ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 9, с. 1181–1190

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.957

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА ГРАФЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

© 2023 г. Р. Ч. Кулаев, А. А. Уртаева

Рассмотрено нелинейное дифференциальное уравнение четвёртого порядка на сети, являющееся моделью системы стержней Эйлера–Бернулли. На основе метода монотонных итераций установлено существование решения краевой задачи на графе для этого уравнения, при этом использовались положительность функции Грина и принцип максимума для соответствующего линейного дифференциального уравнения. Приведён пример, иллюстрирующий полученные результаты.

DOI: 10.31857/S0374064123090030, EDN: WOQOFU

Введение. Теория дифференциальных уравнений на графах возникла в 1980-х гг. Уравнения четвёртого порядка на графах впервые стали рассматривать лишь во второй половине 1990-х гг. Основные результаты в этом направлении были получены для линейных дифференциальных уравнений [1–4]. Что касается нелинейных уравнений на графах, то многие исследования в основном были сосредоточены на вопросах корректности и стабилизации [5, 6]. В статье [7] рассмотрено уравнение типа Ямабе на графах и установлено существование нетривиальных решений с помощью теоремы о горных перевалах Амбросети–Рабиновича. В [8] исследовано асимптотическое поведение задачи переноса на звёздообразных сетях упругих и термоупругих стержней. Имеется много работ, связанных с обратными задачами спектрального анализа, для дифференциальных операторов на произвольных компактных графах (см., например, [9, 10]). Вопросам распределения нулей решений, положительности функции Грина и принципу максимума в задачах четвёртого порядка на графах посвящены работы [11–15].

В данной статье изучен вопрос существования решения краевой задачи на геометрическом графе Γ для нелинейного уравнений четвёртого порядка

$$\frac{d^2}{d\Gamma^2}\left(p(x)\frac{d^2u}{d\Gamma^2}\right) = f(x, u, p(x)u''), \quad x \in \Gamma,$$

$$u|_{\partial\Gamma} = u''|_{\partial\Gamma} = 0. \tag{1}$$

Во внутренних точках рёбер производная $du/d\Gamma$ определяет классическую производную u' по направлению ребра, а в узловых точках графа дифференциальный оператор задаётся наборами условий согласования (как, например, в [11–15]). При изучении дифференциальных операторов четвёртого порядка на графах рассматривают условия согласования в зависимости от способов соединения стержней.

В нелинейном анализе для изучения такого типа задач применяются метод нижних и верхних решений, метод монотонных итераций, теорема Красносельского о неподвижной точке, теорема Лере–Шаудера и теория бифуркаций. На сегодняшний день проведены обширные исследования краевых задач на графе для нелинейных уравнений второго порядка (см., например, [8, 16–18] и приведённую в них библиографию). В частности, в [16] доказано существование решений уравнений теории среднего поля на произвольном связном конечном графе, с помощью вариационных принципов и метода верхних и нижних решений в статье [17] устанавливается существование по крайней мере одного решения уравнения Каздана–Уорнера. Отметим также работу [19], в которой изучены существование и единственность решения нелинейной дробной краевой задачи Капуто на звёздообразном графе.

В статьях [20–22] изучались двухточечные краевые задачи для нелинейных уравнений четвёртого порядка, а в [23–25] – многоточечные задачи. Нелинейные уравнения четвёртого порядка на графах практически не изучались. Здесь можно упомянуть работу [26], в которой для краевой задачи на графе с уравнением четвёртого порядка и условиями шарнирного сочленения получены условия существования неотрицательных решений. Обратим внимание, что в качественной теории уравнений на сетях условия согласования в узлах играют ключевую роль. Даже в линейном случае свойства решений (распределение нулей, положительность, принцип максимума) существенно разнятся для различных условий связи и даже для различных граничных условий [4, 27–31].

В данной работе рассматривается краевая задача для уравнения с так называемыми условиями дельта-типа в узловых вершинах графа [32, разд. 4.3] и условиями шарнирного закрепления на границе графа. Соответствующий дифференциальный оператор допускает факторизацию в виде композиции двух операторов второго порядка, что, в свою очередь, позволяет привлечь свойства оператора Штурма–Лиувилля на графе [11, гл. 4]. Как будет показано, для решений такой краевой задачи справедлив принцип максимума, позволяющий применить технику монотонных итераций. Отметим, что результаты данной статьи обобщают результаты работы [21], полученные для нелинейного уравнения четвёртого порядка на конечном интервале.

В п. 1 статьи даются некоторые определения и необходимая информация о изучаемом дифференциальном уравнении задачи (1). В п. 2 определяется функция Грина для задачи (1) и формулируется принцип максимума, который впоследствии используется для доказательства основного результата. В п. 3 представлен основной результат – теорема существования решения краевой задачи на графе для уравнения четвёртого порядка, и приводится пример задачи, демонстрирующий применимость полученных результатов.

1. Постановка задачи. В данной статье используется терминология и обозначения работ [2, 5]. $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$ обозначает связный и конечный *геометрический граф* без петель с множеством вершин $V(\Gamma)$ и множеством точек $E(\Gamma)$ рёбер графа. *Ребро* графа – это интервал конечной длины, а *вершина* графа – концевая точка одного или нескольких рёбер. Рёбра графа обозначаются γ_i, вершины обозначаются a, b и т.д. Для любой $a \in V(\Gamma)$ через $I(a)$ обозначим множество индексов рёбер, инцидентных вершине a, и через $|I(a)|$ обозначим количество элементов множества $I(a)$. Элементы множеств $J(\Gamma) = \{a \in V(\Gamma) : |I(a)| \geqslant 2\}$ и $\partial\Gamma = \{a \in V(\Gamma) : |I(a)| = 1\}$ называются *внутренними* и *граничными* вершинами соответственно. Через $|\partial\Gamma|$ обозначаем число граничных вершин графа Γ. Предполагаем, что $\Gamma = E(\Gamma) \bigcup J(\Gamma)$. Обратим внимание, что граничные вершины не включены в граф. *Подграфом* графа Γ называется любое непустое связное подмножество Γ, которое попадает под определение графа. Граф, не имеющий циклов, называется *деревом*. Граф-дерево Γ называем *цепочкой*, если $|I(a)| = 2$ для любой вершины $a \in J(\Gamma)$.

Введём функциональные пространства

$$C[\Gamma] = \{u : \Gamma \to \mathbb{R} \mid u \text{ равномерно непрерывна на каждом ребре } \gamma_i \subset E(\Gamma)\},$$

$$C[E(\Gamma)] = \{u : E(\Gamma) \to \mathbb{R} \mid u \text{ равномерно непрерывна на каждом ребре } \gamma_i \subset E(\Gamma)\}.$$

Каждая функция $u \in C[\Gamma]$ (или $C[E(\Gamma)]$) имеет предел $\lim\limits_{\gamma_i \ni x \to a} u_i(x)$, $i \in I(a)$, в каждой вершине $a \in V(\Gamma)$; обозначим его через $u_i(a)$. Обратим внимание, что $u_k(a)$ не обязательно равны $u_i(a)$ или $u(a)$, где $k, i \in I(a)$, $k \neq i$. Пространство непрерывных на графе Γ функций определяется равенством

$$C(\Gamma) = \{u \in C[\Gamma] : u_i(a) = u(a) \text{ для любых } a \in J(\Gamma) \text{ и } i \in I(a)\}.$$

Теперь определим производную функции на графе. Для этого зададим функцию $\mu(x) \in \in C[E(\Gamma)]$, линейно отображающую каждое ребро $\gamma_i \subset E(\Gamma)$ на интервал $(0, l_i) \subset \mathbb{R}$, где l_i – длина γ_i. Положим $u_i'(x) := \lim\limits_{\gamma_i \ni y \to x} (u_i(y) - u_i(x))/(\mu_i(y) - \mu_i(x))$, $x \in \overline{\gamma}_i$. Аналогично определяются производные более высокого порядка.

Через $C^n[\Gamma]$ (или $C^n[E(\Gamma)]$) будем обозначать пространство функций $u(x) \in C[\Gamma]$ (или $C^n[E(\Gamma)]$), производные которых до порядка n включительно существуют и принадлежат пространству $C[E(\Gamma)]$. Для функции $u(x) \in C^n[\Gamma]$ (или $C^n[E(\Gamma)]$) в любой вершине $a \in$ $\in V(\Gamma)$ определено множество производных $u_i^{(j)}(a)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $i \in I(a)$, вдоль рёбер, смежных с a. Производные нечётного порядка зависят от ориентации рёбер. В дальнейшем при записи условий связи с производными в вершинах графа нам будет удобно использовать производные по направлению "от вершины", которые будем обозначать $u_{i\nu}^{(k)}(a)$ (одномерный аналог производных по внутренней нормали). Для чётной производной ориентация не важна, и поэтому, для краткости, вместо $u''_{i\nu}(a)$ пишем $u''_i(a)$.

Под интегралом функции $u \in C[\Gamma]$ вдоль графа Γ понимаем сумму интегралов по рёбрам:

$$\int\limits_{\Gamma} u(x)\,dx = \sum_{\gamma\in E(\Gamma)} \int\limits_{\gamma} u(x)\,dx.$$

Под *дифференциальным уравнением на графе*, следуя [13, 14], понимаем систему дифференциальных уравнений на рёбрах и систему условий согласования во внутренних вершинах. Уравнения на рёбрах имеют вид

$$(p_i(x)u''_i)'' = f_i(x, u_i, p_i(x)u''_i), \quad x \in \gamma_i \in E(\Gamma), \tag{2}$$

где $p(x) \in C^2[E(\Gamma)]$, $\inf\limits_{x\in E(\Gamma)} p(x) > 0$. В каждой вершине $a \in J(\Gamma)$ накладываем следующие условия согласования, характерные для сочленённых стержней (см., например, [12; 33, разд. 4.3] или [3]):

$$u_i(a) = u(a), \quad (p_i u''_i)(a) = (p_k u''_k)(a), \quad i, k \in I(a),$$
$$\sum_{i\in I(a)} u'_{i\nu}(a) = 0, \quad \sum_{i\in I(a)} (p_i u''_i)'_\nu(a) = f(a, u(a), (pu'')(a)), \quad a \in J(\Gamma). \tag{3}$$

Здесь стоит отметить, что из условий для вторых производных следует, что вторая квазипроизводная $p(x)u''(x)$ допускает непрерывное продолжение с $E(\Gamma)$ на весь граф Γ. Поэтому в последнем условии в (3) мы полагаем $(pu'')(a) = (p_i u''_i)(a)$ с произвольным индексом $i \in I(a)$.

Уравнение (2), (3) имеет естественную физическую интерпретацию [3, 12, 32]. Оно моделирует малые деформации балок Эйлера–Бернулли: $u(x)$ обозначает смещение системы из состояния равновесия; эти смещения описываются уравнением (2); первые два равенства в (3) задают локальные условия связи в узлах – перемещения всех соединяемых рёбер непрерывны и изгибающие моменты также непрерывны, третье условие – геометрическое, а последнее – условие динамического равновесия.

Решением дифференциального уравнения (1) называется любая функция $u \in C(\Gamma) \bigcap C^4[\Gamma]$, удовлетворяющая обыкновенному дифференциальному уравнению (2) на каждом ребре графа Γ и условиям согласования (3) в каждой его внутренней вершине $a \in J(\Gamma)$. *Краевая задача на графе* – это система (2), (3) вместе с граничными условиями.

Всюду далее будем считать, что выполнены следующие условия:

1) $p \in C^2[\Gamma]$, $\inf\limits_{x\in\Gamma} p(x) > 0$;

2) $f : \Gamma\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; для любого компакта $\Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ функция f равномерно непрерывна на $E(\Gamma)\times\Omega$ и для любой вершины $a \in J(\Gamma)$ функция $f(a,\cdot,\cdot)$ непрерывна в $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$;

3) $\partial\Gamma \neq \varnothing$.

2. Принцип максимума. Рассмотрим линейный дифференциальный оператор L, соответствующий следующей краевой задаче:

$$(p_i(x)u''_i)'' = h_i(x), \quad x \in \gamma_i \in E(\Gamma),$$

$$u_i(a) = u(a), \quad i \in I(a), \quad p_i(a)u''_i(a) = p_k(a)u''_k(a), \quad i, k \in I(a),$$

$$\sum_{i\in I(a)} u'_{i\nu}(a)=0, \quad \sum_{i\in I(a)} (p_i u''_i)'_\nu(a)=h(a), \quad a\in J(\Gamma),$$

где $h\in C[\Gamma]$.

Имея своей целью сформулировать принцип максимума для однородного дифференциального уравнения $Lu=0$, $x\in\Gamma$, покажем сначала, что оператор L с граничными условиями $u|_{\partial\Gamma}=u''|_{\partial\Gamma}=0$ положительно обратим. Точнее, покажем, что функция Грина $G(x,s)$ соответствующего оператора L строго положительна на $\Gamma\times\Gamma$.

Лемма 1. *Для любой функции $h\in C[\Gamma]$ краевая задача*

$$Lu=h(x), \quad x\in\Gamma, \quad u|_{\partial\Gamma}=u''|_{\partial\Gamma}=0 \tag{4}$$

однозначно разрешима.

Доказательство. Очевидно, что задача (4) является однозначно разрешимой тогда и только тогда, когда соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение.

Пусть u – некоторое решение однородной задачи (4). Умножим функцию u на Lu и проинтегрируем полученное выражение по всему графу Γ. Дважды интегрируя по частям, получаем

$$0=\int\limits_\Gamma u\,Lu\,dx=\int\limits_\Gamma p(x)[u''(x)]^2\,dx+$$

$$+\sum_{a\in J(\Gamma)}\sum_{i\in I(a)}[(p_iu''_i)u'_{i\nu}-(p_iu''_i)'_\nu u_i]_{x=a}+\sum_{a\in\partial\Gamma}[(pu'')u'_\nu-(pu'')'_\nu u]_{x=a}.$$

Использовав условия согласования в вершине $a\in V(\Gamma)$, имеем

$$0=\int\limits_\Gamma p(x)[u''(x)]^2\,dx+\sum_{a\in J(\Gamma)}p(a)u''(a)\sum_{i\in I(a)}u'_{i\nu}(a)-$$

$$-\sum_{a\in J(\Gamma)}u(a)\sum_{i\in I(a)}(p_iu''_i)'_\nu(a)=\int\limits_\Gamma p(x)[u''(x)]^2\,dx.$$

Из условия $\inf\limits_{x\in\Gamma}p(x)>0$ следует, что $u''=0$ на Γ, т.е. u – линейная функция на каждом ребре графа. Из равенства $u|_{\partial\Gamma}=0$ заключаем, что существует внутренняя вершина $a_0\in J(\Gamma)$ такая, что $\max\limits_{x\in\Gamma}|u(x)|=|u(a_0)|$. Без потери общности можно считать, что $u(a_0)\geqslant 0$. Тогда $u'_{i\nu}(a_0)\leqslant 0$ для всех $i\in I(a_0)$. Но $\sum_{i\in I(a_0)}u'_{i\nu}(a_0)=0$. Следовательно, $u_i(x)\equiv\mathrm{const}\geqslant 0$ для всех $i\in I(a_0)$. Теперь легко видеть, что $u(x)\equiv\mathrm{const}\geqslant 0$ на Γ. Поскольку $u|_{\partial\Gamma}=0$, то $u(x)\equiv 0$ на графе Γ. Лемма доказана.

Из леммы 1 следует, что функция Грина оператора L существует. Более того, $G(x,s)$ обладает следующими свойствами (см. [11, 14]).

1. Функция $G(x,s)$ и её производные по x до четвёртого порядка включительно непрерывны вплоть до границы на каждом из прямоугольников $\gamma_i\times\gamma_j$, $i\neq j$, и на каждом из треугольников, на которые квадрат $\gamma_i\times\gamma_i$ разбит диагональю $x=s$.

2. На диагонали $x=s$, $s\in\gamma\in E(\Gamma)$, третья квазипроизводная $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}G(x,s)\right)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial^2}{\partial x^2}G\right)(s+0,s)-\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial^2}{\partial x^2}G\right)(s-0,s)=1,$$

где ориентация предельного перехода $s\pm0$ и направление дифференцирования задаются метрической функцией, заданной на графе.

3. Для каждого $s\in\gamma\in E(\Gamma)$ функция $G(\,\cdot\,,s)$ является решением однородного уравнения $LG=0$ на $\Gamma\setminus\{s\}$ и обращается в нуль на $\partial\Gamma$.

4. Для каждой вершины $a \in J(\Gamma)$ функция $G(\,\cdot\,, a)$ является решением краевой задачи

$$LG = h(x), \quad x \in \Gamma, \quad G(\,\cdot\,, a)|_{\partial\Gamma} = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(\,\cdot\,, a)\bigg|_{\partial\Gamma} = 0,$$

где $h(x) = 0$ для $x \in \Gamma \setminus \{a\}$ и $h(a) = 1$.

5. Решение задачи (4) можно представить в виде

$$u(x) = \int\limits_{\Gamma} G(x,s)h(s)\,ds + \sum_{a\in J(\Gamma)} G(x,a)h(a). \tag{5}$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение $\mathcal{L}u = h(x)$, порождённое следующими выражениями:

$$u_i'' = h_i(x), \quad x \in \gamma_i \in E(\Gamma),$$

$$u_i(a) = u(a), \quad \sum_{i\in I(a)} u_{i\nu}'(a) = h(a), \quad a \in J(\Gamma), \quad i \in I(a).$$

Далее нам потребуются следующие результаты.

Теорема 1 [12]. *Краевая задача*

$$\mathcal{L}u = h(x), \quad x \in \Gamma, \quad u|_{\partial\Gamma} = 0 \tag{6}$$

однозначно разрешима для любой правой части $h \in C[\Gamma]$. *Если* $\mathcal{G}(x,s)$ – *соответствующая функция Грина, то*

(i) $\mathcal{G}(x,s) < 0$ *на* $\Gamma \times \Gamma$;

(ii) решение задачи (6) даётся формулой

$$u(x) = \int\limits_{\Gamma} \mathcal{G}(x,s)h(s)\,ds + \sum_{a\in J(\Gamma)} \mathcal{G}(x,a)h(a).$$

Лемма 2 [12]. *Всякое нетривиальное решение краевой задачи*

$$\mathcal{L}u = 0, \quad u|_{\partial\Gamma} \geqslant 0 \tag{7}$$

положительно на Γ.

Теорема 2. *Пусть* $G(x,s)$ – *функция Грина краевой задачи (4), а* $\mathcal{G}(s,x)$ – *функция Грина задачи (6). Тогда* $G(x,s) > 0$ *на* $\Gamma \times \Gamma$ *и выполнено равенство*

$$G(x,s) = \int\limits_{\Gamma} \mathcal{G}(x,\xi)\mathcal{G}(\xi,s)\,\frac{d\xi}{p(\xi)}.$$

Доказательство. Рассмотрим краевую задачу

$$\mathcal{L}w = h(x), \quad x \in \Gamma, \quad w|_{\partial\Gamma} = 0. \tag{8}$$

Из определения функции Грина следует, что решение $w(x)$ задачи (8) может быть представлено в виде

$$w(x) = \int\limits_{\Gamma} \mathcal{G}(x,s)h(s)\,ds + \sum_{a\in J(\Gamma)} \mathcal{G}(x,a)h(a). \tag{9}$$

Введём функцию

$$u(x) = \int\limits_{\Gamma} \mathcal{G}(x,\xi)\frac{w(\xi)}{p(\xi)}\,d\xi. \tag{10}$$

Используя равенства (9) и (7), получаем

$$u(x)=\int\limits_{\Gamma}\mathcal{G}(x,\xi)\int\limits_{\Gamma}\mathcal{G}(\xi,s)h(s)\,ds\,\frac{d\xi}{p(\xi)}+\sum_{a\in J(\Gamma)}\int\limits_{\Gamma}\mathcal{G}(x,\xi)\mathcal{G}(\xi,a)\,\frac{d\xi}{p(\xi)}h(a)=$$

$$=\int\limits_{\Gamma}\int\limits_{\Gamma}\mathcal{G}(x,\xi)\mathcal{G}(s,\xi)\frac{d\xi}{p(\xi)}h(s)\,ds+\sum_{a\in J(\Gamma)}\int\limits_{\Gamma}\mathcal{G}(x,\xi)\mathcal{G}(\xi,a)\,\frac{d\xi}{p(\xi)}h(a)=$$

$$=\int\limits_{\Gamma}G(x,s)h(s)\,ds+\sum_{a\in J(\Gamma)}G(x,a)h(a).$$

Для завершения доказательства остаётся показать, что функция $u(x)$ удовлетворяет (2), (3) и граничным условиям

$$u|_{\partial\Gamma}=u''|_{\partial\Gamma}=0.$$

Из теоремы 1 и (10) делаем вывод, что $u(x)$ является решением задачи

$$u_i''=\frac{w_i(x)}{p_i(x)},\quad x\in\gamma_i\subset E(\Gamma),$$

$$u_i(a)=u(a),\quad \sum_{i\in I(a)}u_{i\nu}'(a)=0,\quad a\in J(\Gamma),\quad i\in I(a),$$

$$u(b)=0,\quad b\in\partial\Gamma.$$

Из равенств $p(x)u(x)''=w(x)$, (9) и теоремы 1 следует, что

$$(p_i(x)u_i'')''=h_i(x),\quad x\in\gamma_i\subset E(\Gamma),$$

$$p_i(a)u_i''(a)=p_k(a)u_k''(a),\quad i,k\in I(a),\quad \sum_{i\in I(a)}(p_iu_i'')_\nu'(a)=h(a),\quad a\in J(\Gamma),$$

$$u''(b)=0,\quad b\in\partial\Gamma.$$

Наконец, неравенство $G(x,s)>0$ следует из утверждения (i) теоремы 1. Теорема доказана.

Следствие. *Дифференциальный оператор L можно представить в виде композиции двух операторов второго порядка $\mathcal{L}\circ(p\mathcal{L})$.*

Лемма 3. *Пусть $u(x)\in C(\Gamma)\bigcap C^4[\Gamma]$ – решение краевой задачи*

$$Lu=0,\quad u|_{\partial\Gamma}\geqslant 0,\quad u''|_{\partial\Gamma}=0.$$

Тогда $u(x)\geqslant 0$ на Γ.

Доказательство. Пусть $v=u''$. Тогда v – решение задачи

$$\mathcal{L}v=0,\quad v|_{\partial\Gamma}=0.$$

Из теоремы 1 следует, что $v\equiv 0$ на Γ. Применив следствие и лемму 2, получим, что $u\geqslant 0$ на Γ. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $u(x)\in C(\Gamma)\bigcap C^4[\Gamma]$ – решение краевой задачи*

$$Lu=0,\quad u|_{\partial\Gamma}=0,\quad u''|_{\partial\Gamma}\leqslant 0.$$

Тогда $u(x)\geqslant 0$ на Γ.

Доказательство. Пусть $v=u''$. Поскольку v – решение задачи

$$\mathcal{L}v=0,\quad v|_{\partial\Gamma}\leqslant 0,$$

из леммы 2 следует, что $v \leqslant 0$ на Γ. Ввиду следствия 1 и теоремы 1 получаем, что $u \geqslant 0$ на Γ. Лемма доказана.

Теперь из лемм 3, 4 следует принцип максимума.

Теорема 3. *Всякое нетривиальное решение краевой задачи*

$$Lu \geqslant 0, \quad u|_{\partial\Gamma} \geqslant 0, \quad u''|_{\partial\Gamma} \leqslant 0$$

положительно на графе Γ.

3. Существование решения. Далее методом монотонных итераций установим существование решения краевой задачи (1).

Определение 1. Функция $\alpha \in C^4[\Gamma]$ называется *нижним решением* задачи (1), если

$$L\alpha \leqslant f(x, \alpha, p\alpha''), \quad x \in \Gamma, \quad \alpha|_{\partial\Gamma} \leqslant 0, \quad \alpha''|_{\partial\Gamma} \geqslant 0.$$

Определение 2. Функция $\beta \in C^4[\Gamma]$ называется *верхним решением* задачи (1), если

$$L\beta \geqslant f(x, \beta, p\beta''), \quad x \in \Gamma, \quad \beta|_{\partial\Gamma} \geqslant 0, \quad \beta''|_{\partial\Gamma} \leqslant 0.$$

Введём в пространстве $C(\Gamma)$ отношение частичного порядка и рассмотрим некоторый порядковый отрезок $[\alpha, \beta]$ в $C(\Gamma)$. Решение u задачи (1) называем *минимальным* (или *максимальным*) решением задачи (1) в порядковом промежутке $[\alpha, \beta]$, если $u(x) \leqslant v(x)$ (или $v(x) \leqslant u(x)$) на Γ для любого решения $v \in [\alpha, \beta]$ краевой задачи (1).

В следующей теореме устанавливается существование экстремальных решений задачи (1).

Теорема 4. *Пусть выполнены следующие условия:*

(i) существуют нижнее α и верхнее β решения задачи (1), удовлетворяющие условиям

$$\alpha(x) \leqslant \beta(x) \ \ \text{для всех} \ \ x \in \Gamma, \quad \beta''(x) \leqslant \alpha''(x) \ \ \text{для всех} \ \ x \in E(\Gamma);$$

(ii) функция f удовлетворяет условиям

$$f(x, s, v) - f(x, t, v) \leqslant 0 \ \ \text{для} \ \ \alpha(x) \leqslant s \leqslant t \leqslant \beta(x), \quad v \in \mathbb{R}, \quad x \in \Gamma,$$

$$f(x, u, s) - f(x, u, t) \geqslant 0 \ \ \text{для} \ \ \beta''(x) \leqslant s \leqslant t \leqslant \alpha''(x), \quad u \in \mathbb{R}, \quad x \in \Gamma.$$

Тогда существуют две монотонные последовательности: неубывающая $\{\alpha_{[k]}\}_{k=0}^{\infty}$ и невозрастающая $\{\beta_{[k]}\}_{k=0}^{\infty}$, $\alpha_{[0]} = \alpha$ и $\beta_{[0]} = \beta$, которые сходятся равномерно к экстремальным решениям задачи (1) из порядкового отрезка $[\alpha, \beta]$.

Доказательство. Пусть $F = \{u \in C(\Gamma) \bigcap C^2[\Gamma] : pu'' \in C(\Gamma)\}$. Для любой функции $\eta \in F$ рассмотрим краевую задачу

$$Lu = f(x, \eta, p\eta''), \quad x \in \Gamma, \quad u|_{\partial\Gamma} = u''|_{\partial\Gamma} = 0. \tag{11}$$

Из леммы 1 следует, что задача (11) имеет единственное решение u. Обозначим через $G : F \to C^4[\Gamma]$ интегральный оператор, обращающий краевую задачу (11). Тогда $u = G\eta$.

Дальнейшее доказательство разобьем на три шага.

Шаг 1. Покажем, что $GF_1 \subseteq F_1$, где $F_1 = \{\eta \in F : \alpha \leqslant \eta \leqslant \beta, \ \beta'' \leqslant \eta'' \leqslant \alpha''\}$.

Зафиксируем $\zeta \in F_1$ и положим $w = G\zeta$. Из определений решений α и β следует

$$L(w - \alpha) \geqslant f(x, \zeta, p\zeta'') - f(x, \alpha, p\alpha'') \geqslant 0, \quad x \in \Gamma,$$

$$(w - \alpha)|_{\partial\Gamma} \geqslant 0, \quad (w - \alpha)''|_{\partial\Gamma} \leqslant 0.$$

Используя теорему 3, получаем $w - \alpha \geqslant 0$ на Γ.

Аналогично можно показать, что $\beta - w \geqslant 0$ на Γ.

Положим теперь $z = p(w - \alpha)''$. Тогда $\mathcal{L}z \geqslant 0$, $z|_{\partial\Gamma} \leqslant 0$. Из теоремы 1 и леммы 2 следует, что $z \leqslant 0$ на графе Γ. Следовательно, $w'' \leqslant \alpha''$ на графе Γ.

Аналогично можно доказать, что $\beta'' \leqslant w''$ на Γ. Таким образом, $G\zeta \in F_1$.

Шаг 2. Рассмотрим пару функций $\eta_{[1]}, \eta_{[2]} \in F_1$ таких, что $\alpha \leqslant \eta_{[1]} \leqslant \eta_{[2]} \leqslant \beta$ и $\beta'' \leqslant \eta''_{[2]} \leqslant \eta''_{[1]} \leqslant \alpha''$. Пусть $u_{[1]} = G\eta_{[1]}$, $u_{[2]} = G\eta_{[2]}$. Покажем, что $u_{[1]} \leqslant u_{[2]}$ и $u''_{[2]} \leqslant u''_{[1]}$. Действительно,

$$L(u_{[2]} - u_{[1]}) \geqslant f(x, \eta_{[2]}, p\eta''_{[2]}) - f(x, \eta_{[1]}, p\eta''_{[1]}) \geqslant 0, \quad x \in \Gamma,$$

$$(u_{[2]} - u_{[1]})|_{\partial\Gamma} = (u_{[2]} - u_{[1]})''|_{\partial\Gamma} = 0.$$

Используя теорему 2, получаем, что $u_{[1]} \leqslant u_{[2]}$ на Γ.

Положив $v = p(u_{[2]} - u_{[1]})''$, имеем

$$\mathcal{L}v \geqslant 0, \quad v|_{\partial\Gamma} = 0.$$

Теперь из теоремы 1 следует, что $u''_{[2]} \leqslant u''_{[1]}$ на Γ.

Шаг 3. Определим две рекуррентные последовательности:

$$\alpha_{[0]} = \alpha, \quad \alpha_{[k+1]} = G\alpha_{[k]}, \quad \beta_{[0]} = \beta, \quad \beta_{[k+1]} = G\beta_{[k]}, \quad k \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}.$$

Из результатов, полученных на предыдущих шагах, следует, что при любом $k \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства

$$\alpha = \alpha_{[0]} \leqslant \alpha_{[1]} \leqslant \ldots \leqslant \alpha_{[k]} \leqslant \beta_{[k]} \leqslant \ldots \leqslant \beta_{[1]} \leqslant \beta_{[0]} = \beta,$$

$$\beta'' = \beta''_{[0]} \leqslant \beta''_{[1]} \leqslant \ldots \leqslant \beta''_{[k]} \leqslant \alpha''_{[k]} \leqslant \ldots \leqslant \alpha''_{[1]} \leqslant \alpha''_{[0]} = \alpha''.$$

С учётом свойств функции Грина задачи (4) (см. п. 2) имеем

$$\alpha^{(j)}_{[k+1]}(x) = \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial^j G}{\partial x^j}(x,s) f(s, \alpha_{[k]}(s), (p\alpha''_{[k]})(s))\, ds + \sum_{a \in J(\Gamma)} \frac{\partial^j G}{\partial x^j}(x,a) f(a, \alpha_{[k]}(a), (p\alpha''_{[k]})(a))$$

при $0 \leqslant j \leqslant 3$. Более того, если

$$M = \sup_{\Pi} |f(x,u,v)|,$$

$$\Pi = \{(x,u,v) : x \in \Gamma, \ \ \inf_{x\in\Gamma} \alpha(x) \leqslant u \leqslant \sup_{x\in\Gamma} \beta(x), \ \ \inf_{x\in\Gamma} (p\beta'')(x) \leqslant v \leqslant \sup_{x\in\Gamma} (p\alpha'')(x)\},$$

то

$$|\alpha^{(j)}_{[k+1]}(x)| \leqslant M \int\limits_{\Gamma} \left|\frac{\partial^j G}{\partial x^j}(x,s)\right| ds + M \sum_{a\in J(\Gamma)} \left|\frac{\partial^j G}{\partial x^j}(x,a)\right| \leqslant C,$$

где константа C не зависит от k и j.

Теперь, учитывая тот факт, что обе последовательности $\{\alpha_{[k]}\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\beta_{[k]}\}_{k=0}^{\infty}$ ограничены в $C^3[\Gamma]$, получаем, что $\alpha_{[k]} \rightrightarrows \alpha_*$ и $\beta_{[k]} \rightrightarrows \beta^*$ на Γ, где α_* и β^* – решения задачи (1) на Γ. Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим планарный граф $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, состоящий из трёх рёбер $\gamma_i = (a_i, b)$, $i = 1,2,3$, с общим концом b (внутренняя вершина графа). Будем считать, что все рёбра направлены к внутренней вершине, длины γ_i всех рёбер равны 1. Пусть $\mu(x)$ – метрическая функция на графе (см. п. 1), тогда $\mu_i : (a_i, b) \to (0,1)$, $\mu(a_i) = 0$ и $\mu_i(b) = 1$.

На графе Γ рассмотрим краевую задачу (1) с коэффициентными функциями

$$p(x) = \begin{cases} 3, & x \in \gamma_1, \\ 3, & x \in \gamma_2, \\ 3/4, & x \in \gamma_3, \end{cases} \qquad f(x, u, p(x)u'') = \begin{cases} u_1^3 - \left(\dfrac{9u_1''}{\pi^2}\right)^5 + \sin\dfrac{\pi\mu_1(x)}{3}, & x \in \gamma_1, \\ u_2^3 - \left(\dfrac{9u_2''}{\pi^2}\right)^5 + \sin\dfrac{\pi\mu_2(x)}{3}, & x \in \gamma_2, \\ u_3^3 - \left(\dfrac{9u_3''}{4\pi^2}\right)^5 + \sin\dfrac{2\pi\mu_3(x)}{3}, & x \in \gamma_3, \\ 0, & x = b. \end{cases}$$

Тогда равенства (2), (3) примут вид

$$3u_i^{(IV)} = u_i^3 - \left(\frac{9u_i''}{\pi^2}\right)^5 + \sin\frac{\pi\mu_i(x)}{3}, \quad x \in \gamma_1 \bigcup \gamma_2,$$

$$\frac{3}{4}u_3^{(IV)} = u_3^3 - \left(\frac{9u_3''}{4\pi^2}\right)^5 + \sin\frac{2\pi\mu_3(x)}{3}, \quad x \in \gamma_3,$$

$$u \in C(\Gamma), \quad u_1''(b) = u_2''(b) = \frac{1}{4}u_3''(b),$$

$$u_{1\nu}'(b) + u_{2\nu}'(b) + u_{3\nu}'(b) = 0, \quad u_{1\nu}'''(b) + u_{2\nu}'''(b) + \frac{1}{4}u_{3\nu}'''(b) = 0,$$

$$u(a_i) = u''(a_i) = 0. \tag{12}$$

Легко проверить, что функции

$$\alpha(x) \equiv 0 \quad \text{и} \quad \beta(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{\pi\mu_1(x)}{3}, & x \in \gamma_1, \\ \sin\dfrac{\pi\mu_2(x)}{3}, & x \in \gamma_2, \\ \sin\dfrac{2\pi\mu_3(x)}{3}, & x \in \gamma_3, \\ \sqrt{3}/2, & x = b, \end{cases}$$

являются верхним и нижним решениями задачи (12) соответственно. Очевидно, что все условия теоремы 3 выполнены. Таким образом, задача (12) имеет хотя бы одно решение $u(x)$, удовлетворяющее неравенствам $0 \leqslant u(x) \leqslant \beta(x)$, $x \in \Gamma$. Очевидно, что $u \not\equiv 0$ на Γ. А поскольку $\beta''(x) \leqslant u''(x) \leqslant 0$, то $f(x, u, pu'') \geqslant 0$ на Γ и $f(x, u, pu'') \not\equiv 0$, и в силу формулы (5) и теоремы 2 получаем, что $u(x) > 0$, $x \in \Gamma$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации по соглашению № 075-02-2023-939.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боровских А.В., Мустафокулов Р., Лазарев К.П., Покорный Ю.В.* Об одном классе дифференциальных уравнений четвёртого порядка на пространственной сети // Докл. РАН. 1995. Т. 345. № 6. С. 730–732.
2. *Borovskikh A.V., Lazarev K.P.* Fourth-order differential equations on geometric graphs // J. of Math. Sci. 2004. V. 119. № 6. P. 719–738.
3. *Dekoninck B., Nicase S.* The eigenvalue problem for network of beams, in generalized functions // Linear Algebra Appl. 2000. V. 314. № 1–3. P. 165–189.
4. *Покорный Ю.В., Мустафокулов Р.* О положительности функции Грина линейных краевых задач для уравнений четвёртого порядка на графе // Изв. вузов. Математика. 1999. № 2. С. 75–82.
5. *Ammari K., Bchatnia A., Mehenaoui N.* Exponential stability for the nonlinear Schródinger equation on a star-shaped network // Z. Angew. Math. Phys. 2021. Bd. 72. S. 1–19.
6. *Cerpa E., Crepeau E., Moreno C.* On the boundary controllability of the Korteweg-de Vries equation on a star-shaped network // IMA J. of Math. Control and Inf. 2020. V. 37. № 1. P. 226–240.
7. *Grigor'yan A., Lin Y., Yang Y.* Existence of positive solutions to some nonlinear equations on locally finite graphs // Sci. China Math. 2017. V. 60. P. 1311–1324.
8. *Han Zh-J., Zuazua E.* Decay rates for elastic-thermoelastic star-shaped networks // Networks and Heterogeneous Media. 2017. V. 12. № 3. P. 461–488.
9. *Bondarenko N.P.* A partial inverse Sturm–Liouville problem on an arbitrary graph // Math. Meth. Appl. Sci. 2021. V. 44. № 8. P. 6896–6910.
10. *Юрко В.А.* Обратные спектральные задачи для дифференциальных операторов на пространственных сетях // Успехи мат. наук. 2016. Т. 71. № 3 (429) С. 149–196.

11. *Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М., 2007.
12. *Кулаев Р.Ч.* О функции Грина краевой задачи на графе-пучке // Изв. вузов. Математика. 2013. № 2. С. 56–66.
13. *Кулаев Р.Ч.* Неосцилляция уравнения четвёртого порядка на графе // Мат. сб. 2015. Т. 206. № 12. С. 79–118.
14. *Кулаев Р.Ч.* Об осцилляционности функции Грина многоточечной краевой задачи для уравнения четвёртого порядка // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 4. С. 445–458.
15. *Kulaev R.Ch.* The qualitative theory of fourth-order differential equations on a graph // Mediterr. J. Math. 2022. V. 19. Art. 73.
16. *Huang A., Lin Y., Yau H.* Existence of solutions to mean field equations on graphs // Comm. in Math. Phys. 2019. V. 377. P. 613–621.
17. *Ge H.* Kazdan–Warner equation on graph in the negative case // J. Math. Anal. Appl. 2017. V. 453. № 2. P. 1022–1027.
18. *Lin Y., Wu Y.* Blow-up problems for nonlinear parabolic equations on locally finite graphs // Acta Math. Scientia. 2018. V. 38. № 3. P. 843–856.
19. *Mehandiratta V., Mehra M., Leugering G.* Existence and uniqueness results for a nonlinear Caputo fractional boundary value problem on a star graph // J. Math. Anal. Appl. 2019. V. 477. № 2. P. 1243–1264.
20. *Harjani J., Sadarangani K.* Existence and uniqueness of positive solutions for a nonlinear fourth-order boundary value problem // Positivity. 2010. V. 14. P. 849–858.
21. *Ma R., Zhang J., Fu Sh.* The method of lower and upper solutions for fourth-order two-point boundary value problems // J. Math. Anal. Appl. 1997. V. 215. № 1. P. 415–422.
22. *Song W., Gao W.* A fourth-order boundary value problem with one-sided Nagumo condition // Bound. Value Probl. 2011. Art. 569191.
23. *Graef J.R., Qian Ch., Yang B.* A three point boundary value problem for nonlinear fourth order differential equations // J. Math. Anal. Appl. 2003. V. 187. № 1. P. 217–233.
24. *Wei Z., Pang C.* Positive solutions and multiplicity of fourth-order m-point boundary value problems with two parameters // Nonlin. Anal. 2007. V. 67. № 5. P. 1586–1598.
25. *Zhang Q., Chen S., Lú J.* Upper and lower solution method for fourth-order four-point boundary value problems // J. Comput. Appl. Math. 2006. V. 196. № 2. P. 387–393.
26. *Мустафокулов Р.* Положительные решения нелинейных краевых задач для уравнения четвертого порядка на графе // Докл. НАН Таджикистана. 1999. Т. 42. № 3. С. 40–46.
27. *Кулаев Р.Ч.* О свойстве неосцилляции уравнения на графе // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57. № 1. С. 85–97.
28. *Кулаев Р.Ч.* Критерий положительности функции Грина многоточечной краевой задачи для уравнения четвёртого порядка // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 2. С. 161–173.
29. *Кулаев Р.Ч., Уртаева А.А.* Теоремы Штурма о распределении нулей для уравнения четвертого порядка на графе // Мат. заметки. 2022. Т. 112. № 6. С. 977–981.
30. *Kulaev R.Ch., Urtaeva A.A.* Spectral properties of a fourth-order differential operator on a network // Math. Meth. Appl. Sci. 2023. P. 1–21.
31. *Li Y., Gao Y.* Existence and uniqueness results for the bending elastic beam equations // Appl. Math. Lett. 2019. V. 95. P. 72–77.
32. *Xu G.Q., Mastorakis N.E.* Differential Equations on Metric Graph. WSEAS Press, 2010.

Южный математический институт –
филиал Владикавказского научного центра РАН,
Северо-Осетинский государственный университет
имени К.Л. Хетагурова, г. Владикавказ

Поступила в редакцию 20.04.2023 г.
После доработки 21.07.2023 г.
Принята к публикации 21.08.2023 г.