

УДК 517.977.55

ВНУТРЕННОСТЬ ИНТЕГРАЛА ОТ МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ И ЗАДАЧИ С ЛИНЕЙНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМОЙ

© 2023 г. М. В. Балашов

Изучена зависимость радиуса шара с центром в нуле, вписанного в значения интеграла от многозначного отображения, от верхнего предела интегрирования. Для некоторых типов интегралов найдены точные асимптотики радиуса по верхнему пределу, когда верхний предел стремится к нулю. Рассмотрены примеры нахождения этого радиуса. Полученные результаты применены для вывода новых достаточных условий равномерно непрерывной зависимости минимального времени и решения-точки в линейной задаче быстрогодействия от начальных данных. Также рассмотрены приложения в некоторых алгоритмах со множественностью достижимости линейной управляемой системы.

DOI: 10.31857/S0374064123080095, EDN: IPXHTM

Введение. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклое компактное множество, $0 \in U$, $F(s) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица с гладкими компонентами. Рассмотрим интеграл от многозначного отображения $F(s)U$

$$\mathcal{F}(t) = \int_0^t F(s)U \, ds. \quad (1)$$

Многозначный интеграл здесь и далее мы будем понимать в смысле интеграла Аумана [1]

$$\int_0^t F(s)U \, ds = \left\{ \int_0^t F(s)u(s) \, ds : u(s) \in U \right\},$$

где $u(s)$ – измеримый селектор. По теореме Ляпунова о векторной мере значение интеграла (1) есть выпуклое и замкнутое множество [2]. Теорию интегралов от многозначных отображений можно найти в монографии [3] (см. также библиографию в ней).

Одно из важных приложений интеграла – описание множества достижимости управляемой системы, в первую очередь линейной. Пусть линейная управляемая система задана в виде включения

$$x' \in Ax + U, \quad x(0) = x_0, \quad (2)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $0 \in U \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклый компакт. Пусть $\mathcal{R}(x(0), t)$ – множество достижимости этой системы. Напомним, что для всякого $t \geq 0$ множество достижимости $\mathcal{R}(x(0), t)$ для системы (2) есть множество всех точек $x(t)$ по всем решениям $x(\cdot)$ системы (2). Множество достижимости выпукло и замкнуто [4, гл. 2, § 2.2, теорема 1]. Легко получить представление множества достижимости в виде интеграла

$$\mathcal{R}(x(0), t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}U \, ds = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{As}U \, ds. \quad (3)$$

Обозначим $\mathcal{R}_0(t) = \mathcal{R}(0, t) = \int_0^t e^{As}U \, ds$.

Включение $0 \in U$ обеспечивает монотонность интеграла (1): $\mathcal{F}(t_1) \subset \mathcal{F}(t_2)$ при $t_1 \leq t_2$. Также заметим, что в силу аддитивности интеграла Аумана справедливо

$$\mathcal{F}(t_2) = \mathcal{F}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} F(s)U ds, \quad t_1 \leq t_2.$$

Введём необходимые определения. Через (x, y) будем обозначать скалярное произведение (x, y) для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^n$ – стандартный ортонормированный базис в \mathbb{R}^n . Обозначим через $B_R(x)$ замкнутый шар с центром x радиуса $R > 0$. Для множества M обозначим через $\text{cl } M$ и ∂M замыкание и границу множества M соответственно. Определим функцию расстояния

$$\varrho_M(x) = \inf_{y \in M} \|x - y\|.$$

Расстоянием в метрике Хаусдорфа между компактными множествами $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ называется величина

$$h(M_1, M_2) = \max \left\{ \max_{x \in M_1} \varrho_{M_2}(x), \max_{x \in M_2} \varrho_{M_1}(x) \right\}.$$

Полунормой компакта $M \subset \mathbb{R}^n$ называется число $\|M\| = h(M, \{0\}) = \max_{x \in M} \|x\|$.

Через $\text{co } M$ будем обозначать выпуклую оболочку множества $M \subset \mathbb{R}^n$.

Для замкнутого множества $M \subset \mathbb{R}^n$ обозначим конус Булигана в точке $x \in M$ через $\mathcal{C}_M(x) = \{v \in \mathbb{R}^n : \text{для любого } \varepsilon > 0 \text{ существуют } \lambda_k \rightarrow +0 \text{ такие, что } B_\varepsilon(v) \cap (M - x)/\lambda_k \neq \emptyset\}$. Если множество M ещё и выпукло, то $\mathcal{C}_M(x) = \text{cl } \bigcup_{\lambda > 0} (M - x)/\lambda$ [5, с. 174, формула (13)].

Будем обозначать $f \asymp g$ при $t \rightarrow +0$, если существуют числа $C_2 > C_1 > 0$ и $t_0 > 0$ такие, что при всех $t \in (0, t_0)$ выполнены неравенства $C_1 \leq f(t)/g(t) \leq C_2$.

Опорной функцией множества $M \subset \mathbb{R}^n$ в точке $p \in \mathbb{R}^n$ называется $s(p, M) = \sup_{x \in M} (p, x)$.

Отметим, что для множества $\mathcal{F}(t) = \int_0^t F(s)U ds$ легко вычислить опорную функцию. В силу линейности многозначного интеграла

$$s(p, \mathcal{F}(t)) = \int_0^t s(p, F(s)U) ds = \int_0^t s(F^T(s)p, U) ds.$$

Будем говорить, что выпуклое компактное множество $M \subset \mathbb{R}^n$ равномерно выпукло, если существует строго возрастающая функция $\delta : [0, \text{diam } M] \rightarrow [0, +\infty)$, модуль равномерной выпуклости, такая, что для всех $x, y \in M$ выполнено включение [6]

$$(x + y)/2 + B_{\delta(\|x-y\|)}(0) \subset M.$$

Например, M является пересечением замкнутых евклидовых шаров радиуса $R > 0$ тогда и только тогда, когда M равномерно выпукло с модулем $\delta(t) = t^2/(8R)$. Отметим, что любой строго выпуклый компакт из \mathbb{R}^n является равномерно выпуклым с некоторым модулем δ . Будем говорить, что неограниченное множество $M \subset \mathbb{R}^n$ локально равномерно выпукло, если для всякого $R > 0$ множество $M \cap B_R(0)$ равномерно выпукло с модулем δ_R . Любое строго выпуклое замкнутое подмножество $M \subset \mathbb{R}^n$ является локально равномерно выпуклым.

В силу теоремы Дэя–Нордлендера [7, гл. 3, § 3] максимальный модуль равномерной выпуклости среди центрально-симметричных тел диаметра $2R$ имеет евклидов шар, для него

$$\delta(t) = R - \sqrt{R^2 - \frac{t^2}{4}} \geq \frac{t^2}{8R}.$$

Рассмотрим пример задачи быстродействия с системой (2). Через $T_0(x_i)$ будем обозначать минимальное время, за которое решение с начальным условием $x(0) = x_i$ попадает на целевое множество \mathcal{M} .

Пример 1. Пусть в задаче (2)

$$x \in \mathbb{R}^2, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e^{As} = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix}, \quad U = \text{co}(\pm e_1).$$

Пусть $\mathcal{M} = \{x_2 \geq 4\}$. Рассмотрим начальные условия $x_0 = (0, 0)$ и $x_1 = (0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Для $p = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, имеем

$$s(p, \mathcal{R}_0(t)) = \int_0^t |\cos(s - \varphi)| ds.$$

При $t < 2\pi$ $s(p, \mathcal{R}_0(t)) < 4$ и $s(p, \mathcal{R}_0(2\pi)) = 4 = s(p, B_4(0))$ для всякого $\|p\| = 1$. Поэтому $\mathcal{R}_0(2\pi) = B_4(0)$ и оптимальное время $T_0(x_0) = 2\pi$.

Для второго начального условия

$$\mathcal{R}(x_1, t) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \varepsilon + \mathcal{R}_0(t), \quad s(p, \mathcal{R}(x_1, t)) = \varepsilon \sin(\varphi - t) + \int_0^t |\cos(s - \varphi)| ds.$$

Для $\varphi = \pi/2$ имеем для некоторого $t \in (3\pi/2, 2\pi)$

$$4 = \varepsilon \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \int_0^t |\cos(s - 5\pi/2)| ds = \varepsilon \cos t + 2 - \int_{\pi}^t \sin s ds.$$

Отсюда находим

$$\cos T_0(x_1) = \frac{1}{1 + \varepsilon}, \quad T_0(x_1) = 2\pi - \tau,$$

где $\tau \in (0, \pi/2)$,

$$\cos(2\pi - \tau) = \cos \tau = \frac{1}{1 + \varepsilon}, \quad \tau = \arccos \frac{1}{1 + \varepsilon} \sim 2\sqrt{\varepsilon}, \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

Поэтому $T_0(x_1) \sim 2\pi - 2\sqrt{\varepsilon}$, $\varepsilon \rightarrow +0$, и

$$T_0(x_0) - T_0(x_1) \sim 2\sqrt{\varepsilon} = 2\sqrt{\|x_0 - x_1\|}, \quad \varepsilon = \|x_0 - x_1\| \rightarrow +0.$$

Отметим, что при малом $t > 0$ множество $\mathcal{R}_0(t)$ имеет ширину порядка t^2 в направлении вектора e_2 , что и обуславливает условие Гёльдера с показателем $1/2$ по начальным данным в примере 1, более того, легко видеть, что радиус вписанного в $\mathcal{R}_0(t)$ шара с центром в нуле имеет порядок t^2 при $t \rightarrow 0$. Это и подобные наблюдения приводят нас к следующему условию.

Условие (I). Для интеграла (1) существует строго возрастающая функция $r : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ такая, что $r(0) = 0$, $r(t) > 0$ при $t > 0$ и $B_{r(t)}(0) \subset \mathcal{F}(t)$ при $t \geq 0$.

Для функции r будем понимать обратную функцию r^{-1} следующим образом. Если $\mu = r(t)$ и t – точка непрерывности r , то $r^{-1}(\mu) = t$. Если пределы $r(t \pm 0) = \lim_{s \rightarrow t \pm 0} r(s)$ не равны и $\mu \in [r(t - 0), r(t + 0)]$, то $r^{-1}(\mu) = r(t + 0)$.

Определим

$$m_T = \max_{s \in [0, T]} \|F(s)\| \quad \text{и} \quad \mu_T = \min_{\substack{\|h\|=1 \\ s \in [0, T]}} \|F(s)h\|.$$

Условие (I) есть по сути аналитическая форма условия управляемости, в частности N -управляемости из работы [8]. Простейший пример выполнения условия (I) реализуется при существовании такого $d > 0$, что $B_d(0) \subset U$, т.е. нуль – внутренняя точка U . В этом случае $r(t) = \mu_T t d$ при условии, что матрица $F(s)$ не вырождена на отрезке $[0, T]$.

В работе нас будут главным образом интересовать ситуации, когда нуль есть граничная точка множества U , что часто возникает в приложениях, когда размерность множества управлений в (2) меньше размерности фазового пространства, например, U есть отрезок, содержащий нуль. Другая ситуация, которую мы рассмотрим, – это множество U с $C^{1,1}$ гладкой границей, т.е. когда единичная нормаль к U в точке границы ∂U зависит липшицево от точки границы. Этот случай сводится к изучению внутренней интеграла со множеством $U = B_1(p_0)$, $\|p_0\| = 1$.

Статья организована следующим образом. В п. 1 оценим $r(t)$ для интеграла (1) когда $0 \in \partial U$. Будут рассмотрены случаи, когда $0 \in [-u, u] \subset \partial U$ для некоторого вектора $u \neq 0$, а также случай, когда $0 \in \partial U$ – точка $C^{1,1}$ гладкости. Последнее означает, что существует шар радиуса $\rho > 0$ с центром $x_0 \in U$ из U такой, что $0 \in \partial B_\rho(x_0)$. В первом случае покажем, что $r(t)$ по порядку не менее t^n при $t \rightarrow 0$. Во втором случае получим достаточные условия на матрицу $F(s)$ весьма общего вида, при которых $r(t) \asymp t^3$, $t \rightarrow 0$, независимо от размерности n пространства. В п. 2 будут получены новые условия равномерной непрерывности минимального времени и точки-решения задачи быстрогодействия системы (2) с условием $t \rightarrow \min$, для которого $x(t) \in \mathcal{M}$, где \mathcal{M} – терминальное множество. В п. 3 рассмотрим приложение результатов к некоторым задачам оптимизации со множеством достижимости линейной управляемой системы.

1. Оценка $r(t)$ в условии (I).

Теорема 1. Пусть $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $U = \text{co}\{\pm u\}$, $t_0 > 0$. Предположим, что матрица $F(s) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $n - 1$ раз непрерывно дифференцируема и $F^{(n-1)}(s)$ непрерывна по Липшицу при $s \in [0, t_0]$. Пусть $\text{rank}(F(s)u, F'(s)u, \dots, F^{(n-1)}(s)u) = n$ для всех $s \in [0, t_0]$. Тогда $B_{r(t)}(0) \subset \int_0^t F(s)U ds$ и $r(t) \asymp t^n$, $t \rightarrow 0$. При этом порядок $r(t) \asymp t^n$ точный.

Доказательство. Определим для произвольного единичного вектора p функцию $g(s, p) = (p, F(s)u)$, $g_s^{(l)}(s, p) = (p, F^{(l)}(s)u)$, $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Заметим, что $|g(s, p)| = s(p, F(s)U)$.

Покажем, что найдутся такие числа $\beta > 0$ и $t_1 \in (0, t_0)$, что для любого $\|p\| = 1$ и любого $s \in (0, t_1)$ выполняется неравенство

$$\sum_{l=0}^{n-1} |g_s^{(l)}(s, p)| \geq \beta. \tag{4}$$

Предположим, что условие (4) неверно. Тогда найдутся последовательность $s_i \rightarrow 0$ и векторы $\|p_i\| = 1$ такие, что $\sum_{l=0}^{n-1} |g_{s_i}^{(l)}(s_i, p_i)| < 1/i$. Без ограничения общности из компактности единичной сферы следует $p_i \rightarrow p_0$, $\|p_0\| = 1$. Переходя к пределу по i , имеем $\sum_{l=0}^{n-1} |g_{s_i}^{(l)}(0, p_0)| = 0$. Отсюда $(p_0, F^{(l)}(0)u) = 0$ для всех $l = \overline{0, n-1}$, что противоречит условию полного ранга. Условие (4) доказано.

Из [9, следствие 2.1] в силу формулы (4) вытекает существование абсолютной константы $c > 0$ такой, что $\int_0^t |g(s, p)| ds \geq ct^n$ для всех $\|p\| = 1$. Кроме того, $ct^n = s(p, B_{ct^n}(0))$ для всех $\|p\| = 1$. Поскольку последний интеграл есть опорная функция множества $\int_0^t F(s)U ds$, то $B_{ct^n}(0) \subset \int_0^t F(s)U ds$. Отметим, что условие полного ранга при всех $s \in [0, t_0]$ и условия гладкости на $F(s)$ требуются для доказательства указанного выше следствия 2.1 из [9].

Пусть p_0 такой произвольный единичный вектор, что $(p_0, F^{(l)}(0)u) = 0$, $l = \overline{0, n-2}$. Тогда по формуле Тейлора

$$(p_0, F(s)u) = \frac{(p_0, F^{(n-1)}(0)u)}{(n-1)!} s^{n-1} + o(s^{n-1}).$$

Найдётся такое число $t_2 \in (0, t_1)$, что для всех $s \in (0, t_2)$ выполнена оценка

$$|o(s^{n-1})| < \frac{|(p_0, F^{(n-1)}(0)u)|}{(n-1)!} s^{n-1}.$$

Отсюда при $0 < t < t_2$ имеем

$$s \left(p_0, \int_0^t F(s)U ds \right) = \int_0^t |g(s, p_0)| ds \leq 2 \int_0^t \frac{|(p_0, F^{(n-1)}(0)u)|}{(n-1)!} s^{n-1} ds = \frac{2|(p_0, F^{(n-1)}(0)u)|}{n!} t^n.$$

Теорема доказана.

Пусть в системе (2) множество U содержит отрезок ненулевой длины с центром в нуле, удовлетворяющий условию полного ранга из теоремы 1 для матрицы $F(s) = e^{As}$. Тогда $B_{r(t)}(0) \subset \mathcal{R}_0(t)$ с радиусом $r(t) \geq ct^n$.

Теорема 2. Пусть $U = B_1(p_0) \subset \mathbb{R}^n$, $\|p_0\| = 1$. Предположим, что матрица $F(s) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ удовлетворяет в окрестности нуля условию

$$F^T(s) = F_0 + F_1 s + F_2 s^2 + o(s^2), \quad s \rightarrow 0,$$

где F_i , $i = 0, 1, 2$, – фиксированные $n \times n$ -матрицы, $F_0 = I$ – единичная $n \times n$ -матрица и $\|F_1 p_0\| > |(p_0, F_1 p_0)|$. Тогда выполнено включение $B_{r(t)}(0) \subset \int_0^t F(s)B_1(p_0) ds$, и $r(t) \asymp t^3$, $t \rightarrow 0$.

Доказательство. Для всякого вектора $\|p\| = 1$ имеем

$$s(p, \mathcal{F}(t)) = \int_0^t s(F^T(s)p, p_0 + B_1(0)) ds = \int_0^t ((F^T(s)p, p_0) + \|F^T(s)p\|) ds,$$

$$\|F^T(s)p\|^2 = 1 + s^2\|F_1 p\|^2 + 2s(p, F_1 p) + 2s^2(p, F_2 p) + o(s^2),$$

при этом легко видеть, что функция $o(s^2)/s^2$, где $o(s^2)$ – последнее o -малое, равномерно бесконечно малая по $\|p\| = 1$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \|F^T(s)p\| &= \sqrt{1 + s^2\|F_1 p\|^2 + 2s(p, F_1 p) + 2s^2(p, F_2 p) + o(s^2)} = \\ &= 1 + s(p, F_1 p) + \frac{1}{2}s^2(\|F_1 p\|^2 - (p, F_1 p)^2) + s^2(p, F_2 p) + o(s^2), \end{aligned}$$

причём последнее o -малое обладает тем же свойством $o(s^2)/s^2 \rightarrow 0$ при $s \rightarrow 0$ равномерно по $\|p\| = 1$. В результате получаем, что

$$\int_0^t \|F^T(s)p\| ds = t + \frac{t^2}{2}(p, F_1 p) + \frac{t^3}{6}(\|F_1 p\|^2 - (p, F_1 p)^2) + \frac{t^3}{3}(p, F_2 p) + o(t^3),$$

и функция $o(t^3)/t^3$ также равномерно по $\|p\| = 1$ бесконечно малая. Заметим сразу, что ниже стереотипно во всех дальнейших разложениях по малому параметру t встречающиеся функции $o(1) = o(t^3)/t^3$ по $\|p\| = 1$ являются равномерно бесконечно малыми.

Таким образом,

$$s(p, \mathcal{F}(t)) = \frac{t}{2}\|p + p_0\|^2 + \frac{t^2}{2}(p + p_0, F_1 p) + \frac{t^3}{6}(\|F_1 p\|^2 - (p, F_1 p)^2) + \frac{t^3}{3}(p + p_0, F_2 p) + o(t^3). \quad (5)$$

Подставляя $p = -p_0$, получаем, что для любой матрицы F с $F_0 = I$ порядок $s(-p_0, \mathcal{F}(t))$ по t при $t \rightarrow 0$ не менее трёх.

Определим

$$C_0 = 1 + \|F_1\| + \frac{\|F_2\|}{3}, \quad h_p = p - \left(p + \frac{t}{2}F_1p + \frac{t^2}{3}F_2p \right) \left\| p + \frac{t}{2}F_1p + \frac{t^2}{3}F_2p \right\|^{-1}.$$

Пусть

$$\varphi(h) = \frac{t}{2}\|h\|^2 + \frac{t^2}{2}(h, F_1p) + \frac{t^3}{3}(h, F_2p).$$

Заметим, что h_p есть точка минимума $\varphi(h)$ при условии $\|h-p\| = 1$. Также из (5) следует, что

$$s(p, \mathcal{F}(t)) = \varphi(p + p_0) + \frac{t^3}{6}(\|F_1p\|^2 - (p, F_1p)^2) + o(t^3),$$

где $o(t^3)$ из формулы (5).

Зафиксируем такое число $t_0 \in (0, 1)$, что для всякого $t \in (0, t_0]$ выполнены условия:

(i) $\|o(t^3)\| \leq t^3/4$ для всех $\|p\| = 1$;

(ii) если $C \in (0, C_0]$ и $\|p + p_0\| = Ct$, то $\|F_1p\|^2 - (p, F_1p)^2 \geq (\|F_1p_0\|^2 - (p_0, F_1p_0)^2)/2$;

(iii) $\varphi(h_p) + t^3(\|F_1p\|^2 - (p, F_1p)^2)/6 = t^3(\|F_1p\|^2 - (p, F_1p)^2)/24 + o_1(t^3)$ (равенство будет доказано ниже) и для $\varepsilon(t) = o(t^3) + o_1(t^3)$ выполнено $\|\varepsilon(t)\| \leq t^3(\|F_1p_0\|^2 - (p_0, F_1p_0)^2)/96$ для всех $\|p\| = 1$.

(Функция $o(t^3)$ в условиях (i), (iii) из (5)).

Отметим, что $h_p \asymp t$, $t \rightarrow 0$, и $t^3(h_p, F_2p) \asymp t^4$ при $t \rightarrow 0$ равномерно по $\|p\| = 1$.

Зафиксируем $t \in (0, t_0]$ и рассмотрим два случая.

Случай 1: $\|p + p_0\| = Ct$ и $C > C_0$. Из (5) тогда вытекает

$$s(p, \mathcal{F}(t)) \geq \frac{C^2t^3}{2} - \frac{Ct^3}{2}\|F_1\| - \frac{Ct^4}{6}\|F_2\| + o(t^3) \geq \frac{Ct^3}{2} \left(C - \|F_1\| - \frac{\|F_2\|}{3} \right) + o(t^3) \geq \frac{t^3}{2} + o(t^3),$$

и с учётом (i) $t^3/2 + o(t^3) \geq t^3/4$. Таким образом, $s(p, \mathcal{F}(t)) \geq t^3/4$ для любого единичного вектора p .

Случай 2: $\|p + p_0\| = Ct$ и $0 \leq C \leq C_0$. Функция $\varphi(h)$ при условии $\|h-p\| = 1$ имеет глобальный минимум в точке

$$h_p = p - \left(p + \frac{t}{2}F_1p + \frac{t^2}{3}F_2p \right) \left\| p + \frac{t}{2}F_1p + \frac{t^2}{3}F_2p \right\|^{-1}.$$

При этом

$$\begin{aligned} \varphi(h_p) &= t + \frac{t^2}{2}(p, F_1p) + \frac{t^3}{3}(p, F_2p) - t \left\| p + \frac{t}{2}F_1p + \frac{t^2}{3}F_2p \right\| = \\ &= t + \frac{t^2}{2}(p, F_1p) + \frac{t^3}{3}(p, F_2p) - t \sqrt{1 + t(p, F_1p) + \frac{t^2}{4}\|F_1p\|^2 + \frac{2t^2}{3}(p, F_2p) + \tilde{o}(t^2)} = \\ &= -\frac{t^3}{8}(\|F_1p\|^2 - (p, F_1p)^2) + o_1(t^3), \\ \varphi(h_p) + \frac{t^3}{6}(\|F_1p\|^2 - (p, F_1p)^2) &= \frac{t^3}{24}(\|F_1p\|^2 - (p, F_1p)^2) + o_1(t^3). \end{aligned}$$

Отсюда для всякого единичного вектора p имеем

$$s(p, \mathcal{F}(t)) \geq \varphi(h_p) + \frac{t^3}{6}(\|F_1p\|^2 - (p, F_1p)^2) + o(t^3) = \frac{t^3}{24}(\|F_1p\|^2 - (p, F_1p)^2) + \varepsilon(t).$$

Из условия (ii) $\|F_1p\|^2 - (p, F_1p)^2 \geq (\|F_1p_0\|^2 - (p_0, F_1p_0)^2)/2$, и значит,

$$s(p, \mathcal{F}(t)) \geq \frac{t^3}{48}(\|F_1p_0\|^2 - (p_0, F_1p_0)^2) + \varepsilon(t).$$

С учётом условия (iii)

$$s(p, \mathcal{F}(t)) \geq \frac{t^3}{96} (\|F_1 p_0\|^2 - (p_0, F_1 p_0)^2).$$

Теорема доказана.

Если множество U содержит шар $B_\rho(p_0) \subset U$ и $0 \in \partial B_\rho(p_0) \cap \partial U$, то порядок $r(t)$ по t в условии (I) для интеграла $\mathcal{F}(t)$ не менее t^3 . Если дополнительно $U \subset B_R(Rp_0)$ для некоторого $R > 0$, то порядок $r(t)$ в точности t^3 .

Если в формуле (5) взять больше членов разложения, то можно получить следующий результат.

Замечание 1. Пусть $F(s)$ – $n \times n$ матрица с C^∞ компонентами в окрестности нуля. Если $\|F_1 p_0\| = |(p_0, F_1 p_0)|$ (т.е. p_0 есть собственный вектор F_1), то при малых $t > 0$ для некоторой константы $C > 0$ выполнено неравенство $r(t) \leq Ct^5$. Порядок $r(t) \asymp t^4$ при $t \rightarrow 0$ у функции $s(p, \mathcal{F}(t))$ исключается, поскольку коэффициент при t^4 разложения $s(p, \mathcal{F}(t))$ по t при $p = -p_0$ равен нулю.

Следствие. Пусть в теореме 2 $F(s) = e^{As}$ и $\|A^T p_0\| > |(p_0, A^T p_0)|$. Тогда множество достижимости $\mathcal{R}_0(t) = \int_0^t e^{As} B_1(p_0) ds$ содержит шар $B_{r(t)}(0)$ и $r(t) \asymp t^3$, $t \rightarrow 0$.

2. Оценки модуля непрерывности в задаче быстрогодействия. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ – замкнутое подмножество и $T > 0$. Будем рассматривать задачу быстрогодействия для системы (2) в постановке

$$\min_{t \in [0, T]} t \quad \text{при условии} \quad \mathcal{R}(x(0), t) \cap M \neq \emptyset. \quad (6)$$

В дальнейшем предполагаем, что решение задачи (6) со всеми рассматриваемыми начальными условиями существует на отрезке $[0, T]$.

Пусть $T_0(x_0)$ – оптимальное время в (6) для $x(0) = x_0$. Поскольку $\mathcal{R}(x(0), T_0(x_0))$ – выпуклый компакт, то при условии строгой выпуклости M множество $\mathcal{R}(x(0), T_0(x_0)) \cap M = \{w_0(x_0)\}$ одноточечно. Отметим, что в некоторых типичных случаях множество $\mathcal{R}_0(t)$ является строго выпуклым [9, теорема 3.1] и решение $\mathcal{R}(x(0), T_0(x_0)) \cap M$ также одноточечно для произвольного выпуклого замкнутого множества M .

Одна из первых работ, где исследовалась непрерывность функции Беллмана в задаче (6) со множеством $M = \{0\}$, – работа [10]. Насколько известно автору, впервые необходимые и достаточные условия локальной липшицевости T_0 были получены в статьях [11, 12] для множества $M = \{0\}$. В дальнейшем они были обобщены в работе [13] для случая замкнутого множества M . Дифференцируемость T_0 изучалась в [14–16]. Достаточные условия гладкости, непрерывности функции Беллмана и соответствующие примеры были рассмотрены в [17].

Равномерная непрерывность, а именно условие Гёльдера с показателем $\alpha \in (0, 1)$ функции T_0 , исследовалась в работах [8, 18] и в [19] для систем специального вида. В [8] было показано, что для линейной системы со множеством управлений специального вида и $M = \{0\}$ функция Беллмана равномерно непрерывна, а в [18] доказана равномерная непрерывность T_0 для нелинейной системы на плоскости. Упомянем также статью [20], где получены достаточные условия для выполнения условия Гёльдера функции T_0 с показателем $1/2$ при условии, что M есть C^1 -гладкое многообразие в пространстве \mathbb{R}^n .

Получим зависимость модуля непрерывности функции T_0 и точки-решения w_0 задачи (6) от начального условия x_0 через геометрические свойства многозначного интеграла $\mathcal{R}_0(t)$ и множества M . Для получения зависимости T_0 от x_0 мы используем радиус $r(t)$ шара с центром в нуле, вписанного в $\mathcal{R}_0(t)$ (если такой существует), который зависит от t . Покажем, что модуль непрерывности T_0 есть обратная функция к $r(\cdot)$, причём эта оценка в общем случае неулучшаема. Множество M на этом шаре будем считать замкнутым.

Оценка $w_0(\cdot)$ получена из условия равномерной выпуклости M или $\mathcal{R}_0(t)$. Здесь нам нужна строгая выпуклость M либо выпуклость M и строгая выпуклость $\mathcal{R}_0(t)$.

Полученные оценки не вытекают из цитируемых в работе результатов.

Лемма 1. Рассмотрим систему (2) с начальными условиями $x(0) = x_0$ и $x(0) = x_1$, $h = x_1 - x_0$. Пусть $U_0 = U + Ax_0$ и множество M замкнуто. Предположим, что условие

(I) выполнено для $\mathcal{R}_0(t) = \int_0^t e^{As}U_0 ds$ с функцией r , $T > 0$, $m_T\|h\| < r(T)$, и в задаче (6) $T_0(x_0), T_0(x_1) \in [0, T]$. Тогда

$$|T_0(x_0) - T_0(x_1)| \leq r^{-1} \left(\frac{m_T}{\mu_T} \|h\| \right). \tag{7}$$

Пусть множество \mathcal{M} дополнительно строго выпукло и шар $B_R(0)$ содержит множества $\mathcal{R}(x_i, T_0(x_i))$, $i = 0, 1$, δ_R – модуль равномерной выпуклости множества $\mathcal{M} \cap B_R(0)$. Тогда

$$|w_0(x_0) - w_0(x_1)| \leq 2\omega(h) + \delta_R^{-1}(\omega(h)), \tag{8}$$

где $\omega(h) = m_T(\|h\| + r^{-1}(m_T\|h\|/\mu_T) \text{diam } U)$, $m_T = \max_{s \in [0, T]} \|e^{As}\|$, $\mu_T = \min_{\substack{\|h\|=1 \\ s \in [0, T]}} \|e^{As}h\|$.

Доказательство. Предположим, что $T_0(x_0) \leq T_0(x_1)$. Сделав замену $z = x - x_0$, получим систему $z' \in Az + U_0$ с начальными условиями $z(0) = 0$ и $z(0) = h$. Переобозначим $\mathcal{M} := \mathcal{M} - x_0$.

Пусть $w_0 = w_0(0) = z(T_0(0)) \cap \mathcal{M}$, $u = w_0 + e^{AT_0(h)}h$, $\Delta t = T_0(h) - T_0(0)$. Тогда

$$u \in e^{AT_0(h)}h + \int_0^{T_0(h)} e^{As}U_0 ds,$$

и поскольку выполнено неравенство $\mathcal{M} \cap (e^{AT_0(h)}h + \mathcal{R}(T_0(h))) \neq \emptyset$, то величина $r(\Delta t)$ из условия

$$e^{AT_0(0)}B_{r(\Delta t)}(0) \subset e^{AT_0(0)} \int_0^{\Delta t} e^{As}U_0 ds = \int_{T_0(0)}^{T_0(h)} e^{As}U_0 ds$$

должна удовлетворять неравенству $\mu_T r(\Delta t) \leq \|u - w_0\|$. В противном случае мы получаем включение $w_0 \in e^{AT_0(h)}h + \int_0^{T_0(h)} e^{As}U_0 ds$. Кроме того, $\|u - w_0\| \leq m_T\|h\|$. Отсюда вытекает оценка (7). Случай $T_0(x_1) < T_0(x_0)$ рассматривается аналогично.

Имеем следующую цепочку соотношений:

$$\begin{aligned} h(\mathcal{R}(x_0, T_0(x_0)), \mathcal{R}(x_1, T_0(x_1))) &\leq m_T\|h\| + h \left(\{0\}, \int_{T_0(0)}^{T_0(h)} e^{As}U ds \right) \leq \\ &\leq m_T\|h\| + m_T|T_0(h) - T_0(0)| \text{diam } U = m_T \left(\|h\| + r^{-1} \left(\frac{m_T}{\mu_T} \|h\| \right) \text{diam } U \right) = \omega(h), \end{aligned}$$

где $\text{diam } U$ – диаметр множества U . Определим $F_1(x) = \mathcal{M} \cap B_R(0)$ и $F_2(x) = \mathcal{R}(x, T_0(x))$ в окрестности нуля. Множество F_1 равномерно выпукло с модулем δ_R и равномерно непрерывно с модулем $\omega_1 = 0$, а F_2 имеет выпуклые компактные значения и равномерно непрерывно с модулем $\omega_2(h) = \omega(h)$. Оценка (8) для решения-точки вытекает из работы [21, теорема 3.1]. Заметим, что в доказательстве теоремы 3.1 точки t_1 и t_2 фиксированы, в нашем случае нужно взять $t_1 = 0$ и $t_2 = h$. Лемма доказана.

Для выполнения условия (I) для $\int_0^t e^{As}U_0 ds$ необходимо включение $0 \in U_0 = Ax_0 + U$. Таким образом, лемма 1 даёт оценку модуля непрерывности решения (6) в нуле.

Теорема 3. Рассмотрим систему (2) с начальными условиями $x(0) = x_0$ и $x(0) = x_1$, $h = x_1 - x_0$. Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ – замкнутое множество и выполнено условие $e^{-At}\mathcal{M} \subset e^{-At_1}\mathcal{M}$ для всех $0 \leq t \leq t_1$. Пусть выполнено условие (I) для $\int_0^t e^{-As}U ds$: $B_{r_-(t)}(0) \subset \int_0^t e^{-As}U ds$ для $t \geq 0$ и $\|h\| \leq r_-(T)$ для некоторого $T > 0$. Тогда для системы $z(t) \in z(0) + \int_0^t e^{-As}U ds$ с

начальными условиями $z(0) = x_0$ и $z(0) = x_1$ минимальное время попадания на множество $e^{-At}\mathcal{M}$ удовлетворяет условию

$$|T_0(x_0) - T_0(x_1)| \leq r_-^{-1} \left(\frac{\|h\|}{\mu_T^-} \right), \quad \mu_T^- = \min_{\substack{\|h\|=1 \\ s \in [0, T]}} \|e^{-As}h\|.$$

Доказательство. В системе (2) сделаем замену $x(s) = e^{As}z(s)$. Без ограничения общности считаем, что $T_0(x_0) \leq T_0(x_1)$. Для $t = T_0(x_0)$ имеем

$$\left(e^{At}x_0 + \int_0^t e^{As}U ds \right) \cap \mathcal{M} \neq \emptyset, \quad \left(x_0 + \int_0^t e^{A(s-t)}U ds \right) \cap (e^{-At}\mathcal{M}) \neq \emptyset,$$

$(x_0 + \int_0^t e^{-As}U ds) \cap (e^{-At}\mathcal{M}) = \{w_0\}$, $u = w_0 + h$. Далее доказательство повторяет доказательство леммы 1 с учётом того, что если $w_0 \in e^{-AT_0(x_0)}\mathcal{M}$, то $w_0 \in e^{-As}\mathcal{M}$ при $s > T_0(x_0)$. Заметим, что $T_0(x_i)$, $i = 0, 1$, является также оптимальным временем для задачи (6). Теорема доказана.

Замечание 2. Оценка по точке для задачи (6) с системой (2) в условиях теоремы 3 вытекает из формулы (8) с функцией r_- из теоремы 3. Пусть \mathcal{M} дополнительно строго выпукло и шар $B_R(0)$ содержит множества $\mathcal{R}(x_i, T_0(x_i))$, $i = 0, 1$, δ_R – модуль равномерной выпуклости множества $\mathcal{M} \cap B_R(0)$. Тогда справедливо неравенство

$$|w_0(x_0) - w_0(x_1)| \leq 2\omega(h) + \delta_R^{-1}(\omega(h)), \tag{9}$$

где $\omega(h) = m_T(\|h\| + r_-^{-1}(\|h\|/\mu_T^-) \text{diam } U)$, $m_T = \max_{s \in [0, T]} \|e^{As}\|$.

Замечание 3. Заметим, что множества $\mathcal{R}_0(t)$ могут быть равномерно выпуклыми [9, теорема 3.1]. Тогда при выпуклости \mathcal{M} в оценках (8) и (9) вместо модуля δ_R можно брать функцию δ , которая равна минимуму из модулей выпуклости множеств $\mathcal{R}_0(t)$ при $t = T_0(x_0), T_0(x_1)$.

Если $\mathcal{M} = \{0\}$, то мы получаем известный результат о локальной равномерной непрерывности функции T_0 . Отметим также, что для доказательства равномерной непрерывности T_0 нам не нужна выпуклость \mathcal{M} , она требуется для доказательства равномерной непрерывности по точке-решению.

Условие монотонного возрастания по включению множеств $\{e^{-At}\mathcal{M}\}_{t \geq 0}$ в теореме 3 можно заменить на условие включения точки $w_0 \in e^{-As}\mathcal{M}$ для всех $s \in [T_0(x_0), T_1]$, где $T_1 > T_0(x_1)$. Также это условие можно сформулировать с использованием касательного конуса $\mathcal{C}_\mathcal{M}$.

Лемма 2. Пусть в обозначениях теоремы 3 $w_1 = e^{AT_0(x_0)}w_0 \in \mathcal{M}$. Тогда при выполнении условия

$$Ax \in \mathcal{C}_\mathcal{M}(x) \tag{10}$$

для любых $x \in \partial\mathcal{M}$ справедливо включение $e^{As}w_1 \in \mathcal{M}$ при всех $s \geq 0$.

Доказательство. Рассмотрим задачу Коши $y' = Ay$, $y(0) = w_1 \in \mathcal{M}$. В силу теоремы Нагумо [5, с. 174] условие (10) гарантирует включение $y(s) = e^{As}w_1 \in \mathcal{M}$ для всех $s \geq 0$. Лемма доказана.

Приведём пример выполнения условия (10). Пусть $\mathcal{M} = B_1(0)$ и $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ такая (не обязательно симметричная) матрица, что $(x, Ax) \leq 0$ при всех $\|x\| = 1$. Последнее, как легко видеть, эквивалентно условию $Ax \in \mathcal{C}_\mathcal{M}(x)$ для всех $\|x\| = 1$. Поэтому для системы (2) с указанной матрицей и при выполнении условия (I) можно применить теорему 3.

Легко привести и другие примеры матриц A и множеств \mathcal{M} , когда выполнено условие монотонного возрастания множеств $\{e^{-At}\mathcal{M}\}_{t \geq 0}$ по включению. Для этого для конкретной матрицы A и множества \mathcal{M} достаточно выполнения условия $Ax \in \mathcal{C}_\mathcal{M}(x)$ для всех $x \in \partial\mathcal{M}$. Например, если \mathcal{M} задано в виде $\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \leq 1\}$, где $\varphi \in C^1$, то достаточно выполнения неравенства $(\varphi'(x), Ax) \leq 0$ для всех $x \in \partial\mathcal{M}$, где $\varphi'(x)$ – градиент φ в точке x .

Отметим, что можно привести примеры, когда без требования монотонности множеств $\{e^{-At}\mathcal{M}\}_{t \geq 0}$ функция T_0 в задаче (6) разрывна. В этих примерах в соответствующей задаче (2) можно взять множество $U = B_\gamma(0)$, $\gamma > 0$.

Замечание 4. Пусть в системе (2) множество U содержит отрезок ненулевой длины с центром в нуле, удовлетворяющий условию полного ранга из теоремы 1 для $F(s) = e^{As}$. Тогда $B_{r(t)}(0) \subset \mathcal{R}_0(t)$ с радиусом $r(t) \geq ct^n$. Отсюда, в случае выполнения условия (10), вытекает, что решение T_0 задачи (6) удовлетворяет условию Гёльдера с показателем не менее $1/n$. Результат об условии Гёльдера функции Беллмана с показателем $1/n$ был ранее получен в работе [8] для $\mathcal{M} = \{0\}$ при условии, что U есть линейный образ гипероктаэдра со $\{\pm e_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^m$, где m может быть как меньше, так и больше n .

Пример 2. В условиях сформулированного следствия определим вектор $\|p_0\| = 1$ из равенств $(p_0, A^l u) = 0$, $l = \overline{0, n-2}$. Пусть

$$\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^n : (p_0, x) \geq 0\}, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = -\varepsilon p_0, \quad \varepsilon > 0.$$

Тогда в системе (2) с начальными условиями x_0, x_1 имеем $T_0(x_0) = 0$, $T_0(x_1) \asymp \varepsilon^{1/n}$. Заметим, что в силу аналитичности $g(s, p)$ и условия полного ранга уравнение $g(s, p) = 0$ имеет конечное число корней для каждого $\|p\| = 1$ и, следовательно, $\mathcal{R}(x_1, t)$ есть строго выпуклый компакт при всех $t > 0$ с модулем выпуклости $\delta(\tau) \asymp \tau^\alpha$, $\tau \rightarrow +0$, а $\alpha \geq 1/n$ [9, теорема 3.1].

Пример 3. Пусть в \mathbb{R}^2 матрица A и множество управлений U такие же, как в примере 1, а $\mathcal{M} = B_1(0)$. Рассмотрим задачу (6) с начальными условиями $x_0 = (0, -1)$ и $x_1 = (0, -1-\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Условия теоремы 3 выполняются, в частности $e^{As}\mathcal{M} = \mathcal{M}$ при всех $s \geq 0$. Поэтому по теореме 3 $|T_0(x_0) - T_0(x_1)| \leq \text{const}\sqrt{\varepsilon}$, при этом $T_0(x_0) = 0$.

Из примера 1 для $p = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ имеем

$$s(p, \mathcal{R}(x_1, t)) = -(1 + \varepsilon) \sin(\varphi - t) + \int_0^t |\cos(s - \varphi)| ds.$$

Пусть $t > 0$ – первый момент, когда $\mathcal{R}(x_1, t) \cap \mathcal{M} \neq \emptyset$, т.е. $t = T_0(x_1)$. Тогда при малых $\varepsilon > 0$ вектор p_0 , отделяющий $\mathcal{R}(x_1, t)$ и \mathcal{M} , задаётся углом $\varphi_0 = \pi/2 + \theta$, где $0 \leq \theta \leq ct$ для некоторого $c > 0$. Значит,

$$s(p_0, \mathcal{R}(x_1, t)) = -(1 + \varepsilon) \cos(\theta - t) + \int_0^t |\sin(s - \theta)| ds = -1,$$

откуда следует, что $t^2 \asymp \varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow +0$. Поэтому оценка теоремы 3 в этом примере точна.

Рассмотрим в примере 3 множество управлений $U = B_1(-e_2)$. Тогда

$$\mathcal{R}(x_1, t) = e^{At}x_1 - \int_0^t e^{As}e_2 ds + \int_0^t e^{As}B_1(0) ds = (1 + \varepsilon) \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + B_t(0).$$

Решение $t = T_0(x_1)$ есть время $t > 0$, при котором шар радиуса t с центром в точке $((1 + \varepsilon) \sin t + 1 - \cos t, -(1 + \varepsilon) \cos t - \sin t)^T$ касается шара $\mathcal{M} = B_1(0)$. Из этого условия приходим к уравнению

$$f(t) = 2t + t^2 + 2 \cos t - 2 \sin t - 2\varepsilon \sin t = 2 + 2\varepsilon + \varepsilon^2.$$

Пусть $t(c) = c\varepsilon^{1/3}$. С помощью разложений функций по степеням t по формуле Тейлора легко убедиться в том, что при малых $\varepsilon > 0$ и $c > \sqrt[3]{6}$ имеем $f(t(c)) > 2 + 2\varepsilon + \varepsilon^2$, а при $c < \sqrt[3]{6}$ имеем $f(t(c)) < 2 + 2\varepsilon + \varepsilon^2$. Поэтому $T_0(x_1) \sim \sqrt[3]{6\varepsilon}$ при $\varepsilon \rightarrow +0$.

С учётом теоремы 2 теорема 3 в рассматриваемой ситуации также даёт порядок $T_0(x_1) \asymp \varepsilon^{1/3}$, $\varepsilon \rightarrow +0$.

Замечание 5. Полученными в работе оценками для T_0 имеет смысл пользоваться, когда неприменимы стандартные условия Липшица для функции минимального времени T_0 из задачи (6), например, обобщение условия Петрова (НЗ) из статьи [13].

3. Приложение к оценкам приближённого решения задач со множеством достижимости. Рассмотрим задачу для линейной управляемой системы (2)

$$\min_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n} t \quad \text{при условии} \quad x + \mathcal{R}_0(t) \supset \mathcal{M}. \quad (11)$$

Здесь \mathcal{M} – выпуклый компакт, а множество $\mathcal{R}_0(t) = \mathcal{R}_0(0, t)$ (см. (3)). Смысл задачи состоит в том, чтобы найти минимальное время $T_0 > 0$ и начальное условие $x(0) = e^{-AT_0}x_0$, где (x_0, T_0) – решение (11), для которых множество $\mathcal{R}(x(0), t)$ за минимальное время $t = T_0$ накрывает множество \mathcal{M} . Для решения этой задачи в фазовом пространстве небольшой размерности предложен алгоритм [22].

Будем считать, что решение $T_0 \leq T$. Дискретный вариант задачи (11) имеет вид

$$\min_{k, x \in \mathbb{R}^n} t_k \quad \text{при условии} \quad x + \hat{\mathcal{R}}_0(t_k) \supset \hat{\mathcal{M}}, \quad (12)$$

где $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_K = T$ – некоторое разбиение отрезка $[0, T]$, а $\hat{\cdot}$ над множеством означает его внешнюю многогранную аппроксимацию на сетке единичных векторов $\mathbb{G} = \{p_i\}_{i=1}^I$, например,

$$\hat{\mathcal{M}} = \{x \in \mathbb{R}^n : (p_i, x) \leq s(p_i, \mathcal{M}), \quad p_i \in \mathbb{G}\}.$$

Ищем минимальное k , для которого система из (12), т.е. $(p_i, x) + s(p_i, \mathcal{R}_0(t_k)) \geq s(p_i, \mathcal{M})$, $i = \overline{1, I}$, имеет решение. Последняя задача легко решается симплекс-методом. Пусть $\varepsilon > 0$ – погрешность аппроксимации $\mathcal{R}_0(t_k)$ (детали см. в [22, теорема 1]), а k – найденный номер. Тогда оптимальное время T_0 удовлетворяет условию $t_{k-1} < T_0 \leq \tau$, где τ – минимальное время, для которого (см. [22, формула (20)])

$$\int_{t_i}^{\tau} e^{As} U ds \supset B_\varepsilon(0). \quad (13)$$

Из формулы (13) получаем, что $t_{k-1} < T_0 \leq t_k + r^{-1}(\varepsilon/\mu_T)$, где

$$\mu_T = \min_{\substack{\|h\|=1 \\ s \in [0, T]}} \|e^{As} h\|.$$

Таким образом, функция r^{-1} связывает погрешность аппроксимации ε по пространству и ошибку по времени в алгоритме решения задачи (11).

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда №22-11-00042, <https://rscf.ru/project/22-11-00042/> в ИПУ имени В.А. Трапезникова РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aumann R.* Integrals of set-valued functions // J. of Math. Anal. Appl. 1965. V. 12. № 1. P. 1–12.
2. *Ляпунов А.А.* О вполне аддитивных вектор-функциях // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1940. Т. 4. № 6. С. 465–478.
3. *Половинкин Е.С.* Многозначный анализ и дифференциальные включения. М., 2014.
4. *Lee E.B., Markus L.* Foundations of Optimal Control Theory. New York, 1967.
5. *Aubin J.-P., Cellina A.* Differential Inclusions. Berlin; Heidelberg, 1984.

6. Поляк Б.Т. Теоремы существования и сходимости минимизирующих последовательностей для задач на экстремум при наличии ограничений // Докл. АН СССР. 1966. Т. 166. № 2. С. 287–290.
7. Дистель Дж. Геометрия банаховых пространств. Киев, 1980.
8. Ливеровский А.А. Некоторые свойства функции Беллмана для линейных и симметричных полисистем // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 3. С. 414–423.
9. Veliov V.M. On the convexity of integrals of multivalued mappings: application in control theory // J. of Optim. Theory and Appl. 1987. V. 54. P. 541–563.
10. Кириллова Ф.М. О корректности постановки одной задачи оптимального регулирования // Изв. вузов. Математика. 1958. № 4. С. 113–126.
11. Петров Н.Н. О непрерывности обобщённой функции Беллмана // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6. № 2. С. 373–374.
12. Петров Н.Н. О функции Беллмана для задачи оптимального быстрогодействия // Прикл. математика и механика. 1970. Т. 34. № 5. С. 820–826.
13. Cannarsa P., Sinestrari C. Convexity properties of the minimum time function // Calc. Var. 1995. V. 3. P. 273–298.
14. Кун Л.А., Пронозин Ю.Ф. К регуляризации метода Беллмана в задачах оптимального быстрогодействия // Докл. АН СССР. 1971. Т. 200. № 6. С. 1294–1297.
15. Сатимов Н.Ю. О гладкости функции Беллмана для линейной задачи оптимального управления // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 12. С. 2176–2179.
16. Тынянский Н.Т., Арутюнов А.В. Линейные процессы оптимального быстрогодействия // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислит. математика и кибернетика. 1979. Вып. 2. С. 32–37.
17. Арутюнов А.В. Об одном классе линейных процессов оптимального быстрогодействия // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 4. С. 555–560.
18. Ливеровский А.А. О гёльдеровости функции Беллмана плоских систем управления // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 4. С. 604–613.
19. Evans L.C., Janaes M.R. The Hamilton–Jacobi–Bellman equation for time optimal control // SIAM J. Control Optim. 1989. V. 27. P. 1477–1489.
20. Soravia P. Hölder continuity of the minimum-time function for C^1 -manifold targets // J. of Optim. Theory and Appl. 1992. V. 75. P. 401–421.
21. Balashov M.V., Repovs D. Uniform convexity and the splitting problem for selections // J. of Math. Anal. Appl. 2009. V. 360. № 1. P. 307–316.
22. Балашов М.В., Камалов Р.А. Оптимизация множества достижимости линейной системы по отношению к другому множеству // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2023. Т. 63. № 5. С. 739–759.

Институт проблем управления
имени В.А. Трапезникова РАН,
г. Москва

Поступила в редакцию 25.04.2023 г.
После доработки 25.04.2023 г.
Принята к публикации 14.06.2023 г.