ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 9, с. 1157–1171

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.5

ОЦЕНКИ ИНТЕГРАЛЬНО ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

© 2023 г. В. С. Климов

Изучаются интегрально ограниченные решения дифференциального уравнения $\mathscr{A}(x) = z$, где $\mathscr{A}$ – линейный дифференциальный оператор порядка l, определённый на функциях $x\colon \mathbb{R} \to H$ $(\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, H – конечномерное евклидово пространство). Правая часть z – интегрально ограниченная функция на $\mathbb{R}$ со значениями в H, удовлетворяющая неравенству $(\psi(t), z(t)) \geqslant \delta|z(t)|$, $t \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Приводятся условия на оператор $\mathscr{A}$ и функцию $\psi\colon \mathbb{R} \to H$, гарантирующие для рассматриваемых решений x обратное неравенство вида

$$\int\limits_{\tau}^{\tau+1} |x^{(l)}(t)|\,dt \leqslant c \int\limits_{\tau-1}^{\tau+2} |x(t)|\,dt,$$

в котором постоянная c не зависит от выбора действительного числа τ и функции x.

DOI: 10.31857/S0374064123090017, EDN: WOMIXW

Введение. В работе изучаются решения дифференциального уравнения $\mathscr{A}(x) = z$ порядка l. При некоторых предположениях относительно дифференциального выражения $\mathscr{A}$ и правой части z рассматриваемого уравнения для решений x устанавливаются обратное неравенство

$$\sup_{\tau\in\mathbb{R}} \int\limits_{\tau}^{\tau+1} |x^{(l)}(t)|\,dt \leqslant c_0 \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \int\limits_{\tau}^{\tau+1} |x(t)|\,dt$$

и некоторые его модификации, где c – положительная константа.

В п. 1 статьи содержатся определения различных функциональных классов, приводятся сведения о клиньях и конусах, основное внимание при этом уделяется случаю конечномерного пространства. В п. 2 устанавливается основной результат работы – обратные функциональные неравенства, позволяющие оценивать нормы старших производных решений через аналогичные нормы исходных решений. Правая часть z при этом предполагается интегрально ограниченной и удовлетворяющей некоторому неравенству. Обсуждению и модификациям полученных результатов посвящён п. 3.

Основу работы составляют одномерные варианты теорем вложения [1, 2] и конусные методы исследования систем дифференциальных неравенств [3–5]. Используются следующие обозначения: $\mathbb{R}$ – поле действительных чисел, $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел. Через $H = \mathbb{R}^m$ означим m-мерное действительное арифметическое пространство; скалярное произведение двух векторов $u = (u_1, \ldots, u_m)$, $v = (v_1, \ldots, v_m)$ из $\mathbb{R}^m$ определено равенством $(u, v) = u_1v_1 + \ldots + u_mv_m$, $|u| = \sqrt{(u, u)}$ – евклидова норма вектора u.

Все банаховы пространства рассматриваются над полем действительных чисел. Если Z – банахово пространство и $v \in E$, то $\|v; Z\|$ – норма элемента v в пространстве Z, Z^* – сопряжённое к Z пространство, $\sigma(Z, Z^*)$ и $\sigma(Z^*, Z)$ – слабые топологии в пространствах Z и Z^* соответственно. Запись $Z_1 \to Z_2$ означает непрерывность оператора вложения банахова пространства Z_1 в банахово пространство Z_2; если же оператор вложения вполне непрерывен, то для этого используется запись $Z_1 \Rightarrow Z_2$. Далее будет применяться следующее утверждение.

Предложение 1 [6, с. 126]. *Пусть Z, Z_1, Z_0 – банаховы пространства, причём $Z_1 \Rightarrow Z$ и $Z \to Z_0$. Тогда существует такая функция $\chi\colon (0, \infty) \to (0, \infty)$, что для каждого элемента $f \in Z_1$ и любого положительного числа η справедливо неравенство Эрлинга*

$$\|f; Z\| \leqslant \eta\|f; Z_1\| + \chi(\eta)\|f; Z_0\|.$$

1. Функциональные пространства и конусы. Пусть $J=[a,b]$ – отрезок на действительной прямой $\mathbb{R}$, H – конечномерное евклидово пространство. Через $L(J,H)$ обозначается пространство измеримых функций на отрезке J со значениями в H, для которых имеет смысл и конечна норма

$$\|u;L_1(J)\|=\int\limits_J |u(t)|\,dt;$$

как обычно, совпадающие почти всюду (относительно одномерной лебеговой меры mes_1) функции отождествляются; здесь и далее в обозначениях нормы символ H опускается. Наряду с $L_1(J,H)$, далее будут применяться аналогично определяемые пространства Лебега $L_p(J,H)$, а также пространства Орлича $L_\Phi(J,H)$, $E_{\Phi^*}(J,H)$, порождаемые N-функцией Φ и сопряжённой к ней функцией Φ^* [7, гл. 2].

Функцию $g\colon J\to H$ называют *абсолютно непрерывной на отрезке* $J=[a,b]$, если

$$g(t)=g(a)+\int\limits_a^t f(s)\,ds,$$

где $f\in L_1(J,H)$. В этом случае функция $g(t)$ почти всюду на J дифференцируема и $g'(t)=$ $=f(t)$. Вместе с тем функция f является производной в смысле Соболева функции g. Класс абсолютно непрерывных функций $g\colon J\to H$ образует банахово пространство $W^1(J,H)$ с нормой

$$\|g;W^1(J)\|=\|g;L_1(J)\|+\|g';L_1(J)\|.$$

Если $k\in\mathbb{N}$ и $k>1$, то через $W^k(J,H)$ обозначается совокупность всех функций $g\colon J\to H$, производные которых (до порядка $k-1$ включительно) принадлежат классу $W^1(J,H)$. Для каждой функции g из $W^k(I,H)$ имеет смысл и конечна норма

$$\|g;W^k(J)\|=\sum_{i=0}^k\|g^{(i)};L_1(J)\|,$$

относительно которой $W^k(J,H)$ – банахово пространство, представляющее собой одномерный вариант классических пространств Соболева [1, 2].

Наряду с $W^k(J,H)$, ниже будет рассматриваться банахово пространство $C^k(J,H)$, состоящее из функций $x\colon J\to H$, имеющих на отрезке J непрерывные производные до порядка $k\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$ включительно. Норма в $C^k(J,H)$ определяется стандартным образом:

$$\|g;C^k(J)\|=\sum_{i=0}^k\max_{t\in J}|x^{(i)}(t)|.$$

Для единообразия иногда будут применяться обозначения

$$L(J,H)\equiv W^0(J,H),\quad C(J,H)\equiv C^0(J,H).$$

Предложение 2. *Пусть* $l\geqslant 1$. *Тогда:*

1) пространство $W^l(J,H)$ *непрерывно вложено в пространство* $C^{l-1}(J,H)$ *и компактно вложено в пространство* $W^{l-1}(J,H)$;

2) оператор дифференцирования $x\to x^{(l-1)}$ *действует и вполне непрерывен из* $W^l(J,H)$ *в пространство Орлича* $E^{\Phi^*}(J,H)$ *для любой* N*-функции* Φ.

Предложение 2 есть одномерный вариант теорем вложения (см., например, [1, с. 74–78; 2, с. 69–78].

Лемма 1. *Пусть* $l \in \mathbb{N}$, $i = \overline{0, l-1}$, $P_i(t)$ *–* $m \times m$*-матрица, элементы которой при* $i < l-1$ *суммируемы на отрезке* J, *а при* $i = l-1$ *принадлежат некоторому пространству Орлича* $L^{\Phi}(J)$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\|P_i x^{(i)}; L(J)\| \leqslant \eta \|x; W^l(J)\| + k_0(\eta)\|x; L(J)\|,$$

в котором η *– произвольная положительная постоянная,* $k_0(\eta)$ *– убывающая положительная и не зависящая от* x *функция.*

Равносильное лемме 1 предложение доказано в статье [5]. Там же установлено следующее утверждение.

Предложение 3. *Для любого натурального числа* k *найдётся такое положительное число* λ_k, *что для произвольной вещественной функции* v *класса* $C^k[a, b]$ *имеет место неравенство*

$$\min_{t \in [a,b]} |v^{(k)}(t)| \leqslant \frac{\lambda_k}{(b-a)^k} \int\limits_a^b |v(t)|\, dt.$$

Перейдём к пространствам векторных функций, определённых на всей действительной оси. Положим $J_\tau = [\tau, \tau+1]$, $\tau \in \mathbb{R}$. Функцию $z\colon \mathbb{R} \to H$ назовём *интегрально ограниченной*, если её сужение на любой отрезок J_τ принадлежит пространству $L(J_\tau, H)$ и число

$$\|z; M_1\| = \sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|z; L_1(J_\tau)\| < \infty. \tag{1}$$

Совокупность интегрально ограниченных векторных функций с нормой (1) образует банахово пространство $M_1(\mathbb{R})$. Аналогичная конструкция применима и к другим пространствам функций. Например, через $M_1^l(\mathbb{R})$ обозначается пространство функций $x\colon \mathbb{R} \to H$, сужения которых на любой отрезок J_τ принадлежит $W^l(J_\tau)$, причём

$$\|x; M_1^l\| = \sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|x; W^l(J_\tau)\| < \infty;$$

далее $C^k(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, – пространство функций $x\colon \mathbb{R} \to H$, сужения которых на любой отрезок J_τ принадлежат $C^l(J_\tau)$, при этом норма

$$\|x; C^k\| = \sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|x; C^k(J_\tau)\| < \infty.$$

Через $C_0(\mathbb{R})$ обозначается совокупность ограниченных и равномерно непрерывных на $\mathbb{R}$ функций $x\colon \mathbb{R} \to H$. Класс $C_0(\mathbb{R})$ составляет замкнутое подпространство пространства $C^0(\mathbb{R})$.

Лемма 2. *Пусть* $\psi \in C_0(\mathbb{R})$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует функция* ψ_1 *класса* $C_0(\mathbb{R})$, *удовлетворяющая условиям:*

1) $\|\psi - \psi_1; C^0\| < \varepsilon$;

2) функция ψ_1 *имеет ограниченные производные любого порядка, т.е.*

$$|\psi_1^{(i)}(t)| \leqslant \beta_i < \infty, \quad t \in \mathbb{R}, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Доказательство основано на стандартной процедуре усреднения (см., например, [1, 2]). Пусть $\omega(t)$ – бесконечно дифференцируемая финитная функция на $\mathbb{R}$, $\omega(t) \geqslant 0$ и $\|\omega; L_1\| = 1$. Положим $\omega_\delta(t) = \delta^{-1}\omega(t/\delta)$, $\delta > 0$. Свёртка

$$(\psi \circ \omega_\delta)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \omega_\delta(t-s)\psi(s)\, ds$$

при любом $\delta > 0$ есть бесконечно дифференцируемая функция, производные которой любого порядка равномерно ограничены на $\mathbb{R}$. При малых $\delta > 0$ выполняется условие

$$\|\psi - (\psi \circ \omega_\delta); C^0\| < \varepsilon,$$

что и завершает доказательство леммы.

Напомним определения и примеры, относящиеся к теории конусов в действительном банаховом пространстве Z. Далее используется терминология, принятая в [3, 4].

Замкнутое множество K пространства Z называют *клином*, если для любых $x, y \in K$ и неотрицательного числа α $x + y \in K$ и $\alpha x \in K$. Если K – клин, то множество $K \bigcap (-K)$ называют его *лезвием*. Клин K называют *конусом*, если его лезвие состоит лишь из одной точки. В дальнейших построениях замкнутость клина не используется, поэтому вопрос о замкнутости изучаемых клиньев не обсуждается.

Клин $K \subset Z$ называют *телесным*, если он содержит шар ненулевого радиуса. Линейный функционал Λ на Z называют *положительным*, если $\Lambda(x) \geqslant 0$ при $x \in K$. Совокупность положительных функционалов образует клин K^* в сопряжённом к Z пространстве Z^*. Если клин K не совпадает со всем пространством Z, то клин K^* содержит ненулевые элементы. Функционал Λ является внутренним элементом K^* в том и только том случае, если при некотором $\delta > 0$ справедливо неравенство

$$\Lambda(x) \geqslant \delta\|x\|, \quad x \in K. \tag{3}$$

В этой ситуации функционал Λ называют *равномерно положительным*, а клин K^* является телесным. Равномерно положительный функционал есть внутренний элемент клина K^*. Действительно, если выполнено неравенство (3), $\Lambda_1 \in E^*$ и $\|\Lambda_1 - \Lambda; E^*\| < \delta$, то

$$\Lambda_1(x) = \Lambda(x) + (\Lambda_1 - \Lambda)(x) \geqslant (\delta - \|\Lambda - \Lambda_1; E^*\|)\|x\|, \quad x \in K.$$

Равномерно положительные функционалы на конусе K пространства Z существуют не всегда. Например, если $Z = L_p[0,1]$, а K – конус неотрицательных почти всюду функций, то равномерно положительные функционалы существуют лишь при $p = 1$. Однако в любом банаховом пространстве Z можно указать такой конус K, относительно которого существуют равномерно положительные функционалы, а сопряжённый конус телесен. Действительно, пусть Λ_0 – ненулевой функционал на Z и $0 < \delta_0 < \|\Lambda_0\|$. Введём в рассмотрение множество

$$K(\Lambda_0, \delta_0) = \{x \in Z : \Lambda_0(x) \geqslant \delta_0\|x\|\}.$$

Нетрудно видеть, что множество $K(\Lambda_0, \delta_0)$ есть конус в пространстве Z. Если $\Lambda \in Z^*$ и $\|\Lambda - \Lambda_0; Z^*\| < \delta_0$, то для всех x из конуса $K(\Lambda_0, \delta_0)$ выполнено неравенство

$$\Lambda(x) \geqslant (\delta_0 - \|\Lambda - \Lambda_0; E^*\|)\|x\|,$$

поэтому Λ – равномерно положительный на $K(\Lambda_0, \delta_0)$ функционал.

Приведём ещё один вариант предшествующей конструкции. Пусть F – замкнутое выпуклое подмножество банахова пространства Z, не содержащее нуля θ пространства Z. Через $K(F)$ обозначим множество элементов вида αx, где $\alpha \geqslant 0$ и $x \in F$. Множество $K(F)$ – конус [4, с. 11]. Выпуклое множество D называют [8, с. 35] *базой конуса* K, если каждый ненулевой элемент из K допускает единственное представление $x = \alpha y$, где $\alpha > 0$, $y \in D$. Например, если Λ – равномерно положительный на конусе K функционал, то при любом $h > 0$ множество $D(\Lambda, h) = \{x \in K : \Lambda(x) = h\}$ образует базу конуса K. Если $K = K(F)$, то существует равномерно положительный на конусе K функционал [4, с. 40; 8, с. 21].

Подробно обсудим этот вопрос в частном случае, когда Z совпадает с конечномерным евклидовым пространством H. В этой ситуации сопряжённое к $Z = H$ пространство Z^* можно отождествить с H. Введём обозначения: $Kv(H)$ – совокупность непустых выпуклых компактных подмножеств пространства H; $\mathbb{B} = \{v \in H : |v| \leqslant 1\}$ – шар единичного радиуса с центром в нуле θ; если $F_1, F_2 \in Kv(H)$, то $h_0(F_1, F_2) = \min\{t \geqslant 0 : F_2 \subset F_1 + t\mathbb{B}\}$ –

уклонение множества F_2 от множества F_1. Вообще говоря, $h_0(F_1,F_2) \neq h_0(F_2,F_1)$. Если $v_0 \in H$, $F \in Kv(H)$, то

$$h_0(v_0,F) = \min_{v\in F}|v-v_0|, \quad h_0(F,v_0) = \max_{v\in F}|v-v_0|.$$

Число $h(F_1,F_2)=\max\{h_0(F_1,F_2),h_0(F_2,F_1)\}$ называют *расстоянием* (по Хаусдорфу) между F_1, F_2. Относительно метрики Хаусдорфа $Kv(H)$ есть полное метрическое пространство.

Метрической проекцией нуля θ на множество F класса $Kv(H)$ называют такой элемент $v = \mathrm{Pr}(F)$ из F, что $|v| = \min\{|y| : y \in F\}$. Проекция определяется однозначно и непрерывно зависит от F. Более точно, справедливо неравенство

$$|\mathrm{Pr}(F_1) - \mathrm{Pr}(F_2)| \leqslant 2\sqrt{2R}(h(F_1,F_2))^{1/2},$$

где $R = \max\{h_0(F_1,\theta),h_0(F_2,\theta)\}$ [9, с. 186, 187]. Таким образом, проекция $\mathrm{Pr}(F)$ удовлетворяет локальному условию Гёльдера порядка $1/2$.

Лемма 3. *Пусть $F \in Kv(H)$, $\theta \notin F$, $\psi = \mathrm{Pr}(F)$, $r = |\psi|$, $R = h_0(F,\theta) = \max\{|v| : v \in \in F\}$. Тогда имеет место неравенство*

$$(\psi,z) \geqslant \frac{r^2}{R}|z|, \quad z \in K(F).$$

Доказательство. Поскольку $\psi = \mathrm{Pr}(F)$, то

$$(\psi, v-\psi) \geqslant 0, \quad v \in F.$$

Следовательно, $(\psi,v) \geqslant (\psi,\psi) = r^2$, $v \in F$. Если $z \in K(F)$, то $z/t \in F$ при некотором положительном t. Отсюда следуют оценки

$$r \leqslant \frac{|z|}{t} \leqslant R, \quad \left(\psi,\frac{z}{t}\right) \geqslant r^2, \quad (\psi,z) \geqslant r^2 t \geqslant \frac{r^2}{R}|z|.$$

Лемма доказана.

В лемме 3 указывается вполне определённый способ построения равномерно положительного функционала Λ на конусе $K(F)$. Соответствие $K(F) \to \Lambda = \mathrm{Pr}(F)$ не только однозначно, но и квалифицированно непрерывно.

Пусть ψ – ненулевой элемент из H, $0 < \delta < |\psi|$, $K(\psi,\delta) = \{z \in H : (\psi,z) \geqslant \delta|z|\}$. Множество $K(\psi,\delta)$ называют *эллиптическим конусом* в пространстве H. Из леммы 3 следует, что любой конус $K(F)$ принадлежит более широкому эллиптическому конусу. Так как в конечномерном пространстве любой конус совпадает с некоторым конусом $K(F)$ (см., например, [4, с. 40; 8, с. 23], то любой конус в H есть часть некоторого эллиптического конуса.

2. Обратные неравенства. Пусть $l \in \mathbb{N}$ и $l > 1$. Как и выше, $M_1(\mathbb{R})$ и $M_1^l(\mathbb{R})$ – пространства функций $f : \mathbb{R} \to H$, наделённые соответствующими нормами. Введём в рассмотрение дифференциальные операторы

$$\mathscr{L}_0(x) = x^{(l)}, \quad \mathscr{L}_1(x) = \sum_{i=0}^{l-1} P_i x^{(i)}, \quad \mathscr{L}(x) = \mathscr{L}_0(x) + \mathscr{L}_1(x).$$

Здесь P_i, $i = \overline{0,l-1}$, – $m\times m$-матрицы, удовлетворяющие условиям леммы 1 на каждом отрезке J_τ с константами, не зависящими от τ. Более точно, если v – элемент матрицы P_i, то верны оценки

$$\|v; L_1(I_\tau)\| \leqslant R_0, \quad i = \overline{0,l-2},$$

$$\|v; L^\Phi(J_\tau)\| \leqslant R_0, \quad i = l-1,$$

константа R_0 и N-функция Φ не зависят от τ. Предположение относительно матрицы $P_{l-1}(t)$ эквивалентно следующему условию: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$\int\limits_T \|P_{l-1}(\tau + t)\|\, dt < \varepsilon$$

для любого $\tau \in \mathbb{R}$ и всякого измеримого множества $T \subset [0, 1]$, $\mathrm{mes}_1 T < \delta$ (см., например, [10, с. 171])*). Из леммы 1 следует оценка

$$\|\mathscr{L}_1(x); L(J)\| \leqslant \eta \|x; W^l(J)\| + k(\eta)\|x; L_1(J)\|, \tag{4}$$

константа η может быть любой положительной величиной, функция $k(\eta)$ может зависеть от J, однако для отрезков $J = [a, b]$, длины которых удовлетворяют условиям $0 < d_1 \leqslant b - a \leqslant d_2 < \infty$, d_1, d_2 – фиксированные положительные числа, функцию $k(\eta)$ можно взять одной и той же. Из оценки (4) следует неравенство коэрцитивности.

Лемма 4. *Для функций x из $M_1^l(R)$ справедливо неравенство*

$$c_1(J)\|x; W^l(J)\| \leqslant \|\mathscr{L}(x); L_1(J)\| + \|x; L_1(J)\|,$$

где положительное число $c_1(J)$ зависит от J, однако для отрезков J, длины которых расположены между двумя положительными числами, это число можно взять постоянным.

Доказательство следует из неравенства треугольника

$$\|\mathscr{L}(x); L_1(J)\| \geqslant \|x^{(l)|}; L_1(J)\| - \|\mathscr{L}_1(x); L(J)\|$$

и вытекающей из (4) оценки

$$\|\mathscr{L}_1(x); L_1(J)\| \leqslant \frac{1}{2}\|x; W_1^l(J)\| + k\left(\frac{1}{2}\right)\|x; L_1(J)\|.$$

Пусть ниже $\psi(t)$ – функция на $\mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям:
1) $\psi \in C_0(\mathbb{R})$;
2) $\inf\limits_{t\in\mathbb{R}} |\psi(t)| > 0$.

Таким образом, функция $\psi\colon \mathbb{R} \to H$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$ и равномерно ограничена от 0 и ∞:

$$0 < r_0 \leqslant |\psi(t)| \leqslant R_0 < \infty.$$

Сопоставим функции $\psi(t)$ и постоянной $\delta \in (0, r_0)$ переменный эллиптический конус

$$K(\psi(t), \delta) = \{v \in H : (\psi(t), v) \geqslant \delta |v|\}.$$

Функцию $\psi(t)$ для дальнейшего удобно считать достаточно гладкой. Это позволяет сделать следующая

Лемма 5. *Для любого переменного эллиптического конуса $K(\psi(t), \delta)$ существует содержащий его переменный эллиптический конус $K(\psi_1(t), \delta_1)$, для которого $\psi_1 \in C_0(\mathbb{R}) \bigcap C^\infty(\mathbb{R})$ и справедливы оценки (2).*

Лемма 5 следует из леммы 2.

Сопоставим переменному эллиптическому конусу $K(\psi, \delta)$ множество $\tilde{K}(\psi, \delta)$ функций z класса $M_1(\mathbb{R})$, удовлетворяющих почти при всех t неравенству

$$(\psi(t), z(t)) \geqslant \delta |z(t)|. \tag{5}$$

Условие (5) означает, что $z(t) \in K(\psi(t), \delta)$ почти при всех t.

*) Норма $\|P\|$ матрицы P размерности $m \times m$ определяется равенством $\|P\| = \max\{|Pv| : v \in H,\ |v| \leqslant 1\}$.

Через $K(\mathscr{L},\psi,\delta)$ обозначим совокупность функций x класса $M_1^l(\mathbb{R})$, для которых $\mathscr{L}(x)\in \tilde{K}(\psi,\delta)$. Множество $K(\mathscr{L},\psi,\delta)$ образует клин в пространстве $M_1^l(\mathbb{R})$. Для элементов клина $K(\mathscr{L},\psi,\delta)$ верны обратные неравенства.

Теорема 1. *Существует такая постоянная $c = c(\mathscr{L},\psi,\delta)$, что для всех функций x класса $K(\mathscr{L},\psi,\delta)$ верно неравенство*

$$\|x;M_1^l\| \leqslant c(\mathscr{L},\psi,\delta)\|x;M_1\|. \tag{6}$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что функция ψ бесконечно дифференцируема и выполнены аналогичные (2) условия ограниченности производных

$$|\psi^{(i)}(t)| \leqslant \beta_i < \infty, \quad t\in\mathbb{R}, \quad i\in\mathbb{N}. \tag{7}$$

Если $x\in K(\mathscr{L},\psi,\delta)$, то сужение функции $v(t) = (x(t),\psi(t))$ на любой отрезок J принадлежит классу $C^{l-1}(J)$. Зафиксируем действительное число τ. Применив к функции $v(t)$ и отрезкам $[\tau-1,\tau]$ и $[\tau+1,\tau+2]$ предложение 3, получим соотношения

$$\min_{t\in[\tau-1,\tau]}|v^{(l-1)}(t)| \leqslant \lambda_{l-1}\int\limits_{\tau-1}^{\tau}|v(t)|\,dt, \quad \min_{t\in[\tau+1,\tau+2]}|v^{(l-1)}(t)| \leqslant \lambda_{l-1}\int\limits_{\tau+1}^{\tau+2}|v(t)|\,dt. \tag{8}$$

Ввиду (8) существуют такие числа $t_0\in[\tau-1,\tau]$ и $t_1\in[\tau+1,\tau+2]$, что выполнены неравенства

$$|v^{l-1}(t_0)| \leqslant \lambda_{l-1}\int\limits_{\tau-1}^{\tau}|v(t)|\,dt, \quad |v^{l-1}(t_1)| \leqslant \lambda_{l-1}\int\limits_{\tau+1}^{\tau+2}|v(t)|\,dt. \tag{9}$$

Введём отрезок $J=[t_0,t_1]$, длина t_1-t_0 которого $1\leqslant t_1-t_0\leqslant 3$. Поскольку $x\in \in K(\mathscr{L},\psi,\delta)$, то почти при всех t справедлива оценка

$$(\psi(t),\mathscr{L}(x)(t)) \geqslant \delta|\mathscr{L}(x)(t)|. \tag{10}$$

Интегрируя (10) по отрезку J, приходим к соотношению

$$Q := \int\limits_{t_0}^{t_1}(\psi(t),\mathscr{L}(x)(t))\,dt \geqslant \delta\|\mathscr{L}(x);L_1(J)\|. \tag{11}$$

Из неравенства коэрцитивности следует оценка

$$\|x;W^l(J)\| \leqslant c_1(Q+\|x;L_1(J)\|). \tag{12}$$

Теперь оценим правую часть (12) сверху. Очевидно, что

$$\|x;L_1(J)\| \leqslant \|x;L_1(\tau_1,\tau+2)\|.$$

Более трудно оценить сверху определяемое из (11) число Q. Поскольку $\mathscr{L}(x)=\mathscr{L}_0(x)+\mathscr{L}_1(x)$, то $Q=Q_0+Q_1$, где

$$Q_0 := \int\limits_{t_0}^{t_1}(\psi(t),x^{(l)}(t))\,dt, \quad Q_1 := \int\limits_{t_0}^{t_1}(\psi(t),\mathscr{L}_1(x)(t))\,dt.$$

Интегрирование по частям влечёт за собой равенство

$$Q_0 = \int\limits_{t_0}^{t_1}(\psi(t),x^{(l)}(t))\,dt = Q_{01}-Q_{02},$$

в котором

$$Q_{01} = (\psi(t), x^{(l-1)}(t))|_{t_0}^{t_1}, \quad Q_{0,2} = \int\limits_{t_0}^{t_1} (\psi'(t), x^{(l-1)}(t))\, dt.$$

Таким образом,

$$Q = Q_{01} - Q_{02} + Q_1.$$

Правило дифференцирования произведения приводит к равенству

$$Q_{01} = (\psi(t), x(t))^{(l-1)}|_{t_0}^{t_1} - \sum_{i=0}^{l-2} \binom{l-1}{i} (\psi^{(l-1-i)}(t), x^{(i)}(t))|_{t_0}^{t_1} = I_1 + I_2. \tag{13}$$

Для оценки первого слагаемого I_1 в правой части (13) применим соотношения (9), связанные со специальным выбором чисел t_0, t_1, и получим

$$|I_1| = |(\psi(t), x(t))^{(l-1)}|_{t_0}^{t_1}| \leqslant c_1 \int\limits_{\tau-1}^{\tau+2} |x(t)|\, dt, \tag{14}$$

где c_1 – некоторая постоянная. Второе слагаемое I_2 оценивается следующим образом:

$$|I_2| \leqslant \eta \|x; W^l(J)\| + k_1(\eta)\|x; L_1(J)\|. \tag{15}$$

Для доказательства (15) достаточно учесть неравенства (7) и полную непрерывность оператора вложения пространства $W^l(J)$ в пространство $C^k(J)$ при $k < l-1$. Постоянная η может быть взята сколь угодно малой в силу неравенства Эрлинга. Аналогичными рассуждениями устанавливается оценка интегрального слагаемого $-Q_{02} + Q_1$:

$$|-Q_{02} + Q_1| \leqslant \eta \|x; W^l\| + k_2(\eta)\|x; L_1(J)\|,$$

из которой и неравенств (14), (15) следует соотношение

$$|Q| \leqslant 2\eta \|x; W^l(J)\| + k(\eta)\|x; L_1(\tau-1, \tau+2)\|,$$

где постоянная $k(\eta)$ не зависит от x и τ.

Объединив (12) с полученной выше оценкой сверху числа $|Q|$, имеем неравенство

$$\|x; W^l(J)\| \leqslant \varepsilon \|x; W^l(J)\| + C(\varepsilon)\|x; L_1(\tau-1, \tau+2)\|,$$

где $\varepsilon = 2c_1\eta$. Постоянная ε за счёт малости η может быть сделана сколь угодно малой. Положив $\varepsilon = 0,5$, приходим к неравенству

$$\|x; W^l(J)\| \leqslant 2C(1/2)\|x; L_1(\tau-1, \tau+2)\|,$$

которое (так как $J_\tau \subset J = [t_0, t_1]$) влечёт за собой оценку

$$\|x; W^l(J_\tau)\| \leqslant 2C(1/2)\|x; L_1(\tau-1, \tau+2)\|. \tag{16}$$

Ввиду произвольности τ из оценки (16) следует неравенство (6). Теорема доказана.

В определённом смысле оценка (16) более информативна, чем вытекающее из неё неравенство (6).

3. Модификации и обобщения. Обсудим модификации теоремы 1 для случая, когда вместо дифференциального оператора $\mathscr{L}$ рассматривается дифференциальный оператор

$$\mathscr{A}(x) = \sum_{i=0}^{l} P_i x^{(i)}.$$

Коэффициенты P_i при $i < l$ – квадратные матрицы размеров $m \times m$, элементы которых удовлетворяют требованиям теоремы 1. Квадратная матрица $P_l(t)$ при каждом t обратима, причём $P_l(t)$ и обратная к ней матрица $P_l^{-1}(t)$ равномерно непрерывны и равномерно ограничены на $\mathbb{R}$, т.е

$$\|P_l(t)\| + \|P_l^{-1}(t)\| < a_1 < \infty.$$

Пусть $K(\psi(t), \delta)$ – переменный эллиптический конус в пространстве H. Сопоставим конусу $K(\psi(t), \delta)$ множество $\tilde{K}(\psi, \delta)$ функций z класса $M_1(\mathbb{R})$, удовлетворяющих почти при всех t неравенству (5). Через $K(\mathscr{A}, \psi, \delta)$ обозначим совокупность функций x класса $M_1^l(\mathbb{R})$, для которых $\mathscr{A}(x) \in \tilde{K}(\psi, \delta)$. Множество $K(\mathscr{A}, \psi, \delta)$ образует клин в пространстве $M_1^l(\mathbb{R})$. Для элементов клина $K(\mathscr{A}, \psi, \delta)$ верны обратные неравенства.

Теорема 2. *Существует такая постоянная $c = c(\mathscr{A}, \psi, \delta)$, что для всех функций x класса $K(\mathscr{A}, \psi, \delta)$ верно неравенство*

$$\|x; M_1^l\| \leqslant c(\mathscr{A}, \psi, \delta)\|x; M_1\|.$$

Доказательство. Пусть $x \in K(\mathscr{A}, \psi, \delta)$. Тогда $\mathscr{A}(x) = z$, где $z \in \tilde{K}(\psi, \delta)$. Это равносильно равенству $\mathscr{A}_1(x) = z_1$, где

$$\mathscr{A}_1(x) = x^{(l)} + \sum_{i=0}^{l-1} P_l^{-1} P_i x^{(i)}, \quad z_1 = P_l^{-1} z.$$

Положим $\psi_1(t) = P_l^*(t)\psi(t)$. Из определения ψ_1 вытекает, что функция $\psi_1(t)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$ и равномерно ограничена от нуля и ∞. Верны соотношения

$$(\psi_1(t), z_1(t)) = (\psi(t), z(t)) \geqslant \delta|z(t)|.$$

Проведённые рассуждения влекут за собой равенство $K(\mathscr{A}, \psi, \delta) = K(\mathscr{A}_1, \psi_1, \delta)$. Следовательно, справедливо доказываемое обратное неравенство, в котором $c(\mathscr{A}, \psi, \delta) = c(\mathscr{A}_1, \psi_1, \delta)$. Теорема доказана.

Приведём более "геометричный" вариант теоремы 2. Обозначим через $F(t)$ мультиотображение $F\colon \mathbb{R} \to Kv(H)$, удовлетворяющее условиям: f_1) отображение F из $\mathbb{R}$ в $Kv(H)$ равномерно непрерывно; f_2) справедливы неравенства

$$0 < r \leqslant h_0(\theta, F(t)), \quad h_0(F(t), \theta) \leqslant R < \infty, \tag{17}$$

постоянные r и R не зависят от t.

В силу (17) при любом t компакт $F(t)$ отстоит от θ на расстояние не меньшее, чем $r > 0$. Вместе с тем $F(t)$ содержится в шаре $R\mathbb{B} = \{v \in H : |v| \leqslant R\}$. Введём в рассмотрение функцию $\psi(t) = \mathrm{Pr}(F(t))$ – метрическую проекцию θ на $F(t)$. Функция $\psi(t)$ равномерно ограничена от θ и ∞: $0 < r \leqslant |\psi(t)| \leqslant R < \infty$. Отсюда вытекает оценка

$$|\psi(t_1) - \psi(t_2)| \leqslant 2\sqrt{2R}(h(F(t_1), F(t_2)))^{1/2},$$

из которой в силу условия f_1) следует равномерная непрерывность функции $\psi(t)$.

Пусть $K(F(t))$ – переменный конус в пространстве H, порождаемый множеством $F(t)$. Из леммы 2 следует неравенство

$$(\psi(t), z) \geqslant \frac{r^2}{R}|z|, \quad z \in K(F(t)),$$

которое эквивалентно включению

$$K(F(t)) \subset K\left(\psi(t), \frac{r^2}{R}\right).$$

Таким образом, при выполнении условий $f_1)$ и $f_2)$ переменный конус $K(F(t))$ составляет часть переменного эллиптического конуса вида $K(\psi(t),\delta)$.

Обозначим через $K(\mathscr{A},K(F(t)))$ совокупность функций x класса $M^l(\mathbb{R})$, для которых $\mathscr{A}(x)(t)\in K(F(t))$ почти при всех действительных t. Из проведённых выше рассуждений следует включение

$$K(\mathscr{A},K(F(t)))\subset K(\mathscr{A},\psi,\delta)$$

при $\delta=r^2/R$.

Теорема 3. *Пусть мультиотображение $F(t)$ удовлетворяет условиям $f_1)$, $f_2)$. Тогда существует такая постоянная $c=c(\mathscr{A},F(t))$, что для функций x класса $K(\mathscr{A},K(F(t)))$ имеет место неравенство*

$$\|x;M_1^l\|\leqslant c(\mathscr{A},F(t))\|x;M_1\|.$$

Доказательство следует из включения $K(\mathscr{A},K(F(t)))\subset K(\mathscr{A},\psi,\delta)$ при $\delta=r^2/R$ и теоремы 2.

Теоремой 3 удобно пользоваться в тех случаях, когда переменный конус $K(t)$, фигурирующий в теоремах 1–3, порождается множеством $F(t)$. Такого рода построение часто используется (см., например, [3]) и, по существу, является универсальным в конечномерном пространстве H.

Остановимся на обобщениях теоремы 1, относящихся к случаю, когда $z=\mathscr{L}(x)$ есть векторная мера. С этой целью заменим локальное условие типа $z(t)\in K(\psi(t),\delta)$ его интегральным вариантом. Вместо конуса $K(\psi(t),\delta)$ рассмотрим конус

$$K_1(\psi(t),\delta):=\left\{z\in M_1(\mathbb{R}):\int\limits_{t_0}^{t_1}(\psi(t),z(t))\,dt\geqslant\delta\|z;L_1[t_0,t_1]\|\right\}. \tag{18}$$

В равенстве (18) t_0, t_1 – произвольные действительные числа, удовлетворяющие неравенствам $1\leqslant t_1-t_0\leqslant 3$, функция $\psi(t)$ и постоянная $\delta>0$ не зависят от t_0, t_1. Через $K_1(\mathscr{L},\psi,\delta)$ обозначим совокупность функций x класса $M_1^l(\mathbb{R})$, для которых $\mathscr{L}(x)\in K_1(\psi(t),\delta)$. Множество $K_1(\mathscr{L},\psi,\delta)$ образует клин в пространстве $M_1^l(\mathbb{R})$. Для элементов клина $K_1(\mathscr{L},\psi,\delta)$ верны обратные неравенства (6), (16). Анализ доказательства теоремы 1 показывает, что они сохраняют силу при замене клина $K(\mathscr{L},\psi,\delta)$ клином $K_1(\mathscr{L},\psi,\delta)$. Сформулируем вариант оценки (16).

Теорема 4. *Существует такая постоянная $c_1=c_1(\mathscr{L},\psi,\delta)$, что для функций x класса $K_1(\mathscr{L},\psi,\delta)$ верно неравенство*

$$\|x;W^l(J_\tau)\|\leqslant c_1(\mathscr{L},\psi,\delta)\|x;L_1(\tau-1,\tau+2)\|.$$

Вариацией вектор-функции $g\colon J\to H$ на отрезке $J=[a,b]$ называется число

$$V_a^b g=\sup\sum_{i=1}^n|g(s_i)-g(s_{i-1})|,$$

где точная верхняя грань берётся по всем возможным разбиениям отрезка J точками

$$s_0=a<s_1<\ldots<s_{n-1}<s_n=b.$$

Совокупность вектор-функций $g\colon J\to H$ с ограниченной вариацией на отрезке J образует линейное пространство, обозначаемое символом $BV(J,H)$. Абсолютно непрерывная на отрезке J функция g принадлежит классу $BV(J,H)$. Имеет место равенство

$$V_a^b g=\|g';L(J)\|.$$

Если $g(t)$ – первообразная функции $z(t)$ класса $M_1(\mathbb{R})$, то неравенство, фигурирующее в (18), эквивалентно оценке

$$\int_{t_0}^{t_1} (\psi(t), dg(t)) \geqslant \delta V_{t_0}^{t_1} g. \tag{19}$$

В левой части (19) находится интеграл от функции $\psi(t)$ по векторной мере $dg(t)$, в правой части (19) фигурирует вариация абсолютно непрерывной функции $g(t)$ по отрезку $[t_0, t_1]$. От абсолютной непрерывности функции $g(t)$ можно отказаться, однако при этом придётся рассматривать дифференциальные неравенства и уравнения в некотором обобщённом смысле.

Согласно теореме Ф. Рисса любой линейный функционал Λ на пространстве $E = C(J, H)$ допускает интегральное представление

$$\Lambda(\varphi) = \int_J \varphi(t) dg(t), \quad \varphi \in C(J, H), \tag{20}$$

где g – функция класса $BV(J, H)$. Будем предполагать, что функция g непрерывна справа; в этом случае функционал Λ определяет функцию g с точностью до постоянной. Пространство $E^* = (C(J))^*$, сопряжённое к $E = C(J, H)$, можно отождествить с пространством $BV(J)$. В пространстве E^* можно обычным образом ввести сильную и слабую топологии. Справедливо равенство

$$\|\Lambda; E^*\| = V_a^b g,$$

где функционал Λ и функция g связаны равенством (20). Сходимость $\Lambda_n \to \Lambda$ в слабой топологии $\sigma(E^*, E)$ означает равенство

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda_n(\varphi) = \Lambda(\varphi), \quad \varphi \in E = C(J, H).$$

Каждая функция z класса $L(J, H)$ порождает линейный функционал

$$\Lambda(\varphi) = \int_J (\varphi(t), z(t))\, dt$$

класса E^*. Подобный функционал Λ будем называть *абсолютно непрерывным*, а функцию z, определяемую им с точностью до эквивалентности, *плотностью* Λ. Это позволяет идентифицировать пространство $L(J, H)$ с некоторым подпространством пространства E^*.

Пространство $L(J, H)$ составляет собственную часть пространства E^*. Вместе с тем имеет место следующее утверждение.

Предложение 4. *Для любого функционала Λ класса E^* существует такая слабо сходящаяся к Λ последовательность абсолютно непрерывных функционалов Λ_n, что*

$$\lim_{n\to\infty} \|\Lambda_n; E^*\| = \|\Lambda; E^*\|.$$

Предложение 4 установлено в работе [5].

Введём некоторые функциональные пространства. Пусть l – натуральное число. Если функция $x(t)$ класса $L(J, H)$ такова, что для некоторого функционала Λ класса E^* и любой функции $\varphi \in C_0^\infty(J, H)$ справедливо соотношение

$$\int_J (x(t)\varphi^{(l)}(t))\, dt = (-1)^l \Lambda(\varphi),$$

то будем говорить, что l-я обобщённая производная функции $x(t)$ есть функционал Λ (или соответствующая векторная мера Радона): $x^{(l)} = \Lambda$. Через $V^l(J, H)$ обозначим совокупность суммируемых по отрезку J функций $x \in L_1(J, H)$, для которых $x^{(l)} \in E^*$. Линейное пространство $V^l(J, H)$ есть дифференциальная надстройка над $E^*(J)$. Равенство

$$\|x; V^l(J)\| = \|x; L(J)\| + \|x^{(l)}; E^*\| \tag{21}$$

определяет норму в $V^l(J, H)$, относительно которой $V^l(J, H)$ – банахово пространство. Справедливо строгое вложение $W^l(J) \subset V^l(J, H)$, позволяющее идентифицировать множество $W^l(J)$ с некоторым собственным подпространством пространства $V^l(J, H)$.

Разумеется, в пространстве $V^l(J, H)$ можно ввести нормы, отличные от (21). Вопрос об эквивалентности различных норм связан с теоремами вложения. Пространство $V^1(J, H)$ совпадает с пространством $BV(J, H)$ функций $x\colon J \to H$, имеющих ограниченное изменение на отрезке $J = [a, b]$. Норму в $BV(J)$ можно определить равенством

$$\|x; BV\| = \|x; L(J)\| + V_a^b x.$$

Отсюда вытекает непрерывность оператора вложения $V^1(J, H)$ в пространство $L_\infty(J, H)$ и компактность вложения $V^1(J, H)$ в пространство $L(J, H)$. Функция x класса $V^1(J, H)$ имеет конечное или счётное число точек разрыва, а в каждой точке $\tau \in [a, b)$ (соответственно $(a, b]$) существуют односторонние пределы

$$x(\tau + 0) = \lim_{t \to \tau + 0} x(t), \quad x(\tau - 0) = \lim_{t \to \tau - 0} x(t).$$

Если $x \in V^l(J, H)$ и $1 \leqslant k < l$, то $x^{(k)} \in V^{l-k}(J, H)$ и оператор дифференцирования $D^k = x^{(k)}$ непрерывен. В частности, при $l > 1$ оператор D^{l-1} действует и непрерывен из $V^l(J, H)$ в $BV(J, H)$. Это позволяет свести вопрос о теоремах вложения для пространства $V^l(J, H)$ к аналогичному вопросу для $BV(J, H)$. Если $x \in V^l(J, H)$ и $l > 1$, то при $0 \leqslant k < l - 1$ функция $D^k x$ непрерывна на J, а в каждой точке $\tau \in [a, b)$ (соответственно $(a, b]$) существуют односторонние пределы

$$D^{l-1}x(\tau + 0) = \lim_{t \to \tau + 0} D^{(l-1)}x(t), \quad D^{l-1}x(\tau - 0) = \lim_{t \to \tau - 0} D^{(l-1)}x(t).$$

Лемма 6. *Пусть x_n – ограниченная в пространстве $V^l(J, H)$ последовательность. Тогда существуют такая её подпоследовательность x_{i_n} и такая функция x из $V^l(J, H)$, что*

$$D^l x_{i_n} \to D^l x \ \text{ в } \ \sigma(C_0^*(J), C_0(J)) \quad \text{и} \quad D^k x_{i_n} \to D^k x \ \text{ в } \ L(J) \ \text{ при } \ k < l.$$

Доказательство. Первое утверждение следует из теоремы Алаоглу–Бурбаки [11, с. 118] о слабой компактности поляры и замкнутости оператора дифференцирования. Второе утверждение вытекает из теорем вложения. Лемма доказана.

Следствие 1. *В условиях леммы 6 справедливы соотношения*

$$\|x; V^l(J)\| \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \|x_{i_n}; V^l(J)\|, \quad \|x; L(J)\| = \lim_{n \to \infty} \|x_{i_n}; L(J)\|.$$

Обозначим через $V^l(J, a)$ подпространство $V^l(J)$, состоящее из функций x, удовлетворяющих условиям

$$x^{(i)}(a + 0) = 0, \quad i = \overline{0, l-1}.$$

Очевидно, что коразмерность пространства $V^l(J, a)$ равна lm. Пространство $V^l(J, H)$ есть прямая сумма $V^l(J, a)$ и ядра $\mathrm{Ker}\,(\mathscr{L})$ оператора

$$\mathscr{L} : V^l(J, H) = V^l(J, a) \bigoplus \mathrm{Ker}\,(\mathscr{L}).$$

В силу хорошо известных результатов о задаче Коши для импульсных систем (см., например, [12, гл. 4]) сужение оператора $\mathscr{L}$ на $V^l(I, \tau)$ задаёт гомеоморфизм пространств $V^l(J, a)$ и E^*. Верно следующее утверждение.

Предложение 5 [12, с. 163–167]. *Пусть коэффициенты дифференциального оператора $\mathscr{L}$ суммируемы по отрезку $J=[a,b]$. Тогда для любого функционала $\Lambda\in E^*$ существует единственное решение задачи Коши*

$$\mathscr{L}(x)=\Lambda,\quad x^{(i)}(a+0)=0,\quad i=\overline{0,l-1}. \tag{22}$$

Оператор $\mathscr{B}$, сопоставляющий мере функционала Λ решение задачи Коши (22), действует из E^* в $V^l(J,a)$ и непрерывен. Существует такая константа $c(J)$, что

$$\|u;V^l(J)\|\leqslant c(J)\|\mathscr{L}(u);C_0^*(J)\|,\quad u\in V^l(J,a). \tag{23}$$

Неравенство коэрцитивности (23) эквивалентно оценке

$$\|\mathscr{B}(\Lambda);V^l(J)\|\leqslant c(J)\|\Lambda;E^*\|,\quad \Lambda\in E^*.$$

Лемма 7. *Пусть* $\Lambda_n\in E^*$, $u_n=\mathscr{B}(\Lambda_n)$, $n\in\mathbb{N}$. *Пусть*

$$\Lambda_n\to\Lambda \;\; \textit{в} \;\; \sigma(E^*,E) \quad \textit{и} \quad u=\mathscr{B}(\Lambda).$$

Тогда

$$D^l u_n\to D^l u \;\; \textit{в} \;\; \sigma(E^*,E),\quad D^i u_n\to D^i u \;\; \textit{в} \;\; L_1(J,H),\quad i=\overline{0,l-1}.$$

Доказательство. Сходимость $D^lu_n\to D^lu$ в $\sigma(E^*,E)$ следует из замкнутости оператора D^l относительно топологии $\sigma(E^*,E)$. Второе утверждение леммы вытекает из теорем вложения. Лемма доказана.

Введём банахово пространство $MV(\mathbb{R},H)$, состоящее из функций $g\colon\mathbb{R}\to H$, для которых имеет смысл и конечна норма

$$\|g;MV\|=\sup_{\tau\in\mathbb{R}}V_\tau^{\tau+1}g.$$

Сужение каждой функции g класса $MV(\mathbb{R},H)$ на любой отрезок $J=[a,b]$ имеет ограниченную вариацию на J и порождает на пространстве $E=C(J,H)$ линейный функционал Λ. Его норма в пространстве E^*, сопряжённом к пространству E, совпадает с вариацией функции g на отрезке $J=[a,b]$. Далее, $MV^l(\mathbb{R})$ – банахово пространство функций $x\colon\mathbb{R}\to H$, сужения которых на любой отрезок $J_\tau=[\tau,\tau+1]$ принадлежат $V^l(J_\tau)$, и имеет смысл и конечна норма

$$\|x;MV^l\|=\sup_{\tau\in\mathbb{R}}\|x;V^l(J_\tau)\|.$$

Пусть ψ – функция класса $C_0(\mathbb{R})$, удовлетворяющая неравенствам

$$0<r_0\leqslant|\psi(t)|\leqslant R_0<\infty \quad \text{и} \quad 0<\delta<r_0.$$

Обозначим через $K_2(\psi,\delta)$ часть класса $MV(\mathbb{R},H)$, состоящую из функций $g\colon\mathbb{R}\to H$, удовлетворяющих неравенству

$$\int\limits_a^b(\psi(t),dg(t))\geqslant\delta V_a^b g, \tag{24}$$

где a и b – произвольные действительные числа, удовлетворяющие оценкам $1\leqslant b-a\leqslant 3$. В случае $a=t_0$, $b=t_1$ и абсолютно непрерывной на отрезке $J=[a,b]$ функции $g(t)$ неравенство (24) совпадает с фигурирующим в определении (18) неравенством.

Включение $K_1(\psi,\delta)\subset K_2(\psi,\delta)$ является строгим. Через $K_2(\mathscr{L},\psi,\delta)$ обозначим совокупность функций x класса $MV^l(\mathbb{R})$, для которых $\mathscr{L}(x)\in K_2(\psi(t),\delta)$. Множество $K_2(\mathscr{L},\psi,\delta)$ образует клин в пространстве $MV^l(\mathbb{R})$, содержащий клин $K_1(\mathscr{L},\psi,\delta)$ в качестве собственной части. Вместе с тем аналоги обратных неравенств (6), (16) справедливы и для клина $K_2(\mathscr{L},\psi,\delta)$.

Теорема 5. *Существует такая постоянная* $c_2(\mathscr{L},\psi,\delta)$, *что для всех функций* x *класса* $K_2(\mathscr{L},\psi,\delta)$ *верно неравенство*

$$\|x;V^l(J_\tau)\| \leqslant c_2(\mathscr{L},\psi,\delta)\|x;L_1(\tau-1,\tau+2)\|. \tag{25}$$

Доказательство. Пусть $x\in K_2(\mathscr{L},\psi,\delta)$, $\tau\in\mathbb{R}$, $a=\tau-1$, $b=\tau+2$, $J=[a,b]$. Обозначим через v решение задачи Коши

$$\mathscr{L}(v)=0,\quad v^{(i)}(a)=x^{(i)}(a+0),\quad i=\overline{0,l-1}.$$

Функция $u=x-v$ принадлежит пространству $V^l(J,H)$ и $\mathscr{L}(u)=\mathscr{L}(x)=\Lambda$. Функционал Λ принадлежит пространству E^*, сопряжённому к пространству $E=C(J)$. Выберем слабо сходящуюся к Λ последовательность абсолютно непрерывных функционалов Λ_n так, что справедливо заключение предложения 4. Поскольку $x\in K_2(\mathscr{L},\psi,\delta)$, то справедливо неравенство

$$\Lambda(\psi)\geqslant\delta\|\Lambda;E^*\|,$$

следствием которого является оценка

$$\Lambda_n(\psi)\geqslant\frac{\delta}{2}\|\Lambda;E^*\|,\quad n>n_0,$$

где n_0 – достаточно большое натуральное число.

Положим

$$u_n=\mathscr{B}(\Lambda_n),\quad x_n=u_n+v.$$

Очевидно, что $x_n\in\mathscr{K}_1(\mathscr{L},\psi,\delta/2)$. Применив к функциям x_n теорему 4, приходим к оценкам

$$\|x_n;W^l(J_\tau)\|\leqslant c_1(\mathscr{L},\psi,\delta/2)\|x_n;L_1(a,b)\|. \tag{26}$$

Согласно лемме 7 справедливы соотношения

$$D^ix_n\to D^ix\ \text{ в }\ \sigma(E^*,E),\quad i=\overline{0,l},\quad \text{и}\quad x_n\to x\ \text{ в }\ L(J).$$

Переходя в (26) к пределу при $n\to\infty$, получаем неравенство (25), в котором

$$c_2(\mathscr{L},\psi,\delta)=c_1(\mathscr{L},\psi,\delta/2).$$

Теорема доказана.

Следствие 2. *Для всех функций* x *класса* $K_2(\mathscr{L},\psi,\delta)$ *верно неравенство*

$$\sup_{\tau\in R}\|x;V^l(J_\tau)\|\leqslant 3c_2(\mathscr{L},\psi,\delta)\sup_{\tau\in\mathbb{R}}\|x;L_1(J_\tau)\|.$$

Сюрьективность дифференциальных операторов $\mathscr{L}$, $\mathscr{A}$ в рассматриваемых выше функциональных пространствах не предполагалась. К данному кругу вопросов можно добавить проблему обратимости этих операторов, интегральное представление операторов $\mathscr{L}^{-1}$, $\mathscr{A}^{-1}$, положительность функции Грина относительно переменных конусов. Применительно к пространствам почти периодических функций ряд важных результатов в указанных направлениях установлен в [3, гл. 1, 2]. Интересные приложения конусных методов к задачам автоматического регулирования приведены в книге [4, гл. 4].

Аналогичные вопросы рассматривались в работе [5]. Новизна представленных выше результатов связана с двумя обстоятельствами: в отличие от [5] рассматривается переменный, а не постоянный конус $\mathbb{R}^m_+$ в пространстве $\mathbb{R}^m$; обратные неравенства из [5] имеют характер внутренних оценок решений дифференциальных неравенств.

Установленные в статье результаты охватывают пространства функций, определённых на всей действительной оси $\mathbb{R}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М., 1988.
2. *Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М., 1983.
3. *Красносельский М.А., Бурд В.Ш., Колесов Ю.С.* Нелинейные почти периодические колебания. М., 1970.
4. *Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В.* Позитивные линейные системы. М., 1985.
5. *Климов В.С.* Внутренние оценки решений линейных дифференциальных неравенств // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 8. С. 1034–1044.
6. *Лионс Ж.Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971.
7. *Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М., 1958.
8. *Вулих Б.З.* Специальные вопросы геометрии конусов в нормированных пространствах. Калинин, 1978.
9. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М., 2007.
10. *Богачёв В.И., Смолянов О.Г.* Действительный и функциональный анализ. М.; Ижевск, 2011.
11. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М., 1977.
12. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. М., 1971.

Ярославский государственный университет
имени П.Г. Демидова

Поступила в редакцию 18.05.2023 г.
После доработки 24.07.2023 г.
Принята к публикации 21.08.2023 г.