ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 8, с. 1084–1088

УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ

УДК 517.962.2+517.929.2

ЛИНЕЙНЫЕ РЕКУРРЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЫПУКЛЫХ КОМПАКТОВ И ДИАМЕТРЫ ИХ РЕШЕНИЙ

© 2023 г. А. С. Войделевич

В пространстве выпуклых компактов с операцией сложения по Минковскому и операцией умножения матрицы на множество рассмотрены линейные рекуррентные уравнения первого порядка. Дано полное описание таких уравнений, все решения которых имеют постоянный диаметр. Для уравнений специального вида вычислены показатели Ляпунова последовательностей диаметров их решений.

DOI: 10.31857/S0374064123080071, EDN: IOVIRW

Введение. Дифференциальные уравнения с производной Хукухары, введённые в статье [1], рассматривались во многих работах (см., например, [2–4]) и вызывают определённый интерес у специалистов по дифференциальным уравнениям. Поэтому, как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, имеет смысл, наряду с дифференциальными уравнениями с производной Хукухары, рассмотреть и их дискретные аналоги, поскольку дифференциальные уравнения – предельный случай дискретных уравнений.

В работе рассматриваются линейные рекуррентные уравнения в пространстве выпуклых компактов. Решения таких уравнений представляют собой последовательности компактных выпуклых множеств пространства $\mathbb{R}^d$ при некотором $d \in \mathbb{N}$, а значит, обладают нетривиальными геометрическими характеристиками, совокупность которых по существу определяет свойства самих решений. Некоторые геометрические характеристики решений дифференциальных уравнения с производной Хукухары рассматривались в статьях автора [5–7].

1. Основные определения и формулировки теорем. Прежде чем сформулировать полученные результаты, введём необходимые обозначения и приведём ряд определений.

Через $\Omega(\mathbb{R}^d)$ будем обозначать семейство всех непустых ограниченных подмножеств векторного пространства $\mathbb{R}^d$, а через $K_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d)$ – его подсемейство, состоящее из всех непустых выпуклых компактных подмножеств. *Диаметром* $\operatorname{diam} X$ множества $X \in \Omega(\mathbb{R}^d)$ называется число $\sup\limits_{a,b\in X} \|b-a\|$, здесь и ниже через $\|\cdot\|$ обозначается евклидова норма.

Суммой Минковского $Z = X+Y$ двух непустых множеств $X, Y \subset \mathbb{R}^d$ называется множество $Z \stackrel{\text{def}}{=} \{x+y\colon x\in X,\ y \in Y\}$. Для действительной матрицы A, состоящей из d столбцов, и множества $X \subset \mathbb{R}^d$ через AX обозначим множество $\{Ax\colon x\in X\}$. В том частном случае, когда $A = \operatorname{diag}[\alpha,\ldots,\alpha]$, вместо AX пишем αX. Отметим, что для произвольных действительных матриц A, B и множества $X\subset\mathbb{R}^d$, вообще говоря, $(A+B)X \neq AX+BX$.

Итак, на совокупности непустых выпуклых компактов определены операции сложения (по Минковскому) и умножения на матрицу. Семейство $K_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d)$ замкнуто относительно указанных операций, а значит, мы можем рассмотреть линейное рекуррентное уравнение

$$X(t+1) = \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=1}^{n} A_{ij}X(t-j), \quad X(0), X(1), \ldots, X(m-1) \in K_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d), \quad t \geqslant m-1, \qquad (1)$$

где d, m и n – фиксированные натуральные числа, A_{ij} – действительные $d\times d$-матрицы, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, суммирования – это операции сложения по Минковскому. Уравнение (1) в соответствии с общепринятой математической терминологией будем называть *линейным рекуррентным однородным уравнением m-го порядка размерности d и ранга n с постоянными* *коэффициентами в пространстве выпуклых компактов* (в уравнение (1) при некотором фиксированном j может входить меньше, чем n слагаемых (пусть k), в этом случае считаем, что матрицы A_{ij}, $i=\overline{k+1,n}$, нулевые).

Определение. *Решением* $X(\cdot)$ линейного уравнения (1) называется последовательность $(X(t))_{t\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}}$ выпуклых компактов в $\mathbb{R}^d$, при подстановке которых в (1) получается при каждом натуральном $t\geqslant m-1$ верное равенство; множества $X(0)$, $\ldots$, $X(m-1)$ называются *начальными множествами* уравнения (1). *Диаметром* решения $X(\cdot)$ назовём числовую последовательность $(\operatorname{diam} X(t))_{t\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}}$. Будем говорить, что у уравнения (1) все решения *постоянного диаметра*, если из того, что начальные множества решения имеют один и тот же диаметр, следует, что и все остальные элементы решения имеют тот же диаметр, т.е.

$$\operatorname{diam} X(t)=\operatorname{diam} X(0)=\operatorname{diam} X(1)=\ldots=\operatorname{diam} X(m-1)$$

при любом натуральном $t\geqslant m$.

Естественно возникает задача получить необходимое и достаточное условие того, что у уравнения (1) все решения постоянного диаметра. В работе найдено полное решение этой задачи для уравнения (1) первого порядка, т.е. для уравнения

$$X(t+1)=\sum_{i=1}^{n}A_iX(t),\quad X(0)\in K_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d),\quad t\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}. \tag{2}$$

Для уравнения (2) понятие решения постоянного диаметра упрощается и равносильно выполнению равенства $\operatorname{diam} X(t)=\operatorname{diam} X(0)$ при всех $t\in\mathbb{N}$. Необходимое и достаточное условие того, что у уравнения (2) все решения постоянного диаметра, даёт следующая

Теорема 1. *У уравнения (2) тогда и только тогда все решения постоянного диаметра, когда существуют такие действительные числа* α_1, α_2, $\ldots$, α_n *и ортогональная* $d\times d$*-матрица* A, *что* $\sum_{i=1}^n|\alpha_i|=1$ *и* $A_i=\alpha_iA$, $1\leqslant i\leqslant n$.

Рассмотрим частный случай уравнения (2):

$$X(t+1)=\alpha X(t)+AX(t),\quad X(0)\in K_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d),\quad t\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}, \tag{3}$$

где $\alpha\in\mathbb{R}$ и $A\in M_d(\mathbb{R})$. Через $\mu(A)$ обозначим максимальное по модулю собственное значение матрицы A. *Показатель Ляпунова* $\lambda[x]$ произвольной последовательности $x(0)$, $x(1)$, $\ldots$ действительных чисел определяется по формуле

$$\lambda[x]\stackrel{\text{def}}{=}\varlimsup_{t\to+\infty}|x(t)|^{1/t}.$$

Показатель Ляпунова $\lambda[x]$ называется *строгим*, если существует предел $\lim\limits_{t\to+\infty}|x(t)|^{1/t}$. Вычислены показатели Ляпунова диаметров решений уравнения (3), которые при $t=0$ обладают непустой внутренностью, а именно, доказана следующая

Теорема 2. *Пусть* $X_0\in K_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$ *– выпуклое компактное множество с непустой внутренностью, а* $X(\cdot)$ *– такое решение уравнения (3), что* $X(0)=X_0$. *Тогда показатель Ляпунова* $\lambda[\operatorname{diam} X]$ *диаметра решения* $X(\cdot)$ *является строгим и равен* $|\alpha|+|\mu(A)|$.

2. Доказательства теорем. Докажем несколько вспомогательных утверждений. Через $\mathbb{S}^{d-1}\stackrel{\text{def}}{=}\{x\in\mathbb{R}^d\colon \|x\|=1\}$ обозначим единичную $(d-1)$-мерную сферу с центром в нуле.

Лемма 1. *Пусть* $\mathcal{B}=\{B_i\colon i\in\mathbb{N}\}$ *– множество действительных* $d\times d$*-матриц. Если для каждого вектора* $v\in\mathbb{S}^{d-1}$ *найдётся индекс* $i=i(v)$ *такой, что* $B_iv\in\mathbb{S}^{d-1}$, *то множество* $\mathcal{B}$ *содержит хотя бы одну ортогональную матрицу.*

Доказательство. Обозначим $F_i=\{v\in\mathbb{S}^{d-1}\colon B_iv\in\mathbb{S}^{d-1}\}$, $i\in\mathbb{N}$. Множества F_i замкнутые и $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}F_i=\mathbb{S}^{d-1}$. По теореме Бэра о категориях [8, с. 78] одно из множеств, скажем F_1, содержит единичный вектор v вместе с некоторой его окрестностью на сфере $\mathbb{S}^{d-1}$. Покажем, что B_1 – ортогональная матрица. Выберем какой-либо вектор $u\in\mathbb{S}^{d-1}$, ортогональный вектору v. Покажем, что $\|B_1u\| = 1$ и $B_1v \perp B_1u = 0$. Найдётся такой угол $\varphi_0 > 0$, что $v\cos\varphi + u\sin\varphi \in F_1$ при всех $\varphi \in (0, \varphi_0)$. Следовательно,

$$(v\cos\varphi + u\sin\varphi)^{\mathrm{T}} B_1^{\mathrm{T}} B_1 (v\cos\varphi + u\sin\varphi) =$$

$$= \cos^2\varphi + u^{\mathrm{T}} B_1^{\mathrm{T}} B_1 u \sin^2\varphi + v^{\mathrm{T}} B_1^{\mathrm{T}} B_1 u \sin(2\varphi) = 1, \quad \varphi \in (0, \varphi_0). \tag{4}$$

Продифференцировав тождество (4) по переменной φ, получим

$$(u^{\mathrm{T}} B_1^{\mathrm{T}} B_1 u - 1)\sin(2\varphi) + 2v^{\mathrm{T}} B_1^{\mathrm{T}} B_1 u \cos(2\varphi) = 0, \quad \varphi \in (0, \varphi_0),$$

а значит, $u^{\mathrm{T}} B_1^{\mathrm{T}} B_1 u = 1$ и $v^{\mathrm{T}} B_1^{\mathrm{T}} B_1 u = 0$.

Произвольный вектор $w \in \mathbb{R}^d$ представи́м в виде линейной комбинации $w = \alpha v + \beta u$, где $\|u\| = 1$ и $v \perp u$. Поэтому $\|B_1 w\|^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \|w\|^2$, т.е. B_1 – ортогональная матрица. Лемма доказана.

Опорной функцией произвольного ограниченного множества $X \in \Omega(\mathbb{R}^d)$ называется функция $s(X, \cdot)\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, определяемая равенством $s(X, v) \overset{\mathrm{def}}{=} \sup\limits_{x \in X} v^{\mathrm{T}} x$. Несложно видеть, что для произвольного вектора $v \in \mathbb{R}^d$ верны соотношения $s(\mathbb{S}^{d-1}, v) = s(\mathbb{B}^d, v) = \|v\|$, где через $\mathbb{B}^d \overset{\mathrm{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^d\colon \|x\| \leqslant 1\}$ обозначен замкнутый шар единичного радиуса с центром в начале координат.

Лемма 2. *Для любого* $X \in K_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$ *верно равенство* $\operatorname{diam} X = \max\limits_{v \in \mathbb{S}^{d-1}} (s(X, v) + s(X, -v))$.

Доказательство. Выберем произвольно вектор $v \in \mathbb{S}^{d-1}$. Так как X – компактное множество, то найдутся такие точки $p, q \in X$, что $s(X, v) = v^{\mathrm{T}} p$ и $s(X, -v) = -v^{\mathrm{T}} q$. Поэтому $s(X, v) + s(X, -v) = v^{\mathrm{T}}(p - q) \leqslant \|p - q\| \leqslant \operatorname{diam} X$. Так как v – произвольный единичный вектор, то $\sup\limits_{v \in \mathbb{S}^{d-1}} (s(X, v) + s(X, -v)) \leqslant \operatorname{diam} X$.

Утверждение леммы очевидно выполнено для одноэлементного множества X, поэтому далее без нарушения общности будем считать, что множество X содержит хотя бы две точки. Из компактности множества X следует существование таких точек a и $b \in X$, что $\operatorname{diam} X = \|b - a\| \neq 0$. Пусть $v = (b - a)/\|b - a\|$. Тогда

$$s(X, v) + s(X, -v) \geqslant v^{\mathrm{T}} b - v^{\mathrm{T}} a = v^{\mathrm{T}}(b - a) = \|b - a\| = \operatorname{diam} X,$$

а значит, $\max\limits_{v \in \mathbb{S}^{d-1}} (s(X, v) + s(X, -v)) = \operatorname{diam} X$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть* $X \in K_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$ *– центрально-симметричное относительно нуля множество, т.е.* $X = -X$, *тогда* $\operatorname{diam} X = 2 \max\limits_{v \in \mathbb{S}^{d-1}} s(X, v)$.

Далее для упрощения будем писать $\alpha X - \beta X$ вместо $\alpha X + (-\beta) X$.

Лемма 3. *Пусть* α *и* β *– неотрицательные действительные числа. Равенство* $\operatorname{diam} X = \operatorname{diam}(\alpha X - \beta X)$ *верно для любого* $X \in K_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$, *если и только если* $\alpha + \beta = 1$.

Доказательство. Если $\operatorname{diam} X = \operatorname{diam}(\alpha X - \beta X)$ при всех $X \in K_{\mathrm{c}}(\mathrm{R}^d)$, то, в частности, получаем $2 = \operatorname{diam} \mathbb{B}^d = \operatorname{diam}(\alpha \mathbb{B}^d - \beta \mathbb{B}^d) = \operatorname{diam}(\alpha + \beta)\mathbb{B}^d = 2(\alpha + \beta)$, т.е. $\alpha + \beta = 1$.

Докажем, что если $\alpha, \beta \geqslant 0$ и $\alpha + \beta = 1$, то $\operatorname{diam} X = \operatorname{diam}(\alpha X - \beta X)$ при всех $X \in K_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$. Выберем произвольно две точки $p_1, p_2 \in \alpha X - \beta X$. Для некоторых точек $a_i, b_i \in X$ верно равенство $p_i = \alpha a_i - \beta b_i$, $i = 1, 2$. Следовательно,

$$\|p_2 - p_1\| = \|\alpha(a_2 - a_1) - \beta(b_2 - b_1)\| \leqslant \alpha\|a_2 - a_1\| + \beta\|b_2 - b_1\| \leqslant (\alpha + \beta)\operatorname{diam} X = \operatorname{diam} X.$$

Поэтому $\operatorname{diam}(\alpha X - \beta X) \leqslant \operatorname{diam} X$.

Пусть $\operatorname{diam} X = \|b - a\|$, где $a, b \in X$. Тогда обе точки $\alpha a - \beta b$ и $\alpha b - \beta a$ принадлежат множеству $\alpha X - \beta X$, а значит, $\operatorname{diam}(\alpha X - \beta X) \geqslant \|\alpha b - \beta a - \alpha a + \beta b\| = (\alpha + \beta)\|b - a\| = \operatorname{diam} X$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Предположим, что $A_i = \alpha_i A$, $1 \leqslant i \leqslant n$, для некоторой ортогональной матрицы A и действительных чисел α_1, α_2, $\ldots$, α_n таких, что $\sum_{i=1}^n |\alpha_i| = 1$.

Обозначим $S = \{i \in \{1, 2, \ldots, n\}\colon \alpha_i > 0\}$ и, поскольку операция сложения по Минковскому коммутативна, преобразуем уравнение (2) к виду

$$X(t+1) = \left(\sum_{i\in S} \alpha_i\right) AX(t) - \left(\sum_{i\notin S} -\alpha_i\right) AX(t).$$

Так как $\sum_{i\in S} \alpha_i + \sum_{i\notin S} -\alpha_i = \sum_{i=1}^n |\alpha_i| = 1,$ то согласно лемме 3 все решения уравнения (2) постоянного диаметра.

Предположим, что все решения уравнения (2) постоянного диаметра. Через

$$[p, q] \stackrel{\text{def}}{=} \{p + t(q - p)\colon t \in [0, 1]\}$$

обозначим отрезок с концами $p, q \in \mathbb{R}^d$. Выберем произвольно вектор $v \in \mathbb{S}^{d-1}$ и рассмотрим решение $X(\cdot)$ уравнения (2) с начальным условием $X(0) = [0, v]$. Тогда $X(1)$ – выпуклая оболочка точек вида $\sum_{i\in I} A_i v,$ где $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$. Так как $\operatorname{diam} X(1) = \operatorname{diam} X(0) = 1,$ то $\|(\sum_{i\in I} A_i - \sum_{j\in J} A_j)v\| = 1$ для некоторых непересекающихся подмножеств $I,$ J индексов. Ввиду леммы 1 для некоторой пары непересекающихся подмножеств $(I, J) \subset \{1, 2, \ldots, n\}^2$ матрица $\sum_{i\in I} A_i - \sum_{j\in J} A_j$ ортогональна.

Теперь рассмотрим решение $X(\cdot)$ уравнения (2) с начальным значением $X(0) = \mathbb{B}^d$. Тогда, согласно следствию 1, получаем равенства

$$2 = \operatorname{diam} X(1) = 2 \max_{v\in\mathbb{S}^{d-1}} s\left(\sum_{i=1}^n A_i \mathbb{B}^d, v\right) = 2 \max_{v\in\mathbb{S}^{d-1}} \sum_{i=1}^n s(\mathbb{B}^d, A_i^{\mathrm{T}} v) = 2 \max_{v\in\mathbb{S}^{d-1}} \sum_{i=1}^n \|A_i^{\mathrm{T}} v\|.$$

Отсюда вытекает, что для произвольного вектора $v \in \mathbb{S}^{d-1}$ верны соотношения

$$1 \geqslant \sum_{i=1}^n \|A_i^{\mathrm{T}} v\| \geqslant \left\|\left(\sum_{i\in I} A_i - \sum_{j\in J} A_j\right)^{\mathrm{T}} v\right\| = 1.$$

Следовательно, для произвольного вектора $v \in \mathbb{S}^{d-1}$ векторы $A_1^{\mathrm{T}} v,$ $A_2^{\mathrm{T}} v,$ $\ldots,$ $A_n^{\mathrm{T}} v$ коллинеарны. Поэтому найдутся такие действительные числа $\alpha_1,$ $\alpha_2,$ $\ldots,$ α_n и матрица A, для которых $A_i = \alpha_i A,$ $1 \leqslant i \leqslant n$. Поскольку матрица $\sum_{i\in I} A_i - \sum_{j\in J} A_j$ ортогональная, то матрица A также может быть выбрана ортогональной. Так как $\sum_{i=1}^n \|A_i^{\mathrm{T}}\| = 1,$ то $\sum_{i=1}^n |\alpha_i| = 1$. Теорема доказана.

Лемма 4. *Пусть $X(\cdot)$ – решение уравнения (3) такое, что $X(0) = \mathbb{B}^d$. Тогда показатель Ляпунова $\lambda[\operatorname{diam} X]$ диаметра решения $X(\cdot)$ является строгим и равен $|\alpha| + |\mu(A)|$.*

Доказательство. Для любого $t \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ верно равенство $X(t) = \sum_{k=0}^t C_t^k \alpha^{t-k} A^k \mathbb{B}^d$. Следовательно, $s(X(t), v) = \sum_{k=0}^t C_t^k |\alpha|^{t-k} \|(A^{\mathrm{T}})^k v\|,$ $v \in \mathbb{S}^{d-1}$. Так как матрицы A и A^{T} подобны, то $\mu(A^{\mathrm{T}}) = \mu(A)$. Согласно формуле Гельфанда справедливо равенство

$$\lim_{k\to+\infty} \|(A^{\mathrm{T}})^k\|^{1/k} = |\mu(A)|.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такая постоянная $c_\varepsilon > 0,$ что $\|(A^{\mathrm{T}})^k\| \leqslant c_\varepsilon(|\mu(A) + \varepsilon)^k$ при всех $k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$. Таким образом, имеем

$$s(X(t), v) \leqslant \sum_{k=0}^t C_t^k |\alpha|^{t-k} \|(A^{\mathrm{T}})^k\| \leqslant c_\varepsilon \sum_{k=0}^t C_t^k |\alpha|^{t-k} (|\mu(A)| + \varepsilon)^k =$$

$$= c_\varepsilon(|\alpha| + |\mu(A)| + \varepsilon)^t, \quad v \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

Поэтому в силу следствия 1 верно соотношение

$$\lambda[\operatorname{diam} X] = \varlimsup_{t\to+\infty} (\operatorname{diam} X(t))^{1/t} \leqslant |\alpha| + |\mu(A)| + \varepsilon.$$

Устремив в последнем неравенстве ε к нулю, получим, что $\lambda[\operatorname{diam} X] \leqslant |\alpha| + |\mu(A)|$.

Пусть $v = x + iy$ – единичный собственный вектор матрицы $A^{\text{т}}$, соответствующий собственному значению $\mu(A)$. Тогда $\|(A^{\text{т}})^k x\| + \|(A^{\text{т}})^k y\| \geqslant \|(A^{\text{т}})^k v\| = |\mu(A)|^k$, $k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$. Следовательно, $s(X(t), x) + s(X(t), y) \geqslant (|\alpha| + |\mu(A)|)^t$ при $t \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$. Так как $\|x\| \leqslant 1$ и $\|y\| \leqslant 1$, то $\operatorname{diam} X(t) \geqslant (|\alpha| + |\mu(A)|)^t$, а значит, $\varliminf_{t\to+\infty} (\operatorname{diam} X(t))^{1/t} \geqslant |\alpha| + |\mu(A)|$. Последнее и ранее установленные неравенства означают, что показатель Ляпунова $\lambda[\operatorname{diam} X]$ является строгим и равен $|\alpha| + |\mu(A)|$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Выберем два шара $p_1 + r_1\mathbb{B}^d$ и $p_2 + r_2\mathbb{B}^d$ таких, что

$$r_1 > 0 \quad \text{и} \quad p_1 + r_1\mathbb{B}^d \subset X_0 \subset p_2 + r_2\mathbb{B}^d.$$

Рассмотрим решения $Y(\cdot)$, $X_1(\cdot)$ и $X_2(\cdot)$ уравнения (3) с начальными условиями $Y(0) = \mathbb{B}^d$, $X_1(0) = p_1 + r_1\mathbb{B}^d$ и $X_2(0) = p_2 + r_2\mathbb{B}^d$. Несложно видеть, что $X_i(t) = (\alpha E + A)^t p_i + r_i Y(t)$ при всех $t \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$. Согласно лемме 4 верно равенство $\lim_{t\to+\infty} (\operatorname{diam} Y(t))^{1/t} = |\alpha| + |\mu(A)|$. Так как $X_1(t) \subset X(t) \subset X_2(t)$ и $\operatorname{diam} X_i(t) = r_i \operatorname{diam} Y(t)$, то

$$r_1 \operatorname{diam} Y(t) \leqslant \operatorname{diam} X(t) \leqslant r_2 \operatorname{diam} Y(t) \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{N} \bigcup \{0\},$$

поэтому $\lim_{t\to+\infty} (\operatorname{diam} X(t))^{1/t} = \lim_{t\to+\infty} (\operatorname{diam} Y(t))^{1/t} = |\alpha| + |\mu(A)|$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hukuhara M.* Integration des applications measurables dont la valeur est un compact convexe // Funk. Ekv. 1967. V. 10. P. 205–223.
2. *Lakshmikantham V., Gnana Bhaskar T., Vasundhara Devi J.* Theory of Set Differential Equations in Metric Spaces. London, 2006.
3. *Очеретнюк Е.В., Слынько В.И.* Качественный анализ решений нелинейных дифференциальных уравнений с производной Хукухары в пространстве $\operatorname{conv}\mathbb{R}^2$ // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 8. С. 1004–1018.
4. *Атамась И.В., Слынько В.И.* Формула Лиувилля–Остроградского для некоторых классов дифференциальных уравнений с производной Хукухары // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 11. С. 1452–1464.
5. *Войделевич А.С.* Стационарные линейные дифференциальные уравнения с производной Хукухары, сохраняющие многогранники // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 12. С. 1695–1698.
6. *Войделевич А.С.* Показатели Ляпунова радиусов вписанных и описанных сфер решений стационарных линейных дифференциальных уравнений с производной Хукухары // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 4. С. 572–576.
7. *Войделевич А.С.* Линейные дифференциальные уравнения с производной Хукухары, сохраняющие свойство постоянства ширины // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 1. С. 17–22.
8. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 2009.

Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск

Поступила в редакцию 20.02.2023 г.
После доработки 21.06.2023 г.
Принята к публикации 20.07.2023 г.