac{f(0,0,\varphi(0))(a^2+\gamma'(0)^2)}{(a-\gamma'(0))^2} + (a-\gamma'(0))^{-3}\times$$

$$\times(2a^2(aF(0,0) - F(0,0)\gamma'(0) + \varphi''(0)(a-\gamma'(0))(a^2+\gamma'(0)^2) +$$

$$+a\gamma''(0)\varphi'(0) + 2a\gamma'(0)\psi'(0) - a\mu''(0) + \gamma''(0)(\psi(0)-\mu'(0)) + \gamma'(0)\mu''(0) - 2\gamma'(0)^2\psi'(0))) +$$

$$+\frac{f(0,0,\mu(0))(a+\gamma'(0))}{a-\gamma'(0)} + f(t,at,(u)^+(t,at)) - f(t,at,(u)^-(t,at))\biggr) +$$

$$+\frac{1}{8a^2}\biggl(\int\limits_0^{2at}\biggl[\biggl((u_t)^+\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\biggr) - a(u_x)^+\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\biggr)\biggr)\partial_y f\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},y=(u)^+\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\biggr)\biggr) -$$

$$-af_x\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},(u)^+\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\right)\right)+f_t\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},(u)^+\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\right)\right)-aF_x\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\right)+F_t\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\right)\Bigg]\,dz-$$

$$-\int\limits_0^{2at}\Bigg[\left((u_t)^-\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\right)-a(u_x)^-\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\right)\right)\partial_y f\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},y=(u)^-\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\right)\right)-$$

$$-af_x\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},(u)^-\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\right)\right)+f_t\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},(u)^-\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\right)\right)-aF_x\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\right)+F_t\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\right)\Bigg]\,dz\Bigg)=$$

$$=f(t,x,(u)^+(t,x))-f(t,x,(u)^-(t,x))+a^2[(u_{xx})^+-(u_{xx})^-]=$$

$$=\frac{1}{2}(f(t,x,(u)^+(t,x))-f(t,x,(u)^-(t,x)))-a[(u_{tx})^+-(u_{tx})^-]. \qquad (26)$$

Здесь было использовано обозначение $(\cdot)^\pm$ – предельные значения функции u и её частных производных с разных сторон на характеристике $x-at=0$, т.е.

$$(\partial_t^p u)^\pm(t,x)|_{x=at}=\lim_{\delta\to 0+}\partial_t^p u(t,at\pm\delta).$$

Обозначим $\widetilde{Q}=\overline{Q}\setminus\{(t,x): x-at=0\}$. Справедлива следующая

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* $\varphi\in C^2([0,\infty))$, $\psi\in C^1([0,\infty))$, $\mu\in C^2([0,\infty))$, $f\in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R})$, $F\in C^1(\overline{Q})$, $\gamma\in C^2([0,\infty))$ *и функция* f *удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция* $k\in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ *такая, что* $|f(t,x,z_1)-f(t,x,z_2)|\leqslant k(t,x)|z_1-z_2|$. *Первая смешанная задача (1), (3) и (4) имеет единственное решение* u, *определённое формулами (7)–(9), из класса* $C^2(\widetilde{Q})$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия (26).*

Доказательство теоремы следует из предыдущих рассуждений.

Теорема 5. *Пусть выполняются условия* $\varphi\in C^2([0,\infty))$, $\psi\in C^1([0,\infty))$, $\mu\in C^2([0,\infty))$, $f\in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R})$, $F\in C^1(\overline{Q})$, $\gamma\in C^2([0,\infty))$ *и функция* f *удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция* $k\in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ *такая, что* $|f(t,x,z_1)-f(t,x,z_2)|\leqslant k(t,x)|z_1-z_2|$. *Первая смешанная задача (1), (3) и (4) имеет единственное решение* u, *определённое формулами (7)–(9), из класса* $C^2(\widetilde{Q})\bigcap C(\overline{Q})$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия (26) и (10).*

Доказательство следует из теорем 1–3 и рассуждений выше. Действительно, если $\varphi(0)=\mu(0)$, то решение u на множестве $\{(t,x): x-at=0\}$ является непрерывным в силу (26). Следовательно, кроме того, что решение $u\in C^2(\widetilde{Q})$, оно является непрерывной функцией на замыкании $\overline{Q}$, $u\in C(\overline{Q})$.

Теорема 6. *Пусть выполняются условия* $\varphi\in C^2([0,\infty))$, $\psi\in C^1([0,\infty))$, $\mu\in C^2([0,\infty))$, $f\in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R})$, $F\in C^1(\overline{Q})$, $\gamma\in C^2([0,\infty))$ *и функция* f *удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция* $k\in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ *такая, что* $|f(t,x,z_1)-f(t,x,z_2)|\leqslant k(t,x)|z_1-z_2|$. *Первая смешанная задача (1), (3) и (4) имеет единственное решение* u, *определённое формулами (7)–(9), из класса* $C^2(\widetilde{Q})\bigcap C^1(\overline{Q})$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия (26), (10) и (11).*

Доказательство легко следует из теорем 1–5 и формул (26), так как в этом случае u является непрерывной на $\{(t,x): x-at=0\}$, но в силу (26), (10) и (11) имеет непрерывные производные первого порядка.

Замечание 1. Если заданные функции задачи (1), (3) и (4) не удовлетворяют однородным условиям согласования (10)–(12), то решение задачи (1), (3) и (4) сводится к решению соответствующей задачи сопряжения, где условия сопряжения задаются на характеристике $x-at=0$.

В качестве условий сопряжения могут быть выбраны условия (26). Теперь задачу (1), (3) и (4) можно сформулировать, используя условия сопряжения (26) следующим образом.

Задача (1), (3) и (4) с условиями сопряжения на характеристиках. Найти классическое решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям Коши (3), граничному условию (4), условиям сопряжения (26).

Заметим, что такая формулировка рассмотренной задачи с условиями сопряжения более приемлема для её численной реализации.

6. Слабое решение. Рассмотрим теперь задачу (1), (3) и (4) в случае, когда функции μ, φ, ψ, γ, f, F не обладают достаточной степенью гладкости.

Определение 1. *Функцию u, представимую в виде (7)–(9), назовём слабым решением задачи (1), (3) и (4).*

Определение 1 вводит понятие слабого решения. Однако в литературе такие решения называют также *решениями в широком смысле* [27, с. 56; 28], *обобщёнными решениями* [29], *слабыми слабыми* (“*weak*”) *решениями* [30, с. 19; 31, с. 69, 185, 189], *слабыми* (“*mild*”) *решениями* [32–34].

Наша мотивация введения слабого решения именно таким образом состоит в том, что представление (7)–(9) корректно определено, даже если функции $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ не дифференцируемы, что побуждает обобщить классическое решение с помощью “слабого” решения, которое должно быть только непрерывным. Это примерно та же самая мотивация, которая побуждает искать решения в различных пространствах Соболева [35–38] или в смысле обобщённых функций [39]. Более того, во многих случаях линейных абстрактных задач Коши понятия слабого (“mild”) и слабого слабого (“weak”) (в двойственном смысле, смысле распределений) решений эквивалентны[*)].

Замечание 2. Любое классическое решение задачи (1), (3) и (4) является также слабым решением этой задачи.

Также очевидно, что если выполнены дополнительные условия гладкости $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi \in C^2([0,\infty))$, $\psi \in C^1([0,\infty))$, $\mu \in C^2([0,\infty))$ и условия согласования (10)–(12), то слабое решение задачи (1), (3) и (4) является классическим.

Справедлива следующая

Теорема 7. *Пусть выполняются условия $\varphi \in C([0,\infty))$, $\psi \in L_1^{\mathrm{loc}}([0,\infty))$, $\mu \in C([0,\infty))$, $f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in L_1^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $\gamma \in C^1([0,\infty))$ и функция f удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция $k \in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ такая, что $|f(t,x,z_1) - f(t,x,z_2)| \leqslant k(t,x)|z_1 - z_2|$. Первая смешанная задача (1), (3) и (4) имеет единственное слабое решение u из класса $C(\widetilde{Q})$.*

Доказательство. Разрешимость интегральных уравнений (8), (9) и принадлежность их решений классу непрерывных функций следует из теоремы 1.

Для слабого решения условия сопряжения (26), вообще говоря, не выполняются. Можно гарантировать только выполнение условия $[(u)^+ - (u)^-](t,x)|_{x=at} = \varphi(0) - \mu(0)$ на характеристике $x - at = 0$, исходя из представлений (8), (9).

Также мы можем сопоставить слабое решение в смысле определения 1 с другими определениями обобщённого решения. Так, например, следуя А.Н. Тихонову и А.А. Самарскому [40, с. 81], можно ввести следующее

Определение 2. Пусть функции φ и μ кусочно-гладкие, функции ψ и F – кусочно-непрерывные и f – непрерывная. Тогда назовём *обобщённым решением* задачи (1), (3) и (4) функцию u, кусочно-гладкую на множестве $\overline{Q}$, удовлетворяющую начальным условиям (3), граничному условию (4) и уравнению

$$\oint\limits_{\partial C} a^2 u_x(t,x)\,dt + u_t(t,x)\,dx + \int\limits_C [F(t,x) + f(t,x,u(t,x))\,dt\,dx = 0 \tag{27}$$

для любой области $C \subset \overline{Q}$ со стандартно ориентированным кусочно-гладким краем ∂C.

Утверждение 4. *Любое классическое решение задачи (1), (3) и (4) является также обобщённым решением этой задачи.*

[*)] https://mathoverflow.net/questions/320300/what-mild-solution-means-and-how-to-find-it.

Для доказательства утверждения необходимо проинтегрировать уравнение (1) по области $C \subset \overline{Q}$ и применить теорему Грина.

Утверждение 5. *Любое дважды непрерывно дифференцируемое обобщённое решение задачи (1), (3) и (4) является классическим решением этой задачи.*

Доказательство. Рассмотрим множество $C = [t_1, t_2] \times [x_1, x_2] \subset \overline{Q}$, применим теорему Грина к равенству (27) и получим

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_1}^{x_2}[u_{tt}(t,x) - a^2 u_{xx}(t,x) - f(t,x,u(t,x)) - F(t,x)]\,dt\,dx = 0. \tag{28}$$

Воспользовавшись теоремой о среднем для интеграла в (28), будем иметь

$$[u_{tt}(t,x) - a^2 u_{xx}(t,x) - f(t,x,u(t,x)) - F(t,x)]\Delta t\,\Delta x = 0, \tag{29}$$

где $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$ и (t,x) – некоторая точка, принадлежащая множеству C. Разделив обе части (29) на $\Delta t \Delta x$, перейдём к пределу при $\Delta t \to 0$ и $\Delta x \to 0$ и получим дифференциальное уравнение (1), что заканчивает доказательство.

Повторяя рассуждения, изложенные в [40, с. 81–83], приходим к тому, что обобщённое решение задачи (1), (3) и (4) также представляется в виде (7)–(9), т.е. является слабым. Отсюда сразу вытекает единственность обобщённого решения. С помощью непосредсвенной подстановки нетрудно убедиться в том, что функция типа (7)–(9), где φ – кусочно-гладкая, ψ, μ и F – кусочно-непрерывные, f – непрерывная, удовлетворяет уравнению (27), начальным условиям (3) и граничному условию (4). Это доказывает теорему существования. Таким образом, показана в некотором виде эквивалентность слабого и обобщённого решений задачи (1), (3) и (4). Но следует отметить, что обобщённое решение требует бóльшую гладкость данных.

Следуя С.С. Харибегашвили и О.М. Джохадзе [41], также рассмотрим следующее обобщение классического решения.

Определение 3. Пусть функции $f \in C(\overline{Q}\times\mathbb{R})$, $F \in C(\overline{Q})$, $\varphi \in C^1([0,\infty))$, $\psi \in C([0,\infty))$, $\mu \in C^1([0,\infty))$ удовлетворяют условиям согласования (10) и (11). Тогда назовём *сильным обобщённым решением* задачи (1), (3) и (4) функцию u, если $u \in C(\overline{Q})$ и существует такая последовательность функций $u_n \in C^2(\overline{Q})$, что

$$\lim_{n\to\infty}\rho(\Box u(\cdot) - f(\cdot,u(\cdot)) - F(\cdot),0)_{C(\overline{Q})} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\rho(u_n,u)_{C(\overline{Q})} = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\rho(u_n(\,\cdot,\gamma(\cdot)),\mu)_{C([0,\infty))} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\rho(u_n(0,\cdot),\varphi)_{C^1([0,\infty))} = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\rho\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}(0,\cdot),\psi\right)_{C([0,\infty))} = 0,$$

где $\rho(x_1,x_2)_X$ – расстояние между элементами $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$ в метрическом пространстве X.

Аналогично статье [41] могут быть установлены следующие замечания.

Замечание 3. Любое классическое решение задачи (1), (3) и (4) является также сильным обобщённым решением этой задачи.

Замечание 4. Если выполнены дополнительные условия гладкости $f \in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi \in C^2([0,\infty))$, $\psi \in C^1([0,\infty))$, $\mu \in C^2([0,\infty))$ и условие согласования второго порядка (12), то сильное обобщённое решение задачи (1), (3) и (4) является классическим.

Утверждение 6. *Пусть выполняются условия гладкости* $f \in C(\overline{Q}\times\mathbb{R})$, $F \in C(\overline{Q})$, $\varphi \in C^1([0,\infty))$, $\psi \in C([0,\infty))$, $\mu \in C^1([0,\infty))$ *и условия согласования (10) и (11). Тогда функция* u *является сильным обобщённым решением задачи (1), (3) и (4) тогда и только тогда, когда функция* u *является слабым решением задачи (1), (3) и (4).*

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.1 из работы [41].

Теорема 8. *Пусть выполняются условия гладкости* $f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C(\overline{Q})$, $\varphi \in C^1([0,\infty))$, $\psi \in C([0,\infty))$, $\mu \in C^1([0,\infty))$, *условия согласования (10), (11) и функция* f *удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция* $k \in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ *такая, что* $|f(t,x,z_1) - f(t,x,z_2)| \leqslant k(t,x)|z_1 - z_2|$. *Тогда первая смешанная задача (1), (3) и (4) имеет единственное непрерывно дифференцируемое сильное обобщённое решение* u, *представимое в виде (7)–(9).*

Доказательство. Согласно утверждению 6 имеют место представления (7)–(9) сильного обобщённого решения u. Непрерывные функции $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ однозначно определяются в силу теоремы 2, а из условий гладкости, указанных в данной теореме, следует, что $u^{(1)} \in C^1(\overline{Q^{(1)}})$ и $u^{(2)} \in C^1(\overline{Q^{(2)}})$. Из первых двух равенств (26) и условий согласования (10) и (11) заключаем, что $u \in C^1(\overline{Q})$. Теорема доказана.

Заключение. В статье были сформулированы достаточные условия, при выполнении которых существует единственное классическое решение первой смешанной задачи в криволинейном квадранте для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом. Показано, что нарушение условий согласования приводит к невозможности построения классического решения во всём криволинейном квадранте. В случае невыполнения данных условий рассмотрена задача с условиями сопряжения на характеристике. В случае недостаточной гладкости исходных данных построены слабое, обобщённое и сильное обобщённое решения начальной задачи и доказана их единственность.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ben Q.Li.* Discontinuous Finite Elements in Fluid Dynamics and Heat Transfer. London, 2006.
2. *Литвинов В.Л.* Решение краевых задач с движущимися границами при помощи приближённого метода построения решений интегро-дифференциальных уравнений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26. № 2. С. 188–199.
3. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Об одном методе замены переменных для волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами // Журн. Средне-Волжского мат. о-ва. 2020. Т. 22. № 2. С. 188–199.
4. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В.* Об одном методе получения аналитического решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2012. Вып. 3. С. 145–151.
5. *Litvinov V.L.* Solution of model boundary value problems on oscillations of mechanical systems with moving boundaries by the Duhamel method // J. of Physics: Conf. Ser. 2019. V. 1392. Art. 012015.
6. *Tao L.N.* A method for solving moving boundary problems // SIAM J. on Appl. Math. 1986. V. 46. № 2. P. 254–264.
7. *Davis G.B., Hill J.M.* A moving boundary problem for the sphere // IMA J. of Appl. Math. 1982. V. 29. № 1. P. 99–111.
8. *Rodrigo M.R., Thamwattana N.* A unified analytical approach to fixed and moving boundary problems for the heat equation // Mathematics. 2021. V. 9. № 7. Art. 749.
9. *Čanić S.* Moving boundary problems // Bull. Amer. Math. Soc. 2021. V. 58. P. 79–106.
10. *Pelloni B., Pinotsis D.A.* Moving boundary value problems for the wave equation // J. of Comput. and Appl. Math. 2010. V. 234. № 6. P. 1685–1691.
11. *Pelloni B., Pinotsis D.A.* The Klein–Gordon equation in a domain with time-dependent boundary // Studies in Appl. Math. 2008. V. 121. № 3. P. 291–312.
12. *Корзюк В.И., Столярчук И.И.* Классическое решение первой смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка в криволинейной полуполосе с переменными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 1. С. 77–88.
13. *Остапенко В.А.* Первая краевая задача для телеграфного уравнения в области с подвижной границей // Вестн. Днепропетровского ун-та. Сер. Моделирование. 2011. Вып. 3. № 8. С. 30–54.
14. *Корзюк В.И., Козловская И.С., Наумовец С.Н.* Классическое решение в криволинейной полуполосе первой смешанной задачи для волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 1. С. 99–109.

15. *Корзюк В.И., Рудько Я.В.* Классическое решение первой смешанной задачи для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 2. С. 174–184.
16. *Корзюк В.И., Рудько Я.В.* Классическое решение задачи Коши для одномерного квазилинейного волнового уравнения // Докл. НАН Беларуси. 2023. Т. 67. № 1. С. 14–19.
17. *Korzyuk V.I., Rudzko J.V.* Curvilinear parallelogram identity and mean-value property for a semilinear hyperbolic equation of second-order // arXiv:2204.09408.
18. *Корзюк В.И.* Уравнения математической физики. М., 2021.
19. *Корзюк В.И., Ковнацкая О.А., Севастюк В.А.* Задача Гурса на плоскости для квазилинейного гиперболического уравнения // Докл. НАН Беларуси. 2022. Т. 66. № 4. С. 391–396.
20. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. М., 1982.
21. *Mitrinović D.S., Pečarić J.E., Fink A.M.* Inequalities Involving Functions and their Integrals and Derivatives. Dordrecht, 1991.
22. *Корзюк В.И., Столярчук И.И.* Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения типа Клейна–Гордона–Фока с неоднородными условиями согласования // Докл. НАН Беларуси. 2019. Т. 63. № 1. С. 7–13.
23. *Корзюк В.И., Козловская И.С., Наумовец С.Н.* Классическое решение первой смешанной задачи одномерного волнового уравнения с условиями типа Коши // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2015. № 1. С. 7–21.
24. *Корзюк В.И., Наумовец С.Н., Сериков В.П.* Смешанная задача для одномерного волнового уравнения с условиями сопряжения и производными второго порядка в граничных условиях // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2020. № 3. С. 287–297.
25. *Корзюк В.И., Козловская И.С.* Классические решения задач для гиперболических уравнений. Ч. 2. Минск, 2017.
26. *Моисеев Е.И., Корзюк В.И., Козловская И.С.* Классическое решение задачи с интегральным условием для одномерного волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1373–1385.
27. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М., 1978.
28. *Friedrichs K.O.* Nonlinear hyperbolic differential equations for functions of two independent variables // Amer. J. of Math. 1948. V. 70. № 3. P. 555–589.
29. *Хромов А.П.* Расходящиеся ряды и обобщённая смешанная задача для волнового уравнения простейшего вида // Изв. Саратовского ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22. № 3. С. 322–331.
30. *Evans L.C.* Partial Differential Equations. Providence, 2010.
31. *DiBenedetto E.* Partial Differential Equations. Boston, 2010.
32. *Ikeda M., Inui T., Wakasugi Y.* The Cauchy problem for the nonlinear damped wave equation with slowly decaying data // Nonlin. Differ. Equat. Appl. 2017. V. 50. № 2. Art. № 10.
33. *Iwamiya T.* Global existence of mild solutions to semilinear differential equations in Banach spaces // Hiroshima Math. J. 1986. V. 50. P. 499–530.
34. *Byszewski L.* Existence and uniqueness of a classical solution to a functional-differential abstract nonlocal Cauchy problem // J. of Appl. Math. and Stoch. Anal. 1999. V. 12. № 1. P. 91–97.
35. *Демиденко Г.В., Кудрявцев А.А.* Краевые задачи в четверти плоскости для уравнения Рэлея–Бишопа // Мат. заметки Северо-Вост. федерал. ун-та. 2021. Т. 28. № 3. С. 5–18.
36. *Бондарь Л.Н., Демиденко Г.В., Пинтус Г.М.* Задача Коши для одной псевдогиперболической системы // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2020. Т. 60. № 4. С. 626–638.
37. *Бондарь Л.Н., Демиденко Г.В.* Краевые задачи для одного псевдогиперболического уравнения в четверти плоскости // Мат. тр. 2020. Т. 24. № 2. С. 3–23.
38. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* О единственности решения смешанной задачи для волнового уравнения с нелокальными граничными условиями // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 5. С. 656–661.
39. *Егоров Ю.В.* К теории обобщённых функций // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45. № 5. С. 3–40.
40. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1999.
41. *Харибегашвили С.С., Джохадзе О.М.* О глобальных и взрывных решениях смешанной задачи с нелинейным граничным условием для одномерного полулинейного волнового уравнения // Мат. сб. 2014. Т. 205. № 4. С. 121–148.

Белорусский государственный университет,
г. Минск,
Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск

Поступила в редакцию 04.01.2023 г.
После доработки 26.06.2023 г.
Принята к публикации 20.07.2023 г.