ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 8, с. 1123–1138

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

КВАЗИДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ И РАВНОМЕРНАЯ НАБЛЮДАЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННЫХ СИСТЕМ

© 2023 г. О. Б. Цехан

Для линейных нестационарных сингулярно возмущённых систем (ЛНСВС) с квазидифференцируемыми коэффициентами и малым параметром при некоторых производных рассматривается задача равномерной наблюдаемости. Доказаны независящие от малого параметра необходимые и достаточные условия квазидифференцируемости множества выходных функций, построены независящие от малого параметра матрицы наблюдаемости связанных с ЛНСВС медленной и семейства быстрых подсистем, установлена связь между ними и матрицей наблюдаемости исходной системы. На основе полной декомпозиции исходной ЛНСВС относительно действия группы линейных невырожденных преобразований доказаны ранговые, независящие от малого параметра и справедливые для всех достаточно малых его значений, достаточные условия равномерной наблюдаемости ЛНСВС. Условия выражены через матрицы наблюдаемости медленной и семейства быстрых подсистем, имеющих меньшие размерности, чем исходная ЛНСВС.

DOI: 10.31857/S0374064123080113, EDN: IQNKAJ

Введение. Наблюдаемость, наряду с устойчивостью, управляемостью и стабилизируемостью, является фундаментальным структурным свойством динамических систем. Суть задачи наблюдаемости заключается в выяснении возможности однозначного восстановления состояний системы по результатам наблюдений, что равносильно взаимно-однозначному соответствию между множеством выходных функций и множеством начальных (или текущих) состояний системы. При этом важно понимать, в каком виде представлена информация о выходных функциях системы наблюдения (например, известны значения выходной функции в фиксированные моменты времени, в произвольно выбранные моменты, известны значения производных и т.п.). Понятие наблюдаемости впервые сформулировано Р. Калманом в работе [1]; там же приведён и критерий наблюдаемости линейных стационарных систем. В нестационарном случае известные необходимые и достаточные условия наблюдаемости [2, с. 66, 67] имеют неявный характер, поскольку требуют знания фундаментальной матрицы. Существующие коэффициентные признаки наблюдаемости основаны на высокой степени гладкости либо коэффициентов [3, с. 303–306], либо выходных сигналов [4, с. 20; 5, с. 191, 192]. Отметим, что для нестационарных систем наблюдения рассматриваются различные понятия наблюдаемости (см. [2–10] и цитированную в них литературу), которые отличаются рядом особенностей и в общем случае не эквивалентны.

В данной работе при исследовании наблюдаемости вместо дифференцируемости выходов используется квазидифференцируемость по некоторой нижнетреугольной матрице $P(t)$ [10, 11], что позволяет установить явные условия наблюдаемости, существенно усиливающие известные.

Сингулярно возмущённые системы (СВС) являются математическими моделями динамических систем, в которых реализуются одновременно несколько взаимосвязанных подпроцессов с существенно различающимися темпами изменения переменных, поведение которых может быть описано в стандартной форме системами дифференциальных уравнений с малым параметром при некоторых производных. Для таких систем можно рассматривать различные постановки задач наблюдения, в частности, в зависимости от доступной информации о малом параметре. Одним из "наивных" подходов к исследованию СВС является рассмотрение таких систем при каждом фиксированном значении малого параметра, что позволяет применять условия наблюдаемости и методы восстановления состояний, разработанные для систем без параметра. Однако такой подход приводит к анализу систем большой размерности, возникают значительные вычислительные трудности, связанные, например, с обращением плохообусловленных матриц. Кроме того, результаты при таком подходе зависят от величины малого параметра, т.е. не являются робастными по этому параметру. Как правило, в реальных прикладных задачах значения малого параметра точно не известны. Поэтому для СВС стремятся получать условия наличия различных её свойств, независящие от малого параметра и справедливые для всех достаточно малых его значений. Такие формулировки характерны для исследований СВС в рамках теории сингулярных возмущений [12]. Наличие тех или иных структурных свойств СВС управления при всех достаточно малых значениях параметра обеспечивает возможность асимптотического (по малому параметру) решения соответствующих задач управления и наблюдения СВС [13, 14]. Отметим ряд работ, посвящённых изучению свойства наблюдаемости СВС [14–22] (см. также литературу в обзорах [12, 23]). При исследовании свойств систем, имеющих место при всех возможных реализациях параметра, используется термин "робастные свойства" [24].

При исследовании структурных свойств СВС и разработке способов управления и наблюдения ими одним из эффективных методов является процедура декомпозиции, которая может быть выполнена различными способами. Например, в [14, 25] к СВС применяется невырожденное расщепляющее преобразование, эквивалентным образом сводящее исходную двухтемповую систему к разделённым по темпам подсистемам меньшей размерности, асимптотически (по малому параметру) близким к системам, независящим от малого параметра. При использовании [12] декомпозиционного подхода представляют интерес условия, при выполнении которых утверждения о наличии свойств для исходных систем высокого порядка вытекают из факта наличия этих свойств для некоторых подсистем меньшего порядка. Такие условия позволяют выводить суждения о структурных свойствах СВС при всех достаточно малых значениях параметра из аналогичных свойств у связанных с ней независящих от малого параметра систем меньшей размерности.

В данной работе для линейных нестационарных СВС с квазидифференцируемыми коэффициентами и малым параметром при некоторых производных рассматривается задача равномерной наблюдаемости. Для линейных нестационарных систем наблюдения без малого параметра равномерная наблюдаемость исследовалась в [6–10].

1. Квазидифференцируемость. Основные результаты, полученные в данной работе, используют понятие квазипроизводной [11] и некоторые простые факты, связанные с ним.

Пусть $T=[t_0,t_1]$ – отрезок действительной оси $\mathbb{R}$, m – заданное целое неотрицательное число. Обозначим через $\mathcal{U}_m(T)$ совокупность всех нижнетреугольных $(m+1)\times(m+1)$-матриц $P(t)$ с непрерывными на T элементами $p_{ki}(t)$, $i,k=\overline{0,m}$, удовлетворяющими условию $p_{kk}(t)\neq 0$ при $t\in T$, $k=\overline{0,m}$. Выберем какую-либо матрицу $P(t)$ из множества $\mathcal{U}_m(T)$. Квазипроизводные ${}^{0}_{P}w(t)$, ${}^{1}_{P}w(t)$, $\ldots$, ${}^{m}_{P}w(t)$ порядка от 0 до m относительно матрицы $P(t)$ непрерывной функции $w: T\to\mathbb{R}$ определяются по следующим рекуррентным правилам:

$$
{}^{0}_{P}w(t)=p_{00}(t)w(t),\quad {}^{1}_{P}w(t)=p_{11}(t)\frac{d({}^{0}_{P}w(t))}{dt}+p_{10}(t)({}^{0}_{P}w(t)),\quad \ldots
$$

$$
\ldots,\quad {}^{k}_{P}w(t)=p_{kk}(t)\frac{d({}^{k-1}_{P}w(t))}{dt}+\sum_{i=0}^{k-1}p_{ki}(t)({}^{i}_{P}w(t)),\quad k=\overline{2,m}. \tag{1}
$$

Предполагается, что операции дифференцирования в формулах (1) выполнимы и приводят к непрерывным функциям.

Очевидно, что всякая m раз непрерывно дифференцируемая функция квазидифференцируема по единичной матрице E_{m+1}. Однако несложные примеры (см. [8, с. 15]) показывают, что недифференцируемая в обычном смысле функция может быть m раз квазидифференцируема по некоторой матрице $P\in\mathcal{U}_m(T)$.

Семейство всех непрерывных функций, обладающих непрерывными квазипроизводными (1) относительно заданной матрицы $P\in\mathcal{U}_m(T)$, обозначим через $C^m_P(T)$. Очевидно, $C^m_P(T)$ – векторное пространство над полем действительных чисел.

2. Описание системы наблюдения. Рассмотрим на отрезке $T = [t_0, t_1]$ линейную нестационарную сингулярно возмущённую систему

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) = A_1(t)x(t) + A_2(t)y(t), \quad x \in \mathbb{R}^{n_1}, \\ \mu\dot{y}(t) = A_3(t)x(t) + A_4(t)y(t), \quad y \in \mathbb{R}^{n_2}, \\ x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0 \end{gathered} \tag{2}$$

со скалярной выходной функцией

$$v(t) = c_1(t)x(t) + c_2(t)y(t), \quad t \in T. \tag{3}$$

Здесь μ – малый параметр, $\mu \in (0, \mu^0]$, $\mu^0 \ll 1$; $x(t)$ – вектор медленных переменных; $y(t)$ – вектор быстрых переменных; $v(t)$ – выходная функция системы; $A_i(t)$, $i = \overline{1,4}$, – непрерывные на T матричные функции соответствующих размерностей; $c_j(t)$, $j = 1, 2$, – непрерывные на T функции, записанные как вектор-строки.

Обозначим $n = n_1 + n_2$, $z^{\text{т}}(t) = (x^{\text{т}}(t), y^{\text{т}}(t))$, $z_0^{\text{т}} = (x_0^{\text{т}}, y_0^{\text{т}})$, ${}^{\text{т}}$ – символ транспонирования. Чтобы подчеркнуть зависимость решения системы (2) от параметра μ и начальных условий (в зависимости от контекста), будем использовать одну из записей: $z(t)$, $z(t, \mu)$, $z(t, \mu, x_0, y_0)$, $z(t, \mu, z_0)$. Определим по параметрам ЛНСВС (2), (3) вектор-функцию $c(t) = (c_1(t), c_2(t))$, а также зависящую от параметра $\mu > 0$ матричную функцию

$$A(t, \mu) = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ A_3(t)/\mu & A_4(t)/\mu \end{pmatrix}.$$

Тогда систему наблюдения (2), (3) можно представить в эквивалентном виде

$$\begin{gathered} \dot{z}(t) = A(t, \mu)z(t), \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad t \in T, \quad z(t_0) = z_0, \\ v(t) = c(t)z(t), \quad v \in \mathbb{R}, \quad t \in T. \end{gathered} \tag{4}$$

Отождествим систему (4) с парой (A_μ, c), состоящей из матричных функций $A(t, \mu)$ и $c(t)$, а совокупность всех таких пар с непрерывными на T компонентами обозначим Σ_μ, $\mu \in$ $\in (0, \mu^0]$. С целью анализа свойств систем из Σ_μ, справедливых для всех достаточно малых значений параметра μ, представим матрицу $A(t, \mu)$ в виде

$$A(t, \mu) = A^0(t) + \frac{1}{\mu}A^1(t), \quad A^0(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_3(t) & A_4(t) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

В силу (5) систему (4), определяемую тройкой матричных функций A^0, A^1, c и малым параметром $\mu \in (0, \mu^0]$, отождествим также со множеством $\{A^0, A^1, c, \mu\}$. Если параметр μ принимает всевозможные значения из полуинтервала $(0, \mu^0]$, то получаем μ-параметрическое семейство систем $\{A^0, A^1, c\}_{\mu^0}$. Фиксированное $\mu \in (0, \mu^0]$ выделяет из семейства $\{A^0, A^1, c\}_{\mu^0}$ конкретную систему (A_μ, c).

Пусть в системе (2) реализовались некоторые фиксированное $\mu \in (0, \mu^0]$ и неизвестное начальное состояние $z_0 = z(t_0)$, которые породили в силу (2), (3) процесс $z(t, \mu) = z(t, \mu, z_0)$, $t \in T$, и выходную функцию $v(t, \mu) = v(t, \mu, z_0)$, $t \in T$. Для системы (A_μ, c) обозначим через

$$\mathcal{V}_\mu = \{(v(t, \mu, z_0), t \in T), \quad z_0 \in \mathbb{R}^n\}$$

множество выходных функций.

Пусть задана некоторая матрица $P \in \mathcal{U}_m(T)$.

Определение 1. При фиксированном $\mu \in (0, \mu^0]$ *система* (A_μ, c) *имеет* P*-класс* m (записываем как $(A_\mu, c) \in \{P, m\}$), если всякая её выходная функция $v(t, \mu, z_0)$, $t \in T$, из множества $\mathcal{V}_\mu$ имеет непрерывные квазипроизводные относительно матрицы P до порядка m включительно.

Будем говорить, что *семейство систем* $\{A^0, A^1, c\}_{\mu^0}$ *имеет* P*-класс* m, если любая система из этого семейства имеет P-класс m.

При заданном положительном m обозначим через $\mathcal{P}_m(A_\mu, c)$ подмножество множества $\mathcal{U}_m(T)$, состоящее из таких матриц P, относительно которых система (A_μ, c) имеет класс m. Пусть выбрана некоторая независящая от μ матрица $P \in \mathcal{P}_m(A_\mu, c)$.

Укажем условия, при выполнении которых система (A_μ, c) имеет P-класс m. Применение к системе (4) леммы 2.1 из [8, с. 32] показывает, что при фиксированном $\mu \in (0, \mu^0]$ указанная система имеет P-класс m тогда и только тогда, когда для всех $k = \overline{1, m}$ существуют и непрерывны функции-строки

$$s_0(t,\mu) = p_{00}(t)c(t), \quad s_k(t,\mu) = p_{kk}(t)(s_{k-1}(t,\mu)A(t,\mu) + \dot{s}_{k-1}(t,\mu)) + \sum_{i=0}^{k-1} p_{ki}(t)s_i(t,\mu). \tag{6}$$

С целью выяснения структуры зависимости функции $s_k(t,\mu)$ от параметра μ по рекуррентным формулам (6) с учётом структуры матриц (5) определим n-вектор-функции строки $s_k^0(t)$, $s_k^1(t)$, $\ldots$, $s_k^k(t)$, $k = \overline{0, m}$, следующим образом:

$$s_0^0(t) = p_{00}(t)c(t), \quad s_0^1(t) = 0, \quad s_0(t,\mu) = s_0^0(t),$$

$$s_1^0(t) = p_{11}(t)(s_0^0(t)A^0(t) + \dot{s}_0^0(t)) + p_{10}(t)s_0^0(t), \quad s_1^1(t) = p_{11}(t)s_0^0(t)A^1(t), \quad s_1(t,\mu) = s_1^0(t) + \frac{1}{\mu}s_1^1(t),$$

$$s_2^0(t) = p_{22}(t)(s_1^0(t)A^0(t) + \dot{s}_1^0(t)) + \sum_{j=0}^{1} p_{2j}(t)s_j^0(t), \quad s_0^2(t) = 0,$$

$$s_2^1(t) = p_{22}(t)(s_1^0(t)A^1(t) + s_1^1(t)A^0(t) + \dot{s}_1^1(t)) + \sum_{j=0}^{1} p_{2j}(t)s_j^1(t), \quad s_2^2(t) = p_{22}(t)s_1^1(t)A^1(t),$$

$$s_2(t,\mu) = s_2^0(t) + \frac{1}{\mu}s_2^1(t) + \frac{1}{\mu^2}s_2^2(t) = \sum_{j=0}^{2} \frac{1}{\mu^j}s_2^j(t), \quad \ldots,$$

$$s_k(t,\mu) = p_{kk}(t)\Bigg(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\mu^j}(s_{k-1}^j(t)A^0(t) + \dot{s}_{k-1}^j(t)) + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\mu^{j+1}}s_{k-1}^j(t)A^1(t)\Bigg) + \sum_{j=0}^{k-1} p_{kj}(t) \sum_{i=0}^{j} \frac{1}{\mu^i}s_j^i(t) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{\mu^j}\Bigg(p_{kk}(t)(s_{k-1}^j(t)A^0(t) + s_{k-1}^{j-1}(t)A^1(t) + \dot{s}_{k-1}^j(t)) + \sum_{i=0}^{k-1} p_{ki}(t)s_i^j(t)\Bigg) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{\mu^j}s_k^j(t).$$

Здесь n-вектор-функции $s_k^j(t)$, $j = \overline{0, k}$, $k = \overline{0, m}$, определены по рекуррентным формулам

$$s_k^j(t) = p_{kk}(t)(s_{k-1}^j(t)A^0(t) + \dot{s}_{k-1}^j(t) + s_{k-1}^{j-1}(t)A^1(t)) + \sum_{i=0}^{k-1} p_{ki}(t)s_i^j(t)$$

с учётом того, что $s_k^i(t) = 0$ при $i < 0$ или $i > k$.

Обозначим через $C^1(T, \mathbb{R})$ множество непрерывно дифференцируемых на отрезке T скалярных функций.

Лемма 1. *Для заданных скалярных функций* $a_i(t)$, $t \in T$, $i = \overline{0, \theta}$ (θ *– заданное целое неотрицательное число), их линейная комбинация*

$$f(t,\mu) = \sum_{i=0}^{\theta} \frac{a_i(t)}{\mu^i}, \quad t \in T, \tag{7}$$

непрерывно дифференцируема на отрезке T *при любом* $\mu > 0$ *тогда и только тогда, когда каждая из функций* $a_i(t)$, $i = \overline{0,\theta}$, *непрерывно дифференцируема на* T.

Доказательство. Достаточность очевидна, так как свойство непрерывной дифференцируемости функций сохраняется при умножении их на ненулевую константу.

Необходимость. Зададим $\theta + 1$ различных положительных действительных чисел μ_0, μ_1, $\ldots$, μ_θ и, используя обозначение $\xi_j = 1/\mu_j$, запишем, исходя из формулы (7), равенства

$$f(t,\mu_j) = \sum_{i=0}^{\theta} \frac{1}{\mu_j^i} a_i(t) = \sum_{i=0}^{\theta} \xi_j^i a_i(t), \quad t \in T, \quad j = \overline{0,\theta},$$

которые можно представить следующим образом:

$$\begin{pmatrix} f(t,\mu_0) \\ f(t,\mu_1) \\ \ldots \\ f(t,\mu_\theta) \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ \ldots \\ a_\theta(t) \end{pmatrix}, \quad t \in T,$$

где $(\theta+1)\times(\theta+1)$-матрица V является невырожденной матрицей Вандермонда [26, с. 43, 44]

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \xi_0 & \xi_0^2 & \ldots & \xi_0^\theta \\ 1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \ldots & \xi_1^\theta \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \xi_\theta & \xi_\theta^2 & \ldots & \xi_\theta^\theta \end{pmatrix}.$$

Значит, существует обратная матрица V^{-1} и справедливо равенство

$$V^{-1} \begin{pmatrix} f(t,\mu_0) \\ f(t,\mu_1) \\ \ldots \\ f(t,\mu_\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ \ldots \\ a_\theta(t) \end{pmatrix},$$

из которого следует непрерывная дифференцируемость на T функций $a_i(t)$, $i = \overline{0,\theta}$. Лемма доказана.

Из определения квазипроизводных (1) относительно матрицы $P \in \mathcal{U}_m(T)$ для функции $f(t,\mu)$ вида (7) следует представление

$${}_P^k f(t,\mu) = \sum_{j=0}^{\theta} \frac{{}_P^k a_j(t)}{\mu^j}, \quad k = \overline{0,m},$$

с учётом которого из леммы 1 вытекает

Следствие 1. *Функция* $f(t,\mu)$ *вида (7) имеет при любом* $\mu > 0$ *непрерывную квазипроизводную порядка* k, $k \leqslant m$, *относительно матрицы* P *тогда и только тогда, когда каждая из функций* $a_j(t)$, $j = \overline{0,\theta}$, *имеет непрерывную квазипроизводную порядка* k *относительно* P.

Используя лемму 2.1 из [8], лемму 1 и следствие 1, несложно доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Для независящей от параметра* μ *матрицы* $P \in \mathcal{U}_m(T)$ *система* (A_μ, c) *имеет* P*-класс* $n-1$ *при каждом* $\mu \in (0,\mu^0]$ *тогда и только тогда, когда* n*-вектор-функции* $s_k^j(t)$, $k = \overline{0,n-1}$, $j = \overline{0,k}$, *непрерывно дифференцируемы на* T. *При этом для функций* $s_k(t,\mu)$ *справедливо представление в виде*

$$s_k(t,\mu) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{\mu^j} s_k^j(t).$$

Следствие 2. *Любое семейство* $\{A^0, A^1, c\}_\mu$, $\mu > 0$, *имеет имеет* P*-класс* n *тогда и только тогда, когда верны предположения теоремы 1.*

3. Квазидифференцируемость и равномерная наблюдаемость. Пусть для заданной матрицы P из множества $\mathcal{U}_{n-1}(T)$ и фиксированного $\mu \in (0, \mu^0]$ система $(A_\mu, c) \in \{P, n-1\}$. Тогда на множестве $\mathcal{V}_\mu$ выходных функций системы (A_μ, c) правила (1) задают оператор, который каждой функции $v(\,\cdot\,, \mu, z_0) \in \mathcal{V}_\mu$ ставит в соответствие n-вектор-строку

$$({}^0_P v(t, \mu, z_0), {}^1_P v(t, \mu, z_0), \ldots, {}^{n-1}_P v(t, \mu, z_0)), \quad t \in T. \tag{8}$$

В соответствии с соотношением для выхода системы (4) любая функция $v(\,\cdot\,, \mu, z_0) \in \mathcal{V}_\mu$ является образом некоторого процесса $z(t, \mu, z_0)$, $t \in T$, поэтому композиция отображений (1) и (4) определяет линейное отображение из множества процессов $Z(\mu) = \{(z(t, \mu, z_0), t \in T), z_0 \in \mathbb{R}^n\}$ во множество n-векторов $V_P(\mu) = \{(V_P(t, \mu, z_0), t \in T),\ z_0 \in \mathbb{R}^n\}$ квазипроизводных выходных функций и при каждом $t \in T$ задаёт отображение из множества $\{z(t, \mu, z_0), z_0 \in \in \mathbb{R}^n\}$ векторов состояния во множество $\{V_P(t, \mu, z_0), z_0 \in \mathbb{R}^n\}$ векторов квазипроизводных выходных функций в точке $t \in T$.

Следуя работе [6], введём определение P-равномерной наблюдаемости ЛНСВС (2), (3).

Определение 2. При фиксированном $\mu \in (0, \mu^0]$ *система (2), (3) класса* $\{P, n-1\}$ называется *P-равномерно наблюдаемой на T*, если для каждого $t \in T$ отображение

$$\{z(t, \mu, z_0), z_0 \in \mathbb{R}^n\} \to \{V_P(t, \mu, z_0), z_0 \in \mathbb{R}^n\}, \tag{9}$$

задаваемое системой (4) и правилами (1), является инъекцией.

Семейство систем $\{A^0, A^1, c\}_{\mu^0} \in \{P, n-1\}$ называется *P-равномерно наблюдаемым на* T, если любая система семейства P-равномерно наблюдаема на T.

P-равномерная наблюдаемость системы (A_μ, c) при фиксированном $\mu \in (0, \mu^0]$ означает, что в каждый момент времени $t \in T$ по известному μ и известным в этот момент времени выходной функции $v(t)$ и её последовательным квазипроизводным ${}^k_P v(t)$, $k = \overline{0, n-1}$, состояние $z(t, \mu)$ системы (2), (3) можно определить однозначно.

P-равномерная наблюдаемость семейства систем $(A^0, A^1, c)_{\mu^0}$ означает, что такое восстановление состояния возможно при любом $\mu \in (0, \mu^0]$. В силу линейности отображения из определения 2 это равносильно тому, что при любом $z_0 \in \mathbb{R}^n$ μ-параметрическому семейству векторов квазипроизводных $\mathbf{V}_P \equiv \{(V_P(t, \mu, z_0), t \in T),\ \mu \in (0, \mu^0]\}$ однозначно соответствует процесс $z(t, \mu)$ как функция от (t, μ) на $T \times (0, \mu^0]$, т.е. при любом $\mu \in (0, \mu^0]$ совпадающим вектор-функциям $(V_P(t, \mu), t)$, $t \in T$, соответствуют совпадающие процессы $z(t, \mu)$, $t \in T$.

Приведём пример, который показывает зависимость инъективности отображения (9) от параметра $\mu > 0$. Для этого рассмотрим систему (2), (3) второго порядка с матрицами

$$A(t, \mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1.01\mu^{-1} & -\mu^{-1} \end{pmatrix}, \quad c(t) = \begin{pmatrix} t & t \end{pmatrix}, \quad n_1 = n_2 = 1, \quad t_0 = 0, \quad t_1 = 1,$$

для случая дифференцируемых выходов (т.е. квазидифференцируемых по матрице $P = E_2$).

Несложно показать, что для начальных условий $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ решение данной системы имеет вид

$$x(t, \mu, x_0, y_0) = e^t x_0, \quad y(t, \mu, x_0, y_0) = 1.01x_0(1+\mu)^{-1}(e^{-t/\mu} - e^t) + e^{-t/\mu} y_0,$$

а соответствующая выходная функция и её первая производная равны

$$v(t, \mu, x_0, y_0) = t(e^t x_0 + 1.01x_0(1+\mu)^{-1}(e^{-t/\mu} - e^t) + e^{-t/\mu} y_0),$$

$$\dot v(t, \mu, x_0, y_0) = e^t x_0 + 1.01x_0(1+\mu)^{-1}(e^{-t/\mu} - e^t) + e^{-t/\mu} y_0 +$$
$$+ t(e^t x_0 - 1.01x_0(1+\mu)^{-1}(\mu^{-1}e^{-t/\mu} + e^t) - \mu^{-1}e^{-t/\mu} y_0).$$

При $t=0$ и любом $\mu>0$ начальные состояния $(x_0^1, y_0^1)=(0,1)$ и $(x_0^2, y_0^2)=(1,0)$ неразличимы по информации (8), так как $v(0,\mu,0,1)=v(0,\mu,1,0)=0$, $\dot v(0,\mu,0,1)=\dot v(0,\mu,1,0)=1$.

Если $\mu=0.01$, то для начальных состояний вида $(x_0^3, y_0^3)=(-a,a)$ и $(x_0^4, y_0^4)=(-b,b)$, $a\neq b$, текущие состояния $z(t,0.01,-a,a)$ и $z(t,0.01,-b,b)$ при любом $t\in T$ неразличимы, так как $v(t,0.01,-a,a)=v(t,0.01,-b,b)\equiv 0$, $t\in T$. Для $t\neq 0$ и $\mu\neq 0.01$ отображение (9) инъективно.

Далее найдём условия на матрицы системы (2), (3), при выполнении которых она P-равномерно наблюдаема для всех достаточно малых значений $\mu>0$.

Несложно показать, что для системы $(A_\mu, c)\in\{P, n-1\}$ справедливы соотношения

$$s_j(t,\mu)z(t,\mu)={}^{\,j}_{P}v(t,\mu),\quad j=\overline{0,n-1},$$

которые с учётом обозначений

$$S_P(t,\mu)=\begin{pmatrix} s_0(t,\mu)\\ s_1(t,\mu)\\ \dots\\ s_{n-1}(t,\mu)\end{pmatrix} \tag{10}$$

приводят к системе уравнений $S_P(t,\mu)z(t,\mu)=V_P(t,\mu,z_0)$ относительно вектора состояния $z(t,\mu)$, $t\in T$, явным образом задающей отображение из определения 2.

Очевидно, что для каждой матрицы $P\in\mathcal{P}_{n-1}(A_\mu,c)$ можно определить матрицу наблюдаемости $S_P(t,\mu)$ по формулам (6), (10). Из леммы 2.5 [8, с. 54] следует, что при каждом $\mu>0$ и каждом $t\in T$ все матрицы наблюдаемости $S_P(t,\mu)$, $P\in\mathcal{P}_{n-1}(A_\mu,c)$ одновременно либо вырождены, либо невырождены. Инъективность отображения (9) в определении 2 определяется невырожденостью матрицы наблюдаемости $S_P(t,\mu)$ при $t\in T$ и не зависит от выбора матрицы $P\in\mathcal{P}_{n-1}(A_\mu,c)$.

Применив к системе (4) при фиксированном $\mu>0$ критерий P-равномерной наблюдаемости [8, с. 38], получим утверждение.

Теорема 2. *Система (2), (3) класса $\{P, n-1\}$ P-равномерно наблюдаема на T при фиксированном $\mu>0$ тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rank} S_P(t,\mu)=n$ *при каждом* $t\in T$.

Для линейных стационарных СВС можно показать, что если её матрица наблюдаемости является матрицей полного ранга хотя бы при одном $\mu>0$, то она является матрицей полного ранга при всех достаточно малых $\mu>0$. Для линейных нестационарных СВС это не так, т.е. существуют линейные нестационарные СВС, для которых матрица наблюдаемости $S_P(t,\mu)$ является матрицей полного ранга при некотором $\mu^*>0$, но не является матрицей полного ранга при всех достаточно малых $\mu>0$.

Продемонстрируем этот факт на примере системы (2), (3) с параметрами

$$A(t,\mu)=\begin{pmatrix}-10 & -0.2\\ 0 & -1/\mu\end{pmatrix},\quad c(t)=\begin{pmatrix}-1 & t\end{pmatrix},\quad n_1=n_2=1,\quad t\in T=[0,2].$$

Для этой системы классическая матрица наблюдаемости имеет вид

$$S(t,\mu)=\begin{pmatrix}-1 & t\\ 10 & 1.2-t/\mu\end{pmatrix},$$

а её определитель $\det S(t,\mu)=\,-1.2+t/\mu-10t$. Тогда при $\mu_1=0.1$ $\det S(t,\mu_1)=-1.2\neq 0$ для всех $t\in T$. Однако для $\mu=t(1.2+10t)^{-1}$, где $t\in T$, имеем $\det S(t,\mu)=0$. Поэтому очевидно, что при всех $\mu\in(0,2/21.2]$ в точках $t=1.2\mu(1-10\mu)^{-1}\in T$ определитель $\det S(t,\mu)=0$.

Следствие 3. *Существуют ЛНСВС (2), (3) класса $\{P, n-1\}$, которые P-равномерно наблюдаемы на отрезке T при некотором фиксированном $\mu^*>0$, но при этом любое семейство $\{A^0, A^1, c\}_\mu$, $\mu>0$, не является P-равномерно наблюдаемым на T.*

4. Декомпозиция системы (2), (3) и описание её подсистем. С системой (2), (3) связаны [14] независящие от параметра μ вырожденная система (ВС) и система пограничного слоя (СПС), которые формально получаются из СВС, если рассмотреть её отдельно в "быстрой" и "медленной" временных шкалах при $\mu = 0$.

Предположим, что $\det A_4(t) \neq 0$, $t \in T$. Тогда ВС (медленная подсистема) имеет вид

$$\frac{d\overline{x}(t)}{dt} = A_s(t)\overline{x}(t), \quad \overline{x}(t_0) = x_0, \quad v_s(t) = c_s(t)\overline{x}(t), \quad t \in T,$$

$$A_s(t) \equiv A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t), \quad c_s(t) \equiv c_1(t) - c_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t), \tag{11}$$

и является линейной нестационарной n_1-мерной системой. Отождествим её с парой (A_s, c_s).

СПС (или "быстрая" подсистема) для системы (2), (3) записывается следующим образом:

$$\frac{d\tilde{y}(\tau)}{d\tau} = A_4(t_0)\tilde{y}(\tau), \quad v_f(\tau) = c_2(t_0)\tilde{y}(\tau), \quad \tau = \frac{t - t_0}{\mu} \in T_\mu \equiv \left[0, \frac{t_1 - t_0}{\mu}\right], \tag{12}$$

$$\tilde{y}(\tau) = y(t_0 + \mu\tau) - A_4^{-1}(t_0)A_3(t_0)x_0, \quad \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0 \equiv y_0 + A_4^{-1}(t_0)A_3(t_0)x_0.$$

Она является линейной стационарной n_2-мерной системой, которую отождествим с парой матриц $(A_4(t_0), c_2(t_0))$.

Наряду со стационарной СПС (12), введём t-семейство $(A_4, c_2)(t)$ быстрых подсистем вида (12) с матрицами $A_4(t)$, $c_2(t)$, где $t \in T$ рассматривается как параметр семейства стационарных систем (по терминологии А.Н. Тихонова [27] – *присоединённая система*).

Заметим, что ВС (11), СПС (12) и t-семейство быстрых подсистем определяются сразу для всего семейства $(A^0, A^1, c)_{\mu^0}$ при любом $\mu^0 > 0$.

Обозначим через $\lambda(A(t))$ корни характеристического уравнения матрицы $A(t)$, а символ $O(\mu)$ будем использовать для описания бесконечно малых величин порядка малости μ.

Следующее утверждение, доказательство которого следует из работ [14, 28], позволяет установить связь между исходной системой (2), (3) и системами (11), (12).

Теорема 3. *Пусть* $\operatorname{Re}\lambda(A_4(t)) \leqslant -\alpha < 0$ *при всех* $t \in T$ *и матричные функции* $A_i(t)$, $i = \overline{1,4}$, *непрерывно дифференцируемы на* T. *Тогда существует невырожденное линейное нестационарное преобразование фазовых переменных*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = K(t,\mu)\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}$$

с матрицей $K(t,\mu)$ *следующей структуры:*

$$K(t,\mu) = \begin{pmatrix} E_{n_1} & \mu H(t,\mu) \\ -L(t,\mu) & E_{n_2} - \mu L(t,\mu)H(t,\mu) \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где $\det K(t,\mu) \neq 0$ *для любых* $\mu > 0$ *и* $t \in T$, *которое преобразует систему (2), (3) в систему с разделёнными переменными*

$$\dot{\xi}(t) = A_\xi(t,\mu)\xi(t), \quad \xi \in \mathbb{R}^{n_1},$$

$$\mu\dot{\eta}(t) = A_\eta(t,\mu)\eta(t), \quad \eta \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad t \in T,$$

$$v(t) = \begin{pmatrix} c_\xi(t,\mu) & c_\eta(t,\mu) \end{pmatrix}, \quad t \in T. \tag{14}$$

При этом матричные функции $L(t,\mu)$, $H(t,\mu)$ *в формуле (13) являются непрерывно дифференцируемыми на* T *с ограниченными производными и справедливы представления*

$$L(t,\mu) = L_0(t) + \mu R_L(t,\mu), \quad L_0(t) = A_4^{-1}(t)A_3(t),$$

$$H(t,\mu) = H_0(t) + \mu R_H(t,\mu), \quad H_0(t) = A_2(t)A_4^{-1}(t). \tag{15}$$

Матричные функции $R_L(t,\mu)$, $R_H(t,\mu)$ в (15) ограничены на T, а для матриц системы (14) имеет место равномерная по t асимптотика с точностью порядка μ:

$$A_\xi(t,\mu) \equiv A_1(t) - A_2(t)L(t,\mu) = A_s(t) + \mu A_2 R_L(t,\mu) = A_s(t) + O(\mu),$$

$$A_\eta(t,\mu) \equiv A_4(t) + \mu L(t,\mu)A_2(t) = A_4(t) + O(\mu),$$

$$c_\xi(t,\mu) \equiv c_1(t) - c_2(t)L(t,\mu) = c_s(t) - \mu c_2 R_L(t,\mu) = c_s(t) + O(\mu),$$

$$c_\eta(t,\mu) \equiv c_2(t) + \mu c_1(t)H(t,\mu) - \mu c_2(t)L(t,\mu)H(t,\mu) = c_2(t) + O(\mu). \tag{16}$$

Доказательство. Условия данной теоремы гарантируют выполнение условий теоремы 3.1 из работы [14]. Поэтому существует преобразование $K(t,\mu)$ вида (13), где $L(t)$, $H(t)$ – ограниченные непрерывно дифференцируемые матрицы с ограниченными на T производными. Кроме того, матричные функции $A_4^{-1}(t)A_3(t)$, $A_2(t)A_4^{-1}(t)$ непрерывно дифференцируемы на T. Поэтому существуют и ограничены производные $\dot L_0(t)$, $\dot H_0(t)$. Следовательно, матричные функции $R_L(t,\mu)$, $R_H(t,\mu)$ ограничены на T и справедливы аппроксимации [14, с. 212]

$$L(t,\mu) = L_0(t) + O(\mu), \quad H(t,\mu) = H_0(t) + O(\mu). \tag{17}$$

Из формул (17), (15) и (11) вытекает справедливость представлений (16).

Следствие 4. *Матричные функции $A_\xi(t,\mu)$, $A_\eta(t,\mu)$, $c_\xi(t,\mu)$, $c_\eta(t,\mu)$ системы (14) являются $O(\mu)$-возмущениями матриц вырожденной системы (A_s,c_s) (11) и t-семейства быстрых подсистем $(A_4,c_2)(t)$, связанных с (12).*

5. Класс $\{P,m\}$ для подсистем ЛНСВС. Пусть задана нижнетреугольная матрица $P \in \mathcal{U}_{n-1}(T)$, а матрица $\bar P$ есть её верхний левый блок размерности $n_1 \times n_1$. Заметим, что $\bar P \in \mathcal{U}_{n_1-1}(T)$. Для вырожденной системы (11) понятие класса $\{P,m\}$ вводится, как и в [8]. Так как система пограничного слоя и любая система из t-семейства быстрых подсистем стационарны, то они являются системами класса $\{\tilde P,m\}$ при любом целом неотрицательном m и любой матрице $\tilde P \in \mathcal{U}_m(T)$.

Лемма 2. *Если $(A_\mu,c) \in \{P,n-1\}$ при любом $\mu>0$, то $(A_s,c_s) \in \{P,n-1\}$ и $(A_s,c_s) \in \in \{\bar P,n_1-1\}$, где $\bar P$ образует верхний левый блок матрицы P.*

Доказательство. Из формул (11)–(17) следует, что для выходной функции (3) справедливо представление

$$v(t,\mu,z_0) = c_s(t)x_s(t) + c_2(t)\tilde y_f(\tau) + O(\mu). \tag{18}$$

Так как для любого $t \in T$ система $(A_4(t),c_2(t))$ является системой класса $\{\tilde P,m\}$ при любой матрице $\tilde P \in \mathcal{U}_m(T)$ и любом целом неотрицательном m, то выход быстрой подсистемы $v_f(\tau) = c_2(t)\tilde y_f(\tau)$ имеет непрерывные квазипроизводные любого порядка относительно матрицы P. Тогда из представления выхода $v(t,\mu,z_0)$ в виде суммы (18) и следствия 1 вытекает принадлежность системы (A_s,c_s) классу $\{P,n-1\}$. Очевидно, что $C_P^{n-1}(T) \subset C_{\bar P}^{n_1-1}(T)$ и из $(A_s,c_s) \in \{P,n-1\}$ следует $(A_s,c_s) \in \{\bar P,n_1-1\}$, что и завершает доказательство леммы.

Однако из принадлежности $(A_s,c_s) \in (\bar P,n_1-1)$ в общем случае не следует существования матрицы $P \in \mathcal{U}_{n-1}(T)$, для которой матрица $\bar P$ образует её верхний левый блок и при этом $(A_\mu,c) \in \{P,n-1\}$ хотя бы для одного $\mu>0$. Продемонстрируем это на примере системы (2), (3) с матрицами

$$A(t,\mu) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ \gamma(t)/\mu & -1/\mu \end{pmatrix}, \quad c(t) = \begin{pmatrix} \gamma(t)+1 & -1 \end{pmatrix}, \quad n_1 = n_2 = m = 1, \quad t_0 = 0, \quad t_1 = 2,$$

где $\gamma(t)$ – непрерывная, но нигде не дифференцируемая функция на T. Легко показать, что $A_s = a_1 + \gamma(t)a_2$, $c_s = 1$ и ВС принадлежит классу $(\bar P,0)$ при $\bar P = E_1$. Вместе с тем данная система не принадлежит классу $(P,1)$ ни при какой матрице P с верхним левым блоком $\bar P$, ни при каком $\mu>0$, так как $c(t)$ не дифференцируема.

6. Связь матриц наблюдаемости ЛНСВС и её подсистем.

Определение 3. Вырожденная система (11) класса $\{\bar P, n_1-1\}$ называется *$\bar P$-равномерно наблюдаемой* на T, если для каждого $t\in T$ и любого $x_0\in\mathbb{R}^{n_1}$ отображение

$$\bar x(t)\to({}_{\bar P}^{0}v_s(t), {}_{\bar P}^{1}v_s(t),\ldots, {}_{\bar P}^{n_1-1}v_s(t)),\quad v_s(t)=v_s(t,x_0),$$

задаваемое системой (11) и правилами (1), инъективно.

Пусть $(A_s,c_s)\in\{\bar P, n_1-1\}$. Определим $n_1\times n_1$-матрицу наблюдаемости вырожденной системы (A_s,c_s):

$$\bar S_{\bar P}(t)=\begin{pmatrix}\bar s_0(t)\\ \bar s_1(t)\\ \ldots\\ \bar s_{n_1-1}(t)\end{pmatrix},\quad t\in T, \tag{19}$$

где n_1-вектор-строки $\bar s_j(t)$, $j=1,2,\ldots,$ определяются по формулам

$$\bar s_0(t)=\bar p_{00}(t)c_s(t),\quad \bar s_j(t)=\bar p_{jj}(t)(\bar s_{j-1}(t)A_s(t)+\dot{\bar s}_{j-1}(t))+\sum_{i=0}^{j-1}\bar p_{ji}(t)\bar s_i(t). \tag{20}$$

Применяя к линейной нестационарной системе (11) условия из [8], убеждаемся, что справедлива

Теорема 4. *Вырожденная система класса $\{\bar P, n_1-1\}$ $\bar P$-равномерно наблюдаема на T тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rank}\bar S_{\bar P}(t)=n_1$ *для любого* $t\in T$.

Пусть задана некоторая матрица $\tilde P\in\mathcal{U}_{n_2-1}(T)$.

Определение 4. Система пограничного слоя (12) называется *$\tilde P$-равномерно наблюдаемой на T_μ*, если для каждого $\tau\in T_\mu$ и любого $\tilde y_0\in\mathbb{R}^{n_2}$ отображение

$$\tilde y(\tau)\to({}_{\tilde P}^{0}v_f(\tau), {}_{\tilde P}^{1}v_f(\tau),\ldots, {}_{\tilde P}^{n_2-1}v_f(\tau)),\quad v_f(\tau)=v_f(\tau,\tilde y_0),$$

задаваемое системой (12) и правилами (1), инъективно.

Будем говорить, что *t-семейство быстрых подсистем* $(A_4,c_2)(t)$ *$\tilde P$-равномерно наблюдаемо на T_μ*, если каждая подсистема из этого семейства $\tilde P$-равномерно наблюдаема.

Так как система (12) является стационарной системой, то для неё условия $\tilde P$-равномерной, равномерной, полной и дифференциальной наблюдаемости совпадают. Поэтому справедлива

Лемма 3. *При любой матрице $\tilde P\in\mathcal{U}_{n_2-1}(T)$ t-семейство быстрых подсистем $(A_4,c_2)(t)$ $\tilde P$-равномерно наблюдаемо на T_μ тогда и только тогда, когда каждая система из этого семейства полностью наблюдаема.*

Наблюдаемость t-семейства быстрых подсистем соответствует понятию “сильной наблюдаемости замороженного объекта” в терминологии статьи [29].

Определим $n_2\times n_2$-матрицу наблюдаемости семейства $(A_4,c_2)(t)$, $t\in T$:

$$\tilde S(t)=\begin{pmatrix}\tilde s_0(t)\\ \tilde s_1(t)\\ \ldots\\ \tilde s_{n_2-1}(t)\end{pmatrix}, \tag{21}$$

где n_2-вектор-строки $\tilde s_0(t)$, $\tilde s_1(t)$, $\ldots$ определяются по формулам

$$\tilde s_j(t)=\tilde s_{j-1}(t)A_4(t),\quad \tilde s_0(t)=c_2(t). \tag{22}$$

Заметим, что $\tilde S(t_0)$ совпадает с матрицей наблюдаемости стационарной СПС (12).

Записывая для системы (12) условия из [8], убеждаемся, что справедлива

Теорема 5. *При любой матрице $\tilde P\in\mathcal{U}_{n_2}(T)$ система пограничного слоя (12) $\tilde P$-равномерно наблюдаема тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rank}\tilde S(t_0)=n_2$, *а t-семейство быстрых подсистем $(A_4,c_2)(t)$ $\tilde P$-равномерно наблюдаемо тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rank}\tilde S(t)=n_2$ *для любого* $t\in T$.

7. Условия $\boldsymbol{P}$-равномерной наблюдаемости ЛНСВС. Пусть задана нижнетреугольная матрица $P\in\mathcal{U}_{n-1}(T),$ а матрица $\bar P$ есть её верхний левый блок размерности $n_1\times n_1.$

Теорема 6. *Пусть матричные функции $A_i(t),$ $i=\overline{1,4},$ непрерывно дифференцируемы на отрезке T и $\operatorname{Re}\lambda(A_4(t))\leqslant -\alpha<0$ для любого $t\in T.$ Если $n\geqslant 2,$ то считаем матричные функции $s_j^m(t),$ $j=\overline{0,n-2},$ $m=\overline{0,j},$ непрерывно дифференцируемыми на $T.$ Если вырожденная система (A_s,c_s) $\bar P$-равномерно наблюдаема на T и t-семейство быстрых подсистем $(A_4,c_2)(t)$ полностью наблюдаемо на $T,$ то найдётся такое $\hat\mu\in(0,\mu^0],$ что семейство $\{A^0,A^1,c\}_{\hat\mu}$ систем (2), (3) P-равномерно наблюдаемо на $T.$*

Доказательство. Из условий теоремы 6 следует, что $\det A_4(t)\neq 0,$ $t\in T.$ Из теоремы 3 вытекает, что существует невырожденное преобразование $K(t,\mu),$ которое преобразует систему (2), (3) в систему (14). Свойство P-равномерной наблюдаемости системы (2), (3) инвариантно относительно преобразования $K(t,\mu)$ [8, с. 66]. Поэтому система (2), (3) и система (14) одновременно являются P-равномерно наблюдаемыми или нет. Из теоремы 1 следует, что система (A_μ,c) имеет класс $\{P,n-1\}$ для любого $\mu>0.$ Так как [8, с. 44, следствие 2.1] для любого $m>0$ множество систем класса $\{P,m\}$ инвариантно относительно преобразования $K(t,\mu),$ то система (14) также является системой класса $\{P,n-1\}$ при любом $\mu>0.$ Тогда для неё определена матрица наблюдаемости

$$S_{\xi\eta}(t,\mu)=\begin{pmatrix} h_0(t,\mu)\\ h_1(t,\mu)\\ \ldots\\ h_{n-1}(t,\mu)\end{pmatrix},\quad t\in T,$$

составленная из n-вектор-строк $h_j(t,\mu),$ $j=\overline{0,n-1},$ определённых по формулам

$$h_j(t,\mu)=p_{jj}(t)(h_{j-1}(t,\mu)A_{\xi\eta}(t,\mu)+\dot h_{j-1}(t,\mu))+\sum_{i=0}^{j-1}p_{ji}(t)h_i(t,\mu),\quad h_0(t,\mu)=p_{00}(t)c_{\xi\eta}(t,\mu).$$

В силу диагонального вида матрицы $A_{\xi\eta}(t,\mu)$ матрица наблюдаемости $S_{\xi\eta}(t,\mu)$ системы (14) имеет блочную структуру

$$S_{\xi\eta}(t,\mu)=(S_\xi(t,\mu)\ \vdots\ S_\eta(t,\mu)), \tag{23}$$

где

$$S_\xi(t,\mu)=\begin{pmatrix} s_{\xi0}(t,\mu)\\ s_{\xi1}(t,\mu)\\ \ldots\\ s_{\xi n-1}(t,\mu)\end{pmatrix},\quad S_\eta(t,\mu)=\begin{pmatrix} s_{\eta0}(t,\mu)\\ s_{\eta1}(t,\mu)\\ \ldots\\ s_{\eta n-1}(t,\mu)\end{pmatrix},$$

$$s_{\xi k}(t,\mu)=p_{kk}(t)(s_{\xi,k-1}(t,\mu)A_\xi(t,\mu)+\dot s_{\xi,k-1}(t,\mu))+\sum_{i=0}^{k-1}p_{ki}(t)s_{\xi i}(t,\mu),$$

$$s_{\eta k}(t,\mu)=p_{kk}(t)\left(s_{\eta,k-1}(t,\mu)\frac{A_\eta(t,\mu)}{\mu}+\dot s_{\eta,k-1}(t,\mu)\right)+\sum_{i=0}^{k-1}p_{ki}(t)s_{\eta i}(t,\mu),\quad k=1,2,\ldots,$$

$$s_{\xi0}(t,\mu)=p_{00}(t)c_\xi(t,\mu),\quad s_{\eta0}(t,\mu)=p_{00}(t)c_\eta(t,\mu). \tag{24}$$

Докажем, что в условиях теоремы 6 для матрицы наблюдаемости $S_{\xi\eta}(t,\mu)$ системы (14) справедливо представление

$$S_{\xi\eta}(t,\mu)=\left(\begin{array}{c|c} \bar s_0(t)+O(\mu) & p_{00}(t)\tilde s_0(t)+O(\mu)\\ \bar s_1(t)+O(\mu) & \dfrac{1}{\mu}(p_{11}(t)p_{00}(t)\tilde s_1(t)+O(\mu))\\ \ldots & \ldots\\ \bar s_{n-1}(t)+O(\mu) & \dfrac{1}{\mu^{n-1}}\left(\prod_{j=0}^{n-1}p_{n-1-j,n-1-j}(t)\tilde s_{n-1}(t)+O(\mu)\right)\end{array}\right), \tag{25}$$

где $\bar s_j(t),$ $\tilde s_j(t),$ $j=\overline{0,n-1},$ вычисляются по формулам (20), (22).

Отметим, во-первых, что согласно лемме 2 функции $\bar{s}_j(t)$, $j=\overline{0,n-1}$, определены.

Методом математической индукции докажем формулы

$$s_{\xi j}(t,\mu)=\sum_{m=0}^{j+1}\mu^m f_j^m(t,\mu),\quad s_{\eta j}(t,\mu)=\frac{1}{\mu^j}\biggl(\sum_{m=0}^{j+1}\mu^m g_j^m(t,\mu)\biggr),\quad j=\overline{0,n-1},\tag{26}$$

где ограниченные на T функции $f_j^m(t,\mu)$, $g_j^m(t,\mu)$, $j=0,1,\ldots,$ определены рекуррентными соотношениями:

$$f_j^m(t,\mu)=p_{jj}(t)(f_{j-1}^m(t,\mu)A_s(t)+f_{j-1}^{m-1}(t,\mu)A_2(t)R_L(t,\mu)+\dot f_{j-1}^m(t,\mu))+\sum_{i=m}^{j-1}p_{ji}(t)f_{i-1}^m(t,\mu),\tag{27}$$

$$f_0^0(t,\mu)=p_{00}(t)c_s(t),\quad f_0^1(t,\mu)=-p_{00}(t)c_2(t)R_L(t,\mu),\quad f_j^m(t,\mu)=0,\quad m<0\ \text{ или }\ m>j+1,$$

$$g_j^m(t,\mu)=p_{jj}(t)(g_{j-1}^m(t,\mu)A_4(t)+g_{j-1}^{m-1}(t,\mu)L(t,\mu)A_2(t)+\dot g_{j-1}^{m-1}(t,\mu))+\sum_{i=m}^{j-1}p_{ji}(t)g_{i-1}^m(t,\mu),\tag{28}$$

$$g_0^0(t,\mu)=p_{00}(t)c_2(t),\quad g_0^1(t,\mu)=p_{00}(t)(c_1(t)H(t,\mu)+c_2L(t,\mu)H(t,\mu)),$$
$$g_j^m(t,\mu)=0,\quad m<0\ \text{ или }\ m>j+1.$$

Справедливость формул (26) для $j=0$ следует из (24), (16), (27), (28). Пусть (26) верны для $j\leqslant k-1$. Поскольку $(A_{\xi\eta}(t,\mu),c_{\xi\eta})\in\{P,n-1\}$ при любом $\mu>0$, то $h_j(\,\cdot\,,\mu)\in C^1(T,\mathbb{R})$, $j=\overline{0,n-2}$, откуда в силу (23) следует $s_{\xi j}(\,\cdot\,,\mu)\in C^1(T,\mathbb{R})$, $s_{\eta j}(\,\cdot\,,\mu)\in C^1(T,\mathbb{R})$, $j=\overline{0,n-2}$, для любых $\mu>0$. Тогда согласно лемме 1 имеем $f_j^m(\,\cdot\,,\mu)\in C^1(T,\mathbb{R})$, $j=\overline{0,k-1}$.

Докажем первую формулу из (26) для $j=k$. Действительно, из (24) имеем

$$s_{\xi k}(t,\mu)=p_{kk}(t)(s_{\xi,k-1}(t,\mu)A_\xi(t,\mu)+\dot s_{\xi,k-1}(t,\mu))+\sum_{i=0}^{k-1}p_{ki}(t)s_{\xi,i}(t,\mu)=$$

$$=p_{kk}(t)\biggl(\sum_{m=0}^{k}\mu^m f_{k-1}^m(t,\mu)(A_s(t)+\mu A_2(t)R_L(t,\mu))+\sum_{m=0}^{k}\mu^m\dot f_{k-1}^m(t,\mu)\biggr)+$$

$$+\sum_{i=0}^{k-1}p_{ki}(t)\sum_{m=0}^{i}\mu^m f_{i-1}^m(t,\mu)=p_{kk}(t)\biggl(\sum_{m=0}^{k}\mu^m f_{k-1}^m(t,\mu)A_s(t)+\sum_{m=1}^{k+1}\mu^m f_{k-1}^{m-1}(t,\mu)A_2(t)R_L(t,\mu)+$$

$$+\sum_{m=0}^{k}\mu^m\dot f_{j-1}^m(t,\mu)\biggr)+\sum_{m=0}^{k-1}\mu^m\sum_{i=m}^{k-1}p_{ki}(t)f_{i-1}^m(t,\mu)=\sum_{m=0}^{k}\mu^m f_k^m(t,\mu).$$

Аналогично доказывается вторая формула из (26). Пусть она верна для $j\leqslant k-1$. Докажем её для $j=k$. Действительно, из (24) имеем

$$s_{\eta k}(t,\mu)=p_{kk}(t)\biggl(s_{\eta,k-1}(t,\mu)\frac{1}{\mu}A_\eta(t,\mu)+\dot s_{\eta,k-1}(t,\mu)\biggr)+\sum_{i=0}^{k-1}p_{ki}(t)s_{\eta,i}(t,\mu)=$$

$$=p_{kk}(t)\biggl(\frac{1}{\mu^k}\sum_{m=0}^{k}\mu^m g_{j-1}^m(t,\mu)\biggl(A_4(t)+\frac{1}{\mu^{k-1}}L(t,\mu)A_2(t)\biggr)+\sum_{m=0}^{k}\mu^m\dot g_{k-1}^m(t,\mu)\biggr)+$$

$$+\sum_{i=0}^{k-1}p_{ki}(t)\sum_{m=0}^{i}\mu^m g_{i-1}^m(t,\mu)=p_{kk}(t)\biggl(\frac{1}{\mu^k}\biggl(\sum_{m=0}^{k}\mu^m g_{k-1}^m(t,\mu)A_4(t)+$$

$$+\sum_{m=1}^{k+1}\mu^m g_{k-1}^{m-1}(t,\mu)L(t,\mu)A_2(t)+\sum_{m=0}^{k}\mu^m \dot g_{k-1}^{m}(t,\mu)\Big)\Big)+\sum_{m=0}^{k-1}\mu^m\sum_{i=m}^{k-1}p_{ki}(t)g_{i-1}^m(t,\mu)=$$

$$=\frac{1}{\mu^k}\sum_{m=0}^{k}\mu^m g_k^m(t,\mu).$$

Таким образом, формулы (26) доказаны. Из (26) с учётом (27), (28) для $j=\overline{0,n-1}$ легко получить соотношения

$$s_{\xi j}(t,\mu)=\bar s_j(t)+\mu\sum_{m=0}^{j}\mu^m f_j^{m+1}(t,\mu),\quad s_{\eta j}(t,\mu)=\frac{1}{\mu^j}\bigg(c_2(t)A_4^j(t)+\mu\sum_{m=0}^{j}\mu^m g_j^{m+1}(t,\mu)\bigg).\quad (29)$$

При выполнении условий теоремы 6 для любого $j=\overline{0,n-1}$ верно $h_j(\,\cdot\,,\mu)\in C(T,\mathbb{R}^n)$. Кроме того, из леммы 2 имеем $(A_s,c_s)\in\{P,n-1\}$, а значит, определены и ограничены на T векторные функции $\bar s_j(t)$, $j=\overline{0,n-1}$. Поэтому функции $s_{\xi j}(t)-\bar s_j(t)$, $\mu^j s_{\eta j}(t)-c_2(t)A_4^j(t)$ для $j=\overline{0,n-1}$ ограничены на T и из (29) следуют равенства

$$s_{\xi j}(t,\mu)=\bar s_j(t)+O(\mu),\quad s_{\eta j}(t,\mu)=\frac{1}{\mu^j}\bigg(\prod_{p=0}^{j}p_{j-p,j-p}(t)c_2(t)A_4^j(t)+O(\mu)\bigg),$$

т.е. формулы для матрицы (25) справедливы.

Умножим слева матрицу $S_{\xi\eta}(t,\mu)$ на невырожденную матрицу

$$M_P=\operatorname{diag}\bigg\{E_{n_1},\mu^{n_1}\bigg(\prod_{i=0}^{n_1}p_{j-i,j-i}(t)\bigg)^{-1},\ldots,\mu^{n_1+n_2-1}\bigg(\prod_{i=0}^{n_1+n_2-1}p_{j-i,j-i}(t)\bigg)^{-1}\bigg\}.$$

В результате получим блочную матрицу вида

$$\bar S_{\xi\eta}(t,\mu)=\left(\begin{array}{c|c}\bar S_{\bar P}(t)+O(\mu) & *\\ \hline O(\mu)* & \tilde S(t)A_4^{n_1}+O(\mu)*\end{array}\right),$$

где $\bar S_{\bar P}(t)$, $\tilde S(t)$ определены в (19), (21), а $*$, $O(\mu)*$ – некоторые матрицы подходящих размерностей, при этом элементы матриц $O(\mu)*$ являются бесконечно малыми величинами порядка малости μ при любом $t\in T$. Ранг матрицы $\bar S_{\xi\eta}(t,\mu)$ равен рангу матрицы $S_{\xi\eta}(t,\mu)$ при всех $t\in T$.

Рассмотрим матрицу

$$S_{sf}(t)=\left(\begin{array}{c|c}\bar S_{\bar P}(t) & *\\ \hline 0 & \tilde S(t)\end{array}\right),$$

которая получается из матрицы $S_{\xi\eta}(t)$ умножением её справа на невырожденную матрицу $\operatorname{diag}\{E_{n_1},(A_4^{n_1})^{-1}\}$ и отбрасыванием членов $O(\mu)$. При выполнении условий теоремы 6 с учётом теоремы 4 верхний левый блок $\bar S_{\bar P}(t)$ полученной матрицы имеет полный ранг по столбцам для любого $t\in T:$ $\operatorname{rank}\bar S_{\bar P}(t)=n_1$. С учётом теоремы 5 нижний правый блок этой матрицы также имеет полный ранг по столбцам $\operatorname{rank}\tilde S(t)=n_2$, $t\in T$. Поскольку оба диагональных блока $\bar S_{\bar P}(t)$ и $\tilde S(t)$ матрицы $S_{sf}(t)$ имеют полный ранг по столбцам, то матрица $S_{sf}(t)$ также имеет полный ранг по столбцам для любых $t\in T$. Действительно, если это не так, то существует n_1+n_2-вектор-столбец $(g_1^{\mathrm T},g_2^{\mathrm T})^{\mathrm T}$, $g_1\in\mathbb{R}^{n_1}$, $g_2\in\mathbb{R}^{n_2}$, $\|g_1\|+\|g_2\|\ne0:$ $S_{sf}(t)(g_1^{\mathrm T},g_2^{\mathrm T})^{\mathrm T}=0$, что равносильно $\bar S_{\bar P}(t)g_1+*g_2=0$, $\tilde S(t)g_2=0$. Из последнего равенства в силу полноты ранга матрицы $\tilde S(t)$ следует $g_2=0$, тогда из первого равенства имеем

$\bar{S}_{\bar{P}}(t)g_1 = 0,\ \ g_1 \neq 0,$ что противоречит полноте ранга $\bar{S}_{\bar{P}}(t)$. Таким образом, $\operatorname{rank} S_{sf}(t) = n$ при всех $t \in T$.

С учётом сохранения полноты ранга при малых аддитивных возмущениях матрицы для достаточно малых $\mu > 0$ справедливо $\operatorname{rank} \bar{S}_{\xi\eta}(t,\mu) = \operatorname{rank} S_{\xi\eta}(t,\mu) = n$ для любого $t \in T$, откуда с учётом связи между матрицами наблюдаемости $S_{\xi\eta}(t,\mu) = S_{A_\mu,c}(t,\mu)K(t,\mu)$ систем (2), (3) и (14) следует $\operatorname{rank} S_{A_\mu,c}(t,\mu) = n$ для любого $t \in T$ для всех достаточно малых $\mu > 0$, что согласно теореме 2 завершает доказательство теоремы 6.

8. Пример. Рассмотрим на отрезке $T = [0,2]$ систему

$$\dot{x}_1(t) = \gamma(t)x_1(t), \quad \dot{x}_2(t) = \gamma(t)x_2(t) + (1-\gamma(t))y(t), \quad \dot{x}_3(t) = x_1(t) + \gamma(t)x_3(t) + y(t),$$

$$\mu\dot{y}(t) = x_1(t) + x_2(t) - y(t) \tag{30}$$

с выходной функцией $v(t) = -x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) + y(t)$.

Здесь вещественная функция $\gamma(t),\ t \in T$, непрерывно дифференцируема, но её производная $\phi(t) = \dot{\gamma}(t)$ не является дифференцируемой на T, $1-\gamma(t) \neq 0$, $t \in T$, $n_1 = 3$, $n_2 = 1$, $n = n_1 + n_2 = 4$. Матрицы системы наблюдения (30) имеют вид

$$A_1(t) = \begin{pmatrix} \gamma(t) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma(t) & 0 \\ 1 & 0 & \gamma(t) \end{pmatrix}, \quad A_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-\gamma(t) \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A_3(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4(t) = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}, \quad c(t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Несложно убедиться в том, что для этой системы выполнены условия теоремы 6, но матричная функция

$$A(t,\mu) = \begin{pmatrix} \gamma(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma(t) & 0 & 1-\gamma(t) \\ 1 & 0 & \gamma(t) & 1 \\ \mu^{-1} & \mu^{-1} & 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix}$$

не является дважды непрерывно дифференцируемой на T. Заметим, что система (30) имеет класс $\{P, 3\}$ относительно матрицы

$$P(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma(t) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma(t) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma(t) & 1 \end{pmatrix}.$$

Вырожденная система для системы (30) записывается следующим образом:

$$\dot{\bar{x}}_1(t) = \gamma(t)\bar{x}_1(t), \quad \dot{\bar{x}}_2(t) = (1-\gamma(t))\bar{x}_1(t) + \bar{x}_2(t), \quad \dot{\bar{x}}_3(t) = 2\bar{x}_1(t) + \bar{x}_2(t) + \gamma(t)\bar{x}_3(t),$$

$$\bar{v}_s(t) = \bar{x}_3(t), \quad t \in T,$$

$$A_s(t) = \begin{pmatrix} \gamma(t) & 0 & 0 \\ 1-\gamma(t) & 1 & 0 \\ 2 & 1 & \gamma(t) \end{pmatrix}, \quad c_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Она имеет класс $\{\bar{P}, 2\}$ относительно матрицы

$$\bar{P}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\gamma(t) & 1 & 0 \\ 0 & -\gamma(t) & 1 \end{pmatrix} \tag{32}$$

с матрицей наблюдаемости

$$\bar{S}_{\bar{P}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1-\gamma(t) & 1-\gamma(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Для системы (30) t-семейство быстрых подсистем имеет вид

$$\frac{d\tilde{y}(\tau)}{d\tau} = -\tilde{y}(\tau), \quad \tilde{v}_f(\tau) = \tilde{y}(\tau), \quad \tau \geqslant 0. \tag{33}$$

Так как $\det \bar{S}_{\bar{P}}(t) = 1 - \gamma(t) \neq 0,\ t \in T,$ то $\operatorname{rank} \bar{S}_{\bar{P}}(t) = 3 = n_1,\ \operatorname{rank} \tilde{S}(t) = 1 = n_2,\ t \in T,$ и согласно теоремам 4, 5 ВС (31) и t-семейство быстрых подсистем (33) $\bar{P}$- и $\tilde{P}$-равномерно наблюдаемы соответственно. Так как выполнены условия теоремы 6, то существует $\hat{\mu} > 0$ такое, что ЛНСВС (30) P-равномерно наблюдаема для всех $\mu \in (0, \hat{\mu}]$ относительно любой матрицы $P \in \mathcal{U}_{n-1}(T),$ для которой матрица $\bar{P}$ (32) есть верхний левый блок размерности 3×3 и для неё выполнены условия теоремы 6.

Применение теоремы 3 к системе (30) даёт $\det S_P(t, \mu) = \mu^{-3}(-1 + \gamma(t)) \neq 0,\ \ t \in T,$ что подтверждает вывод о равномерной наблюдаемости системы (30) для $\mu > 0$.

Заключение. Для ЛНСВС доказаны независящие от малого параметра необходимые и достаточные условия квазидифференцируемости множества выходных функций. На основе полной декомпозиции исходной ЛНСВС относительно действия группы линейных невырожденных преобразований доказаны ранговые независящие от малого параметра и справедливые для всех достаточно малых его значений достаточные условия P-равномерной наблюдаемости ЛНСВС. Условия выражены через матрицы наблюдаемости связанных с ЛНСВС медленной и семейства быстрых подсистем, имеющих размерности меньшие, чем исходная ЛНСВС.

Используемый в данной работе подход, основанный на понятии P-равномерной наблюдаемости [8, с. 38] линейных нестационарных систем и декомпозиции СВС [14, 28], позволяет существенно ослабить известные требования на гладкость коэффициентов при построении наблюдателей состояний [15] и обеспечить их робастность по малому параметру.

Результаты настоящей работы применимы для нахождения преобразований, приводящих ЛНСВС к каноническим формам, решения задач наблюдаемости нестационарных СВС с помощью динамического фильтра, построения композитных управлений типа обратной связи, экспоненциальных оценивателей состояния системы.

Автор выражает благодарность проф. А.И. Астровскому за ценные советы и замечания, сделанные при подготовке этой работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (ГПНИ “Конвергенция-2025”, задание 1.2.04).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Калман Р.* Об общей теории систем управления // Тр. I конгресса ИФАК. Т. 2. М., 1961. С. 521–547.
2. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М., 1971.
3. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М., 1968.
4. *Гайшун И.В.* Введение в теорию линейных нестационарных систем. Минск, 1999.
5. *Астровский А.И.* Наблюдаемость линейных нестационарных систем. Минск, 2007.
6. *Астровский А.И., Гайшун И.В.* Оценивание состояний линейных нестационарных систем наблюдения // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 370–379.
7. *Astrovskii A.I., Gaishun I.V.* Observability of linear time-varying systems with quasiderivative coefficients // SIAM J. Control and Optimization. 2019. V. 57. № 3. P. 1710–1729.
8. *Астровский А.И., Гайшун И.В.* Линейные системы с квазидифференцируемыми коэффициентами: управляемость и наблюдаемость движений. Минск, 2013.
9. *Астровский А.И., Гайшун И.В.* Квазидифференцируемость и наблюдаемость линейных нестационарных систем // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 11. С. 1567–1576.

10. *Астровский А.И., Гайшун И.В.* Равномерная и аппроксимативная наблюдаемость линейных нестационарных систем // Автоматика и телемеханика. 1998. № 7. С. 3–13.
11. *Дерр В.Я.* Неосцилляция решений линейного квазидифференциального уравнения // Изв. Ин-та математики и информатики Удмуртского гос. ун-та. 1999. Вып. 1. № 16. С. 3–105.
12. *Васильева А.Б., Дмитриев М.Г.* Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления // Итоги науки и техники. Мат. анализ. 1982. Т. 20. С. 3–77.
13. *Калинин А.И.* Асимптотические методы оптимизации возмущённых динамических систем. Минск, 2000.
14. *Kokotović P.V., Khalil H.K., O'Reilly J.* Singular Perturbations Methods in Control: Analysis and Design. New York, 1999.
15. *O'Reilly J.* Full-order observers for a class of singularly perturbed linear time-varying systems // Int. J. of Control. 1979. V. 30. № 5. P. 745–756.
16. *Копейкина Т.Б.* Наблюдаемость линейных стационарных сингулярно возмущённых систем в пространстве состояний // Прикл. математика и механика. 1993. Т. 57. № 6. С. 22–32.
17. *Копейкина Т.Б.* Относительная наблюдаемость линейных нестационарных сингулярно возмущённых систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 1. С. 24–30.
18. *Копейкина Т.Б., Цехан О.Б.* К теории наблюдаемости линейных сингулярно возмущённых систем // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 1999. № 3. С. 22–27.
19. *Glizer V.Y.* Observability of singularly perturbed linear time-dependent differential systems with small delay // J. of Dynamical and Control Systems. 2004. № 10. P. 329–363.
20. *Цехан О.Б.* Условия полной наблюдаемости линейных стационарных сингулярно возмущённых систем второго порядка с запаздыванием // Весн. Гродненскага дзярж. ун-та iмя Я. Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фiзiка. Iнфарматыка, вылiч. тэхнiка i кiраванне. 2014. № 1 (170). С. 53–64.
21. *Цехан О.Б.* Условия поточечной управляемости и поточечной наблюдаемости линейных стационарных сингулярно возмущённых систем с запаздыванием // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2021. Т. 29. № 1–2. С. 138–148.
22. *Tsekhan O., Pawluszewicz E.* Observability of singularly perturbed linear time-varying systems on time scales // 26th Intern. Conf. on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR). 2022. P. 116–121.
23. *Дмитриев М.Г., Курина Г.А.* Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3–51.
24. *Гайшун, И.В., Горячкин В.В.* Робастная и интервальная наблюдаемость двухпараметрических дискретных систем с интервальными коэффициентами // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2016. № 2. С. 6–9.
25. *Kopeikina T.B.* Some approaches to the controllability investigation of singularly perturbed dynamic systems // Systems Sci. 1995. V. 21. № 1. P. 17–36.
26. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М., 1989.
27. *Тихонов А.Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Мат. сб. 1952. Т. 31 (73). № 3. С. 575–586.
28. *Chang K.* Singular perturbations of a general boundary value problem // SIAM J. Math. Anal. 1972. V. 3. № 3. P. 520–526.
29. *Зубер И.Е.* Синтез экспоненциально устойчивого наблюдателя для линейных нестационарных систем с одним выходом // Автоматика и телемеханика. 1995. Вып. 5. С. 42–49.

Гродненский государственный университет
имени Янки Купалы

Поступила в редакцию 29.04.2023 г.
После доработки 06.07.2023 г.
Принята к публикации 20.07.2023 г.