ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 8, с. 1139–1142

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.925.5

СРАВНЕНИЕ СПЕКТРОВ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ И СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

© 2023 г. А. Х. Сташ

Изучены показатели колеблемости дифференциальных систем. Установлено отсутствие зависимости между спектрами показателей колеблемости нелинейной системы и системы её первого приближения, а именно, построена двумерная нелинейная система, спектры показателей колеблемости сужения которой на любую открытую окрестность нуля фазовой плоскости состоят из всех рациональных чисел отрезка $[0,1]$, а спектры линейной системы её первого приближения – только из одного элемента.

DOI: 10.31857/S0374064123080125, EDN: IRCYRW

Введение. Для изучения колебательных свойств движения И.Н. Сергеевым были введены сначала *характеристические частоты* [1], а затем и показатели *колеблемости, вращаемости* и *блуждаемости* [2, 3].

Все перечисленные показатели, как и *линейные* (см. [4]), оказались применимыми лишь к решениям, гарантированно определённым на всей положительной полуоси времени. Это затрудняет их вычисление для нелинейных систем, где такой гарантии дать нельзя. В работе [4] предпринята первая попытка распространить определения этих показателей на случай несуществования решений системы на всей полуоси, а именно, определены и изучены *сферические*, *радиальные* и *шаровые* функционалы и показатели. В статьях [5, 6] были анонсированы результаты исследования этих показателей по первому приближению.

В настоящей работе изучаются *линейные показатели колеблемости* нелинейной системы и системы её первого приближения. Установлено существование нелинейной системы со счётными спектрами линейных показателей колеблемости, в то время как спектры соответствующей линейной системы её первого приближения состоят ровно из одного неотрицательного числа.

1. Базовые понятия. Для заданного натурального $n>1$ и заданной открытой окрестности G точки 0 в евклидовом (векторном) фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрим дифференциальную, вообще говоря *нелинейную*, систему вида

$$\dot{x}=f(t,x),\quad x\in G,\quad f(t,0)=0,\quad t\in\mathbb{R}_+\equiv[0,+\infty),\quad f,f'_x\in C(\mathbb{R}_+\times G), \tag{1}$$

обеспечивающую наличие нулевого решения, а также существование и единственность решений задач Коши. С системой (1) свяжем линейную систему её *первого приближения*

$$\dot{x}=A(t)x\equiv f_\prime(t,x),\quad A(t)=f'_x(t,0),\quad t\in\mathbb{R}_+,\quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{2}$$

при условии

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|f(t,x)-f_\prime(t,x)|=o(x),\quad x\to 0.$$

Через $\mathcal{S}_*(f)$ будем обозначать множество всех *непродолжаемых* ненулевых решений системы (1), через $x_f(\,\cdot\,,x_0)$ – то из них, которое удовлетворяет начальному условию $x_f(0,x_0)=x_0$, а через G_*, G_δ или $G_{\delta,\gamma}$ – множества всех значений $x_0\in G$, удовлетворяющих соответственно условиям $x_0\neq 0$, $|x_0|=\delta$ или $\delta<|x_0|<\gamma$.

Сначала дадим основные определения.

Определение 1 [1]. Будем говорить, что в точке $t>0$ происходит *строгая* (*нестрогая*) *смена знака* функции $y\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, если в любой проколотой окрестности этой точки функция

y принимает как положительные (соответственно неотрицательные), так и отрицательные (соответственно неположительные) значения.

Определение 2 [2, 3]. Для ненулевого вектора $m \in \mathbb{R}^n_*$ и вектор-функции $x_f(\,\cdot\,, x_0) \in \mathcal{S}_*(f)$ через $\nu^\alpha(f, x_0, m, t)$ при $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ соответственно обозначим:

– число точек *строгой смены знака* скалярного произведения $\langle x_f(\,\cdot\,, x_0), m\rangle$ на промежутке $(0, t]$;

– число точек *нестрогой смены знака* скалярного произведения $\langle x_f(\,\cdot\,, x_0), m\rangle$ на промежутке $(0, t]$;

– число *нулей* функции $\langle x_f(\,\cdot\,, x_0), m\rangle$ на промежутке $(0, t]$;

– число *корней* (т.е. нулей с учётом их *кратности*) функции $\langle x_f(\,\cdot\,, x_0), m\rangle$ на промежутке $(0, t]$;

– число *гиперкорней* функции $\langle x_f(\,\cdot\,, x_0), m\rangle$ на промежутке $(0, t]$, где в процессе подсчёта этого количества каждый некратный корень считается ровно один раз, а кратный – бесконечно много раз, независимо от его фактической кратности.

Определение 3 [2–4]. *Верхние* (*нижние*) *сильный* и *слабый показатели колеблемости знаков, нулей, корней* и *гиперкорней* функции $x_f(\,\cdot\,, x_0) \in \mathcal{S}_*(f)$ при $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ соответственно зададим формулами

$$\hat{\nu}^\alpha_\bullet(f, x_0) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(f, x_0, m, t) \quad \Bigl(\check{\nu}^\alpha_\bullet(f, x_0) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \varliminf_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(f, x_0, m, t)\Bigr),$$

$$\hat{\nu}^\alpha_\circ(f, x_0) \equiv \varlimsup_{t\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(f, x_0, m, t) \quad \Bigl(\check{\nu}^\alpha_\circ(f, x_0) \equiv \varliminf_{t\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(f, x_0, m, t)\Bigr).$$

В случае совпадения какого-либо нижнего показателя с аналогичным верхним будем называть его *точным*, убирая в его обозначении знаки “ ˇ ” и “ ˆ ”. В случае совпадения какого-либо слабого показателя с аналогичным сильным будем называть его *абсолютным*, убирая в его обозначении знаки “ $\circ$ ” и “ $\bullet$ ”.

Для каждого показателя колеблемости $\varkappa = \hat{\nu}^\alpha_\bullet, \check{\nu}^\alpha_\bullet, \hat{\nu}^\alpha_\circ, \check{\nu}^\alpha_\circ$ при $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ введём обозначение $\varkappa(f, M) \equiv \{\varkappa(f, x_0) \mid x_0 \in M\}$.

2. Формулировка и доказательство основного результата.

Теорема. *При $n = 2$ и $G = \mathbb{R}^2$ существуют две системы с устойчивым по Ляпунову нулевым решением, первая из которых, линейная вида (2) и служащая системой первого приближения для другой, удовлетворяет соотношениям*

$$\nu^-(f_\prime, G_*) = \nu^\sim(f_\prime, G_*) = \{0\}, \tag{3}$$

$$\nu^0(f_\prime, G_*) = \nu^+(f_\prime, G_*) = \nu^*(f_\prime, G_*) = \{1\}, \tag{4}$$

а вторая система вида (1) – при любом $\varepsilon > 0$ соотношению

$$\varkappa(f, G_{0,\varepsilon}) = [0, 1] \bigcap \mathbb{Q}, \quad \varkappa = \nu^-, \nu^\sim, \nu^0, \nu^+, \nu^*. \tag{5}$$

Сначала докажем вспомогательное утверждение.

Лемма. *При $n = 2$ и $G = \mathbb{R}^2$ для некоторой линейной системы вида (2) с условиями (3), (4) при любых $q \in [0, 1] \bigcap \mathbb{Q}$ и $0 < \alpha < \beta \leqslant 1$ найдётся возмущённая система*

$$\dot{x} = A(t)x + B(x, t) \equiv f(t, x), \quad |B(x, t)| \leqslant |x|^2, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

обладающая свойствами

$$\nu^-(f, G_\alpha) = \nu^-(f, G_\beta) = \nu^\sim(f, G_\alpha) = \nu^\sim(f, G_\beta) = \{0\},$$

$$\nu^0(f, G_\alpha) = \nu^0(f, G_\beta) = \nu^+(f, G_\alpha) = \nu^+(f, G_\beta) = \nu^*(f, G_\alpha) = \nu^*(f, G_\beta) = \{1\},$$

$$\nu^-(f, G_{\alpha,\beta}) = \nu^\sim(f, G_{\alpha,\beta}) = \nu^0(f, G_{\alpha,\beta}) = \nu^+(f, G_{\alpha,\beta}) = \nu^*(f, G_{\alpha,\beta}) = \{q\}.$$

Доказательство леммы. 1. Рассмотрим линейную периодическую систему (2), записываемую в фиксированном базисе в $\mathbb{R}^2 \equiv G$ в виде

$$\dot{x} = \zeta(t)Ix \equiv f_\prime(t,x), \quad \zeta(t) \equiv \frac{\pi}{2}\cos t, \quad I \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Она задаёт вращение фазовой плоскости вокруг точки $x = 0$ с мгновенной скоростью $\zeta(t)$ в каждый момент $t \in \mathbb{R}_+$, в результате чего ориентированный угол поворота любого начального вектора $x_0 \in G_*$ за время t равен

$$\varphi(t, x_{f_\prime}(\,\cdot\,, x_0)) = \frac{\pi}{2}\sin t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad x_{f_\prime}(t_k, x_0) = (-1)^{k-1}x_{f_\prime}(t_1, x_0), \quad t_k \equiv \pi k - \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

На каждом промежутке $[t_k, t_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$, решение $x_{f_\prime}(\,\cdot\,, x_0)$, совершая поворот на угол π, будет ортогонально в одной точке заданному ненулевому вектору. Принимая во внимание, что угол между векторами $x_{f_\prime}(\,\cdot\,, x_0)$ и x_0 заключён в пределах от $-\pi/2$ до $\pi/2$ и функция $\dot{x}_{f_\prime}(\,\cdot\,, x_0)$ обнуляется только в точках t_k, приходим к отсутствию нестрогих смен знака у скалярной функции $\langle x_{f_\prime}(\,\cdot\,, x_0), x_0\rangle$. Следовательно, при любом $t \in \mathbb{R}_+$ выполнено $\nu^-(f_\prime, x_0, x_0, t) = \nu^\sim(f_\prime, x_0, x_0, t) = 0$, откуда следует свойство (3). Для любого вектора m, не коллинеарного вектору x_0, функция $\langle x_{f_\prime}(\,\cdot\,, x_0), m\rangle$ не имеет кратных нулей и на каждом промежутке $[t_k, t_{k+1})$ длины π имеет один нуль, а значит, выполняется свойство (4).

2. На отрезке $r \in [0,1]$ для выбранных $0 < \alpha < \beta \leqslant 1$ зададим функции

$$\psi_\pm(r) \equiv 1 \pm \frac{r^2(r-\alpha)^2(r-\beta)^2}{(r^2+2)^2} \in (0,2).$$

Для нелинейной периодической системы вида (1) с правой частью $g(t,x) = \psi_-(|x|)f_\prime(t,x)$ при любом $t \in \mathbb{R}_+$ имеем

$$\varphi(t, x_g(\,\cdot\,, x_0)) = \frac{\pi}{2}\psi_-(|x_0|)\sin t \in \left[-\frac{\pi}{2}\psi_-(|x_0|), \frac{\pi}{2}\psi_-(|x_0|)\right] \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \alpha < |x_0| < \beta.$$

Скалярное произведение решения $x_g(\,\cdot\,, x_0)$, совершающего поворот менее чем на π, и вектора x_0 отлично от нуля. Поэтому для значения $q = 0$ выберем нелинейную систему

$$f(t,x) \equiv \begin{cases} f_\prime(t,x), & 0 < |x| \leqslant \alpha \ \text{ или } \ |x| \geqslant \beta, \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \psi_-(|x|)f_\prime(t,x), & \alpha < |x| < \beta, \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

Для нелинейной периодической системы вида (1) с правой частью $h(t,x) = \psi_+(|x|)f_\prime(t,x)$ будем иметь

$$\{\varphi(t, x_h(\,\cdot\,, x_0)) \mid t \in \mathbb{R}_+\} \supset \left(-\frac{\pi}{2}\psi_+(|x_0|), \frac{\pi}{2}\psi_+(|x_0|)\right) \supset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \alpha < |x_0| < \beta.$$

На каждом промежутке $[t_k, t_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$, решение $x_h(\,\cdot\,, x_0)$, совершая поворот не менее чем на π (но менее чем на 2π), будет ортогонально в одной или двух точках наперёд заданному ненулевому вектору. Следовательно, для значения $q = 1$ выберем систему

$$f(t,x) \equiv \begin{cases} f_\prime(t,x), & 0 < |x| \leqslant \alpha \ \text{ или } \ |x| \geqslant \beta, \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \psi_+(|x|)f_\prime(t,x), & \alpha < |x| < \beta, \quad t \in \mathbb{R}_+, \end{cases}$$

а для значения $q = l_1/(l_1 + l_2)$ – систему

$$f(t,x) \equiv \begin{cases} f_\prime(t,x), & 0 < |x| \leqslant \alpha \ \text{ или } \ |x| \geqslant \beta, \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \psi_+(|x|)f_\prime(t,x), & \alpha < |x| < \beta, \quad t \in [0, 2\pi l_1], \\ \psi_-(|x|)f_\prime(t,x), & \alpha < |x| < \beta, \quad t \in [2\pi l_1, 2\pi(l_1 + l_2)], \end{cases}$$

где в кольце $\alpha < |x| < \beta$ функция $f(t,x)$ периодически (с периодом $T = 2\pi(l_1+l_2)$, $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$) продолжается на всю полуось $\mathbb{R}_+$. Лемма доказана.

Теперь перейдём к доказательству основного результата.

Доказательство теоремы. Занумеровав все рациональные числа из отрезка $[0,1]$ натуральными числами, определим последовательность $(s_p)_{p\in\mathbb{N}}$. По этой последовательности образуем следующую

$$s_1; s_1, s_2; s_1, s_2, s_3; \ldots ; s_1, s_2, s_3, \ldots , s_k; \ldots ,$$

которую обозначим через $(q_p)_{p\in\mathbb{N}}$.

Единичный круг $|x| \leqslant 1$ разобьем на счётное число колец вида

$$\alpha_{k+1} < |x| < \alpha_k, \quad \alpha_k = 2^{1-k}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Далее выберем линейную систему (6) и на основании леммы достроим её в каждом кольце (7) так, чтобы при любом $k \in \mathbb{N}$ выполнялись равенства

$$\varkappa(f, G_{\alpha_{k+1},\alpha_k}) = \{q_k\}, \quad \varkappa = \nu^-, \nu^\sim, \nu^0, \nu^+, \nu^*.$$

В кольце $1 \leqslant |x| < +\infty$ и на каждой окружности $|x| = \alpha_k$, $k \in \mathbb{N}$, линейную систему (6) оставляем без изменения, поэтому

$$\nu^-(f, G_{\alpha_k}) = \nu^-(f, G_{1,+\infty}) = \nu^\sim(f, G_{\alpha_k}) = \nu^\sim(f, G_{1,+\infty}) = \{0\},$$

$$\nu^0(f, G_{\alpha_k}) = \nu^0(f, G_{1,+\infty}) = \nu^+(f, G_{\alpha_k}) = \nu^+(f, G_{1,+\infty}) = \nu^*(f, G_{\alpha_k}) = \nu^*(f, G_{1,+\infty}) = \{1\}.$$

Таким образом, из условия $\alpha_k \to 0$ при $k \to +\infty$ для любого $\varepsilon > 0$ следует справедливость соотношения (5). Теорема доказана.

Заключение. Полученный результат показывает отсутствие связи в общем случае между спектрами показателей колеблемости нелинейной системы и системы её первого приближения. Интересным остаётся вопрос о возможности нахождения условий на коэффициенты линейной системы, позволяющих однозначно восстановить спектр какого-либо показателя колеблемости нелинейной системы.

Автор выражает искреннюю признательность профессору И.Н. Сергееву за постановку задачи и ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сергеев И.Н.* Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294.
2. *Сергеев И.Н.* Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы// Изв. РАН. Сер. мат. 2012. Т. 76. № 1. С. 149–172.
3. *Сергеев И.Н.* Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Изв. Ин-та математики и информатики Удмуртского гос. ун-та. 2015. Т. 46. Вып. 2. С. 171–183.
4. *Сергеев И.Н.* Определение показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости нелинейных дифференциальных систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2021. № 3. С. 41–46.
5. *Сергеев И.Н.* Исследование по первому приближению радиальных показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1574–1576.
6. *Сергеев И.Н.* О некоторых затруднениях при исследовании по первому приближению сферических и шаровых показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 6. С. 856–858.

Адыгейский государственный университет,
г. Майкоп

Поступила в редакцию 07.05.2023 г.
После доработки 25.06.2023 г.
Принята к публикации 20.07.2023 г.