ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 9, с. 1172–1180

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.4

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2023 г. **В. Е. Круглов**

Решена система рекуррентных соотношений третьего порядка, связывающих коэффициенты полиномиальных собственных функций (ПСФ) дифференциального уравнения. Получены рекуррентное соотношение для трёх последовательных ПСФ и формула дифференцирования ПСФ. Рассмотрены дифференциальные уравнения, одно из которых обобщает дифференциальные уравнения Эрмита и Лагерра, а другое является обобщением дифференциального уравнения Якоби. Для этих уравнений построены функции, приводящие их к самосопряжённому виду, и найдены условия, при которых эти функции становятся весовыми. Приведены примеры, когда для невесовых функций ПСФ не имеют действительных нулей.

DOI: 10.31857/S0374064123090029, EDN: WONVOB

1. Введение. Постановка задачи. В работе [1] строились полиномиальные решения типа

$$y_n(x) = e_0^{(n)} x^{\varepsilon_n} + e_1^{(n)} x^{\varepsilon_n - 1} + \ldots + e_n^{(n)} x^{\varepsilon_n - n}$$

следующего дифференциального уравнения:

$$x^2(A_1x^2 + B_1x + C_1)y'' + x(A_2x^2 + B_2x + C_2)y' + (A_3x^2 + B_3x + C_3)y = 0. \tag{1}$$

Подставив $y_n(x)$ в это уравнение и приравняв к нулю коэффициенты при степенях x, получим систему рекуррентных соотношений, среди которых (из равенства нулю коэффициента при наименьшей степени x, определяющего уравнение [2, с. 215]) находим значения параметра ε_n, именно

$$(\varepsilon_n - n)(\varepsilon_n - n + 1)C_1 + (\varepsilon_n - n)C_2 + C_3 = 0, \tag{2}$$

а при наибольшей степени x справедливо равенство

$$\varepsilon_n(\varepsilon_n - 1)A_1 + \varepsilon_n A_2 + A_3 = 0. \tag{3}$$

В уравнении (1) положим $C_2 = C_3 = B_3 = 0$, $C_1 \neq 0$. Тогда из уравнения (2) следует $\varepsilon_n^{(1)} = n$, $\varepsilon_n^{(2)} = n - 1$. Выберем $\varepsilon_n = n$ и, учитывая (3), придём к уравнению

$$(A_1x^2 + B_1x + C_1)y'' + (A_2x + B_2)y' - n(A_2 + (n-1)A_1)y = 0. \tag{4}$$

Получена, как указано в [3, с. 274], задача на нахождение собственных функций (решений уравнения (4)) вида

$$y_n(x) = e_0^{(n)} x^n + e_1^{(n)} x^{n-1} + \ldots + e_n^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

соответствующих собственным числам

$$\lambda_n = -n(A_2 + (n-1)A_1). \tag{6}$$

Заметим, что непосредственно из уравнения (4) следует $y_0(x) \equiv 1$, для дальнейшего положим $y_{-1}(x) \equiv 0$.

Функции (5) будем называть *полиномиальными собственными функциями* (ПСФ) уравнения (4).

Автору не удалось найти конкретную информацию о явном виде ПСФ уравнения (4), обычно указан способ их получения. В данной работе рассмотрены два способа получения явных формул ПСФ уравнения (4), приведены формулы ПСФ первой, второй и третьей степеней. Эти формулы совпадают с точностью до мультипликативной константы. Кроме того, получены формулы, линейно связывающие ПСФ $y_n(x)$, $y_{n-1}(x)$ и $y_{n-2}(x)$; найдена формула дифференцирования ПСФ. Рассмотрены два частных случая уравнения (4): одно уравнение, обобщающее дифференциальные уравнения Эрмита и Лагерра; второе – обобщающее дифференциальное уравнение Якоби.

2. Два способа построения нестандартизованных ПСФ уравнения (4).

2.1. Использование формулы Родрига. Приведём уравнение (4) к самосопряжённому виду

$$[(A_1x^2+B_1x+C_1)\rho(x)y_n']'+\lambda_n\rho(x)y_n=0,$$

где λ_n определено в (6), а функция $\rho(x)$, назовём её *приводящей* уравнение (4) к самосопряжённому виду, удовлетворяет [4, § 2] условию

$$(A_1x^2+B_1x+C_1)\rho'(x)=[(A_2-2A_1)x+B_2-B_1]\rho(x). \tag{7}$$

Тогда ПСФ $y_n(x)$ находится по формуле Родрига

$$y_n(x)=\frac{1}{\rho(x)}[(A_1x^2+B_1x+C_1)^n\rho(x)]^{(n)},\quad n=0,1,2,\ldots$$

Оказывается, что для нахождения $y_n(x)$ совершенно не требуется знать явный вид приводящей функции $\rho(x)$, а достаточно использовать равенство (7). Продемонстрируем это при нахождении ПСФ $y_1(x)$, $y_2(x)$ и $y_3(x)$:

$$y_1(x)=\frac{1}{\rho(x)}[(A_1x^2+B_1x+C_1)\rho(x)]'=A_2x+B_2,$$

$$y_2(x)=\frac{1}{\rho(x)}[(A_1x^2+B_1x+C_1)^2\rho(x)]''=$$

$$=\frac{1}{\rho(x)}[(4A_1x+2B_1)(A_1x^2+B_1x+C_1)\rho(x)+(A_1x^2+B_1x+C_1)^2\rho'(x)]'=$$

$$=\frac{1}{\rho(x)}\left[(A_1x^2+B_1x+C_1)\rho(x)\left(4A_1x+2B_1+\frac{A_1x^2+B_1x+C_1}{\rho(x)}\rho'(x)\right)\right]'=$$

$$=\frac{1}{\rho(x)}[(A_1x^2+B_1x+C_1)\rho(x)]'((A_2+2A_1)x+B_2+B_1)+(A_1x^2+B_1x+C_1)(A_2+2A_1)=$$

$$=(A_2+A_1)(A_2+2A_1)x^2+2(A_2+A_1)(B_2+B_1)x+B_2(B_2+B_1)+C_1(A_2+2A_1),$$

$$y_3(x)=\frac{1}{\rho(x)}[(A_1x^2+B_1x+C_1)^3\rho(x)]'''=$$

$$=\frac{1}{\rho(x)}\left[(A_1x^2+B_1x+C_1)^2\rho(x)\left(6A_1x+3B_1+\frac{(A_1x^2+B_1x+C_1)\rho'(x)}{\rho(x)}\right)\right]''=$$

$$=\frac{1}{\rho(x)}[(A_1x^2+B_1x+C_1)^2\rho(x)((A_2+4A_1)x+B_2+2B_1)]''=$$

$$=\frac{1}{\rho(x)}[((A_1x^2+B_1x+C_1)^2\rho(x))''((A_2+4A_1)x+B_2+2B_1)+2((A_1x^2+B_1x+C_1)^2\rho(x))'(A_2+4A_1)].$$

Подставим выражение для $y_2(x)$ вместо

$$((A_1x^2+B_1x+C_1)^2\rho(x))' = (A_1x^2+B_1x+C_1)((A_2+2A_1)x+B_2+B_1).$$

Тогда получим

$$y_3(x) = (A_2+2A_1)(A_2+3A_1)(A_2+4A_1)x^3 + (B_2+2B_1)(A_2+2A_1)(A_2+3A_1)(A_2+4A_1)x^2 + \\ + 3(A_2+2A_1)[(B_2+B_1)(B_2+2B_1)+C_1(A_2+4A_1)]x + B_2(B_2+B_1)(B_2+2B_1) + \\ + C_1[(B_2+2B_1)(A_2+2A_1)+2(B_2+B_1)(A_2+4A_1)].$$

2.2. Сведение к системе рекуррентных уравнений третьего порядка относительно коэффициентов полинома (5). Подставим полином (5) в уравнение (4). В результате получим систему рекуррентных уравнений третьего порядка

$$e_1^{(n)} = \frac{n(B_2+(n-1)B_1)}{A_2+(2n-2)A_1}e_0^{(n)},$$

$$e_k^{(n)} = \frac{(n-k+1)(B_2+(n-k)B_1)}{k(A_2+(2n-k-1)A_1)}e_{k-1}^{(n)} + \frac{(n-k+1)(n-k+2)C_1}{k(A_2+(2n-k-1)A_1)}e_{k-2}^{(n)}, \quad k=2,\ldots,n. \tag{8}$$

На решении этой системы остановимся ниже.

3. Матричное решение рекуррентного уравнения третьего порядка. Так как рекуррентные соотношения третьего порядка справедливы для каждой системы ортогональных полиномов [5, теорема 3.2.1; 6, гл. 1, § 2], имеет смысл найти решение следующей системы рекуррентных соотношений:

$$f_1^{(n)} = p_0^{(n)}f_0^{(n)}, \quad f_k^{(n)} = p_{k-1}^{(n)}f_{k-1}^{(n)} + m_{k-2}^{(n)}f_{k-2}^{(n)}, \quad k=2,\ldots,n. \tag{9}$$

Запишем систему (9) в матричном виде

$$D_{nn}\begin{pmatrix} f_1^{(n)} \\ f_2^{(n)} \\ \vdots \\ f_n^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0^{(n)} \\ m_0^{(n)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} f_0^{(n)},$$

где

$$D_{nn} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ -p_1^{(n)} & 1 & & & & & & \\ -m_1^{(n)} & -p_2^{(n)} & 1 & & & & & \\ 0 & -m_2^{(n)} & -p_3^{(n)} & 1 & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -m_{n-1}^{(n)} & -p_n^{(n)} & 1 \end{pmatrix}$$

– нижнетреугольная тридиагональная квадратная матрица порядка n.

Для матрицы D_{ns}, $s=\overline{2,n}$,

$$D_{ns} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ -p_1^{(n)} & 1 & & & & & \\ -m_1^{(n)} & -p_2^{(n)} & 1 & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -m_{s-2}^{(n)} & -p_{s-1}^{(n)} & 1 \end{pmatrix}$$

обратная матрица D_{ns}^{-1} имеет нижнетреугольную структуру

$$D_{ns}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ p_1^{(n)} & 1 &&&&&& \\ d_{31}^{(n)} & p_2^{(n)} & 1 &&&&& \\ d_{41}^{(n)} & d_{42}^{(n)} & p_3^{(n)} & 1 &&&& \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{s1}^{(n)} & d_{s2}^{(n)} & d_{s3}^{(n)} & d_{s4}^{(n)} & \ldots & d_{s\,s-3}^{(n)} & d_{s\,s-2}^{(n)} & p_{s-1}^{(n)} & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$d_{ii}^{(n)}=1,\quad d_{i\,i-1}^{(n)}=p_{i-1}^{(n)},\quad d_{31}^{(n)}=m_1^{(n)}+p_1^{(n)}p_2^{(n)},\quad d_{41}^{(n)}=m_2^{(n)}p_1^{(n)}+p_3^{(n)}d_{31}^{(n)},\quad d_{42}^{(n)}=m_2^{(n)}+p_2^{(n)}p_3^{(n)},$$

$$d_{sj}^{(n)} = m_{s-2}^{(n)}d_{s-2,j}^{(n)} + p_{s-1}^{(n)}d_{s-1,j}^{(n)},\quad j=\overline{1,s-2},\quad s=\overline{3,n}.$$

Проверка того, что D_{ns} и D_{ns}^{-1} – взаимно обратные матрицы, достаточно проста. Тогда

$$\begin{pmatrix} f_1^{(n)} \\ f_2^{(n)} \\ \vdots \\ f_s^{(n)} \end{pmatrix} = D_{ns}^{-1} \begin{pmatrix} p_0^{(n)} \\ m_0^{(n)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} f_0^{(n)},$$

и, следовательно, полагая $f_0^{(n)}=1$, получаем

$$f_1^{(n)} = p_0^{(n)},\quad f_2^{(n)} = p_0^{(n)}p_1^{(n)} + m_0^{(n)},$$

$$f_3^{(n)} = d_{31}^{(n)}p_0^{(n)} + m_0^{(n)}p_2^{(n)} = m_0^{(n)}p_2^{(n)} + m_1^{(n)}p_0^{(n)} + p_0^{(n)}p_1^{(n)}p_2^{(n)},$$

$$f_4^{(n)} = p_0^{(n)}d_{41}^{(n)} + m_0^{(n)}d_{42}^{(n)} = m_0^{(n)}m_2^{(n)} + m_0^{(n)}p_2^{(n)}p_3^{(n)} + m_1^{(n)}p_0^{(n)}p_3^{(n)} + m_2^{(n)}p_0^{(n)}p_1^{(n)} + p_0^{(n)}p_1^{(n)}p_2^{(n)}p_3^{(n)},$$

$$f_5^{(n)} = p_0^{(n)}d_{51}^{(n)} + m_0^{(n)}d_{52}^{(n)} = m_0^{(n)}m_2^{(n)}p_4^{(n)} + m_0^{(n)}m_3^{(n)}p_2^{(n)} + m_1^{(n)}m_3^{(n)}p_0^{(n)} +$$

$$+ m_0^{(n)}p_2^{(n)}p_3^{(n)}p_4^{(n)} + m_1^{(n)}p_0^{(n)}p_3^{(n)}p_4^{(n)} + m_2^{(n)}p_0^{(n)}p_1^{(n)}p_4^{(n)} + m_3^{(n)}p_0^{(n)}p_1^{(n)}p_2^{(n)} + p_0^{(n)}p_1^{(n)}p_2^{(n)}p_3^{(n)}p_4^{(n)},$$

$$\ldots$$

$$f_s^{(n)} = d_{51}^{(n)}p_0^{(n)} + d_{52}^{(n)}m_0^{(n)},\quad s=\overline{2,n}.$$

Отметим, что количество слагаемых, из которых состоит $f_s^{(n)}$, равно [7, формула (28)] s-му члену последовательности Фибоначчи.

Вернёмся к решению системы (8). Здесь

$$p_{k-1}^{(n)} = \frac{(n-k+1)(B_2+(n-k)B_1)}{k(A_2+(2n-k-1)A_1)},$$

$$m_{k-2}^{(n)} = \frac{(n-k+1)(n-k+2)C_1}{k(A_2+(2n-k-1)A_1)},\quad m_{-1}^{(n)}=0,\quad k=\overline{1,n+1},$$

при $n=1$

$$y_1(x) = f_1^{(1)}x + xf_0^{(1)} = \left(x+\frac{B_2}{A_2}\right)f_0^{(1)},$$

при $n=2$

$$y_2(x) = f_0^{(2)}x^2 + f_1^{(2)}x + f_2^{(2)} =$$

$$= f_0^{(2)}\left[x^2 + \frac{2(B_2+B_1)}{A_2+2A_1}x + \frac{B_2(B_2+B_1)}{(A_2+2A_1)(A_2+A_1)} + \frac{C_1}{A_2+A_1}\right],$$

при $n=3$

$$y_3(x) = f_0^{(3)}x^3 + f_1^{(3)}x^2 + f_2^{(3)}x + f_3^{(3)} =$$

$$= f_0^{(3)}\left[x^3 + \frac{3(B_2+2B_1)}{A_2+4A_1}x^2 + \frac{3}{A_2+3A_1}\left(\frac{(B_2+B_1)(B_2+2B_1)}{A_2+4A_1} + C_1\right)x + \right.$$

$$\left. + \frac{B_2(B_2+B_1)(B_2+2B_1)}{(A_2+2A_1)(A_2+3A_1)(A_2+4A_1)} + \frac{C_1}{A_2+2A_1}\left(\frac{B_2}{A_2+3A_1} + \frac{2(B_2+2B_1)}{A_2+4A_1}\right)\right].$$

Ввиду громоздкости формул для $y_k(x)$, $k=4,5,\ldots,$ они здесь не приводятся. В дальнейшем положим $e_0^{(n)} = f_0^{(n)} = 1$, $n=1,2,\ldots,$ и полученные ПСФ имеют единичный старший коэффициент.

Несложно заметить, что свободный член ПСФ $y_n(x)$ среди прочих слагаемых содержит слагаемое

$$p_0^{(n)}p_1^{(n)}\cdots p_{n-1}^{(n)} = \frac{B_2(B_2+B_1)\cdots(B_2+(n-1)B_1)}{(A_2+(n-1)A_1)(A_2+nA_2)\cdots(A_2+(2n-2)A_1)}$$

и все другие слагаемые не добавляют в знаменателе новых множителей. Полагая

$$e_0^{(n)}[(A_2+(n-1)A_1)\cdots(A_2+(2n-2)A_1)]^{-1} = 1,$$

получаем ПСФ, первые два старших коэффициента которой равны $(A_2+(n-1)A_1)\cdots(A_2+$ $+(2n-2)A_1)$ и $n(B_2+(n-1)B_1)(A_2+(n-1)A_1)\cdots(A_2+(2n-2)A_1)\cdots(A_2+(2n-3)A_1)$.

Если в формуле для $y_3(x)$ привести все дроби к общему знаменателю, то кажущаяся разница в написании свободных членов ПСФ $y_3(x)$, полученной двумя способами, отсутствует. Для этого достаточно провести преобразования в свободном члене каждой ПСФ.

4. Одно свойство ПСФ.

Теорема 1. *Пусть $y_{n-1}(x)$ и $y_{n-2}(x)$ – ПСФ соответствующих дифференциальных уравнений*

$$(A_1x^2+B_1x+C_1)y''_{n-1} + (A_2x+B_2)y'_{n-1} = (n-1)(A_2+(n-2)A_1)y_{n-1}, \tag{10}$$

$$(A_1x^2+B_1x+C_1)y''_{n-2} + (A_2x+B_2)y'_{n-2} = (n-2)(A_2+(n-3)A_1)y_{n-2}. \tag{11}$$

Функция

$$y_n(x) = (\alpha^{(n)}+x)y_{n-1}(x) + \beta^{(n)}y_{n-2}(x), \quad n=1,2,\ldots, \tag{12}$$

где

$$\alpha^{(n)} = \frac{n(B_2+(n-1)B_1)}{A_2+(2n-2)A_1} - \frac{(n-1)(B_2+(n-2)B_1)}{A_2+(2n-4)A_1}, \tag{13}$$

$$\beta^{(n)} = \left[\frac{(n-1)(B_2+(n-2)B_1)}{A_2+(2n-4)A_1}\right]^2 - \frac{(n-1)(B_2+(n-2)B_1)}{2(A_2+(2n-4)A_1)} \times$$

$$\times\left[\frac{n(B_2+(n-1)B_1)}{A_2+(2n-3)A_1} + \frac{(n-2)(B_2+(n-3)B_1)}{A_2+(2n-5)A_1}\right] + \frac{(n-1)(A_2+(n-3)A_1)}{(A_2+(2n-3)A_1)(A_2+(2n-5)A_1)}C_1, \tag{14}$$

обращает в нуль выражение

$$I_n = (A_1x^2+B_1x+C_1)y''_n + (A_2x+B_2)y'_n - n(A_2+(n-1)A_1)y_n \tag{15}$$

тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$R_n = (A_1x^2+B_1x+C_1)y'_{n-1} + (n-1)\left(-A_1x + \frac{B_2A_1 - B_1A_2 - (n-2)A_1B_1}{A_2+(2n-4)A_1}\right)y_{n-1} -$$

$$- \beta^{(n)}(A_2+(2n-3)A_1)y_{n-2} = 0. \tag{16}$$

Доказательство. Подставим в выражение для I_n функцию (12). В полученном выражении выделим левые части уравнений (10), (11), затем учтём (13), (14) и сгруппируем все элементы при y_{n-1} и y_{n-2}. В результате получим $I_n = 2R_n$. Пусть функция (12) обращает в нуль выражение (15), т.е. $I_n = 0$. Значит, $R_n = 0$.

Обратно, пусть $R_n = 0$. Тогда $I_n = 0$, т.е. функция (12) обращает в нуль выражение (15). Теорема доказана.

Формулу (16) назовём *формулой дифференцирования ПСФ дифференциального уравнения* (4).

В дальнейшем рассмотрим частные случаи уравнения (4) с тем отличием, что ПСФ этих уравнений будут иметь отличный от единицы старший коэффициент.

Положим в (4) $A_1 = 0$. Дифференциальное уравнение

$$(B_1x + C_1)y'' + (A_2x + B_2)y' - nA_2y = 0, \quad A_2 \neq 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{17}$$

при $B_1 = B_2 = 0$, $C_1 = 1$, $A_2 = -2$ становится эрмитовым; при $B_1 = -A_1 = 1$, $B_2 = \alpha + 1$, $C_1 = 0$ – лагерровым. Коэффициенты полинома (5) удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$e_1^{(n)} = \frac{n(B_2 + (n-1)B_1)}{A_2} e_0^{(n)},$$

$$e_k^{(n)} = \frac{n-k+1}{kA_2}[(B_2 + (n-k)B_1)e_{k-1}^{(n)} + (n-k+2)C_1e_{k-2}^{(n)}], \quad k = \overline{2, n}.$$

Полагая $e_0^{(n)}A_2^{-n} = 1$, получаем

$$y_1(x) = A_2x + B_2, \quad y_2(x) = A_2^2x^2 + 2(B_2 + B_1)A_2x + B_2(B_2 + B_1) + C_1A_2,$$

$$y_3(x) = A_2^3x^3 + 3(B_2 + 2B_1)A_2^2x^2 + 3A_2[(B_2 + B_1)(B_2 + 2B_1) + C_1A_2]x + \\ + B_2(B_2 + B_1)(B_2 + 2B_1) + C_1A_2[B_2 + 2(B_2 + 2B_1)].$$

Покажем, что ПСФ $y_n(x)$, $y_{n-1}(x)$ и $y_{n-2}(x)$ уравнения (17) связаны рекуррентным соотношением

$$y_n(x) = (A_2x + B_2 + 2(n-1)B_1)y_{n-1}(x) - \\ - (n-1)(B_1B_2 - C_1A_2 + (n-2)B_1^2)y_{n-2}(x), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{18}$$

Теорема 2. *Пусть $y_{n-1}(x)$ и $y_{n-2}(x)$ – ПСФ соответствующих дифференциальных уравнений*

$$(B_1x + C_1)y''_{n-1} + (A_2x + B_2)y'_{n-1} = (n-1)A_2y_{n-1}, \tag{19}$$

$$(B_1x + C_1)y''_{n-2} + (A_2x + B_2)y'_{n-2} = (n-2)A_2y_{n-2}, \tag{20}$$

функция (18) обращает в нуль выражение

$$I_n^{(1)} = (B_1x + C_1)y''_n + (A_2x + B_2)y'_n - nA_2y_n$$

тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$R_n^{(1)} = (B_1x + C_1)y'_{n-1} - (n-1)B_1y_{n-1} + (n-1)(B_1B_2 - C_1A_2 + (n-2)B_1^2)y_{n-2} = 0. \tag{21}$$

Доказательство. Подставим в выражение для $I_n^{(1)}$ функцию (18). В полученном соотношении выделим левые части уравнений (19), (20). Затем сгруппируем все элементы при y_{n-1} и y_{n-2}. В результате получим $I_n^{(1)} = 2A_2R_n^{(1)}$. Пусть функция (18) обращает в нуль выражение $I_n^{(1)}$. Тогда $R_n^{(1)} = 0$. Обратно, пусть $R_n^{(1)} = 0$. Тогда $I_n^{(1)} = 0$, т.е. функция (18) обращает выражение $I_n^{(1)}$ в нуль. Теорема доказана.

Формулу (21) назовём *формулой дифференцирования ПСФ дифференциального уравнения* (17).

Положим в (4) $B_1 = 0$. Среди множества ПСФ полученного дифференциального уравнения

$$(A_1x^2 + C_1)y'' + (A_2x + B_2)y' - n(A_2 + (n-1)A_1)y = 0, \quad A_2 \neq 0, \tag{22}$$

есть нестандартизованные полиномы Якоби, если $C_1 = -A_1 = 1$, $B_2 = \beta - \alpha$, $A_2 = -(\alpha + \beta + 2)$, а также нестандартизованные полиномы Чебышёва первого и второго рода, Лежандра и Гегенбауэра, если $C_1 = -A_1 = 1$, $B_2 = 0$, $A_2 = -1, -3, -2, -(\alpha + 1)$ соответственно.

Для коэффициентов ПСФ уравнения (22) справедливы рекуррентные соотношения (8), в которых нужно положить $B_1 = 0$.

Приведём в качестве примера первые четыре нестандартизованные, с отличным от единицы старшим коэффициентом, ПСФ уравнения (22):

$$y_0(x) = 1, \quad y_1(x) = A_2x + B_2,$$

$$y_2(x) = (A_2 + A_1)(A_2 + 2A_1)x^2 + 2B_2(A_2 + A_1)x + B_2^2 + C_1(A_2 + 2A_1),$$

$$\begin{aligned} y_3(x) = (A_2 + 2A_1)(A_2 + 3A_1)(A_2 + 4A_1)x^3 + 3B_2(A_2 + 2A_1)(A_2 + 3A_1)x^2 + \\ + 3(A_2 + 2A_1)[B_2^2 + (A_2 + 4A_1)C_1]x + B_2^3 + B_2C_1(3A_2 + 10A_1). \end{aligned} \tag{23}$$

Покажем, что три нестандартизованных, с отличным от единицы старшим коэффициентом, ПСФ уравнения (22) $y_n(x)$, $y_{n-1}(x)$ и $y_{n-2}(x)$ связаны рекуррентным линейным соотношением

$$y_n(x) = (\alpha_1^{(n)}x + \alpha_2^{(n)})y_{n-1}(x) + \beta^{(n)}y_{n-2}(x), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{24}$$

где

$$\alpha_1^{(n)} = \frac{(A_2 + (2n-3)A_1)(A_2 + (2n-2)A_1)}{A_2 + (n-2)A_1}, \quad \alpha_2^{(n)} = \frac{B_2(A_2 + (2n-3)A_1)(A_2 - 2A_1)}{(A_2 + (n-2)A_1)(A_2 + (2n-4)A_1)},$$

$$\beta^{(n)} = \frac{(n-1)A_1B_2^2(A_2 + (2n-2)A_1)}{(A_2 + (n-2)A_1)(A_2 + (2n-4)A_1)} + \frac{(n-1)C_1(A_2 + (2n-4)A_1)(A_2 + (2n-2)A_1)}{(A_2 + (n-2)A_1)}. \tag{25}$$

Теорема 3. *Пусть $y_{n-1}(x)$ и $y_{n-2}(x)$ – ПСФ соответствующих дифференциальных уравнений*

$$(A_1x^2 + C_1)y''_{n-1} + (A_2x + B_2)y'_{n-1} = (n-1)(A_2 + (n-2)A_1)y_{n-1}, \tag{26}$$

$$(A_1x^2 + C_1)y''_{n-2} + (A_2x + B_2)y'_{n-2} = (n-2)(A_2 + (n-3)A_1)y_{n-2}. \tag{27}$$

Функция (24) обращает в нуль выражение

$$I_n^{(2)} = (A_1x^2 + C_1)y''_n + (A_2x + B_2)y'_n - n(A_2 + (n-1)A_1)y_n$$

тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$\begin{aligned} R_n^{(2)} = (A_1x^2 + C_1)y'_{n-1} - (n-1)\left(A_1x - \frac{B_2A_1}{A_2 + (2n-4)A_1}\right)y_{n-1} - \\ - (n-1)\left(\frac{A_1B_2^2}{A_2 + (2n-4)A_1} + (A_2 + (2n-4)A_1)C_1\right)y_{n-2} = 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Доказательство. Подставим функцию (24) в выражение для $I_n^{(2)}$. В полученном выражении выделим левые части уравнений (26), (27). Затем, учитывая равенство (25), сгруппируем в нём все элементы при y_{n-1} и y_{n-2}. В результате получим

$$I_n^{(2)} = 2\alpha_1^{(n)}R_n^{(2)}, \quad \alpha_1^{(n)} \neq 0.$$

Пусть функция (24) обращает в нуль выражение $I_n^{(2)}$. Тогда $R_n^{(2)}=0$. Обратно, пусть $R_n^{(2)}= =0$. Тогда $I_n^{(2)}=0$, т.е. функция (24) обращает выражение $I_n^{(2)}$ в нуль. Теорема доказана.

Формулу (28) назовём *формулой дифференцирования ПСФ дифференциального уравнения* (22).

Функция $\rho(x)$, приводящая дифференциальное уравнение (22) к самосопряжённому виду, задана уравнением

$$[(A_1x^2+C_1)\rho(x)]'=(A_2x+B_2)\rho(x),$$

и формула Родрига приводит с точностью до константы к формулам (23).

Пусть $A_1<0$, $C_1>0$ $(A_1C_1<0)$. Тогда $\rho(x)$ становится весовой функцией, определённой на промежутке $(-\sqrt{C_1/-A_1},\sqrt{C_1/-A_1})$, и она равна

$$\rho(x)=(\sqrt{C_1}-\sqrt{-A_1}x)^{-t_1/\sqrt{-A_1}}(\sqrt{C_1}+\sqrt{-A_1}x)^{t_2/\sqrt{-A_1}},$$

$$t_1=\frac{1}{2}((A_2-2A_1)/\sqrt{-A_1}+B_2/\sqrt{C_1}),\quad t_2=\frac{1}{2}(B_2/\sqrt{C_1}-(A_2-2A_1)/\sqrt{-A_1}),$$

при этом нужно потребовать, чтобы $t_1<1$, а $t_2>-1$.

Если $A_1>0$, $C_1>0$ $(A_1C_1>0)$, то $\rho(x)$ уже невесовая функция $((A_1x^2+C_1)\neq 0)$, и ПСФ $y_2(x)$ имеет либо два различных действительных нуля, либо не имеет ни одного действительного нуля. Это следует из того, что дискриминант $(A_2+A_1)(-A_1B_2^2-C_1(A_2+2A_1)^2)$ полинома $y_2(x)$ положителен при $A_2+A_1<0$ или отрицателен при $A_2+A_1>0$.

Пусть $B_2=0$. Тогда из формул (8) следует, что коэффициенты $e_k^{(n)}=0$ для любого нечётного числа k и

$$e_{2s}^{(n)}=\frac{n!C_1^s}{(n-2s)!2^s s!(A_2+(2n-3)A_1)\cdots(A_2+(2n-2s-1)A_1)},$$

и ПСФ уравнения (22) при $B_2=0$ со старшим коэффициентом, равным единице, определяется формулой

$$y_n(x)=x^n+n!\sum_{s=0}^{[n/2]}\frac{C_1^s x^{n-2s}}{(n-2s)!s!2^s(A_2+(2n-3)A_1)\ldots(A_2+(2n-2s-1)A_1)},$$

при этом

$$y_n(x)=xy_{n-1}(x)+\frac{(n-1)(A_2+(n-3)A_1)C_1}{(A_2+(2n-3)A_1)(A_2+(2n-5)A_1)}y_{n-2}(x),\quad n=1,2,\ldots,$$

а формула дифференцирования ПСФ $y_n(x)$

$$(A_1x^2+C_1)y_n'-A_1nxy_n-\frac{n(A_2+(n-2)A_1)C_1}{(A_2+(2n-3)A_1)}y_{n-1}=0.$$

Функция $\rho(x)$, приводящая дифференциальное уравнение (22) при $B_2=0$ к самосопряжённому виду, удовлетворяет уравнению

$$[(A_1x^2+C_1)\rho(x)]'=A_2x\rho(x)$$

и равна

$$\rho(x)=(A_1x^2+C_1)^{A_2/(2A_1-1)}.$$

Если $A_1<0$, $C_1>0$ и $A_2<0$, то она – весовая функция, определённая на промежутке $(-\sqrt{-C_1/A_1},\sqrt{-C_1/A_1})$.

Если $A_1<0$, $C_1>0$ и $A_2+A_1>0$, то $\rho(x)$ – невесовая функция, и ПСФ

$$y_2(x)=(A_2+2A_1)[(A_2+A_1)x^2+C_1]$$

не имеет действительных корней.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Круглов В.Е.* Построение полиномиальных решений одного линейного дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 7. С. 999–1001.
2. *Айнс Э.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1939.
3. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1971.
4. *Никифоров А.Ф., Уваров В.Е.* Специальные функции математической физики. М., 1984.
5. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М., 1962.
6. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. М., 1973.
7. *Круглов В.Е.* Построение фундаментальной системы решений линейного разностного уравнения конечного порядка // Укр. мат. журн. 2009. Т. 61. № 6. С. 777–794.

Одесский национальный университет
имени И.И. Мечникова, Украина

Поступила в редакцию 22.03.2023 г.
После доработки 22.06.2023 г.
Принята к публикации 20.07.2023 г.