ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 9, с. 1191–1198

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.911.5+517.927

АППРОКСИМАЦИЯ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С РАЗРЫВНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

© 2023 г. Д. К. Потапов

Рассматривается непрерывная аппроксимация задачи Штурма–Лиувилля с разрывной по фазовой переменной нелинейностью. Аппроксимирующая задача получается из исходной малыми возмущениями спектрального параметра и аппроксимацией нелинейности каратеодориевыми функциями. Вариационным методом доказывается теорема о близости решений аппроксимирующей и исходной задач. Полученная теорема применяется к одномерным моделям Гольдштика и Лаврентьева об отрывных течениях.

DOI: 10.31857/S0374064123090042, EDN: WORAIG

Введение. Проблема исследования вопроса близости решений аппроксимирующей задачи с непрерывной нелинейностью и решений исходной задачи с разрывной нелинейностью была поставлена в работе [1] и, безусловно, является актуальной. Для эллиптических краевых задач с разрывными нелинейностями данная проблема изучалась в статьях [2–4]. Аппроксимация основных краевых задач для уравнений эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной по фазовой переменной нелинейностью исследовалась в работах [5–8]. Аппроксимация задачи с разрывной нелинейностью последовательностью задач с непрерывной нелинейностью для оператора Лапласа на конкретных примерах склейки вихревых и потенциальных течений рассматривалась в [9]. Непрерывным аппроксимациям задачи Гольдштика об отрывных течениях несжимаемой жидкости посвящены статьи [10, 11]. В данной работе, являющейся продолжением этих исследований, рассматриваются непрерывные аппроксимации задачи Штурма–Лиувилля с разрывной по фазовой переменной нелинейностью.

Проблема существования решений задачи Штурма–Лиувилля с разрывной нелинейностью изучалась в работах [12–18], а обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с разрывными правыми частями исследовались в [19–28].

В отличие от работ [2–4], в данной статье изучаемые задачи содержат спектральный параметр, в работах [3, 4] рассматривался другой вид аппроксимаций нелинейности. Кроме того, в отличие от работ [2–10], рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями, а не уравнения с частными производными. По сравнению с работами [12–14, 17] в данной статье ослабляются ограничения на множество точек разрыва нелинейности, изучаются полуправильные решения, исследуется проблема близости решений аппроксимирующей и исходной задач.

1. Постановка задачи. Определения и обозначения. Пусть $-\infty < a < b < +\infty$, кривые $S_i = \{(x,u) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b], u = \varphi_i(x)\}$, $\varphi_i \in W_q^2((a,b))$, $q > 1$, $i = \overline{1,m}$, попарно не пересекаются. Будем считать, что $\varphi_i(x) < \varphi_{i+1}(x)$ для любого $x \in [a,b]$ и $i = \overline{1,m-1}$. Существует число $d > 0$ такое, что для любого $x \in [a,b]$ отрезки $[\varphi_i(x)-d, \varphi_i(x)+d]$, $i = \overline{1,m}$, попарно не пересекаются.

Кривые S_i, $i = \overline{1,m}$, разбивают область $D = (a,b) \times \mathbb{R}$ на непересекающиеся подобласти $D_0 = \{(x,u) \in D : u < \varphi_1(x)\}$, $D_i = \{(x,u) \in D : \varphi_i(x) < u < \varphi_{i+1}(x)\}$, $i = \overline{1,m-1}$, $D_m = \{(x,u) \in D : u > \varphi_m(x)\}$.

На множествах $\overline{D_i}$ заданы каратеодориевы функции $g_i(x,u)$ такие, что для почти всех (п.в.) $x \in (a,b)$ и любого u верны неравенства

$$|g_i(x,u)| \leqslant \alpha(x), \quad (x,u) \in \overline{D_i}, \tag{1}$$

где $\alpha \in L_q((a,b))$, $q > 1$, $i = \overline{0,m}$.

Функция $g:(a,b)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ суперпозиционно измерима и на D_i совпадает с $g_i(x,u)$, причём для п.в. $x\in(a,b)$, если $(x,u)\in S_i$, $g(x,u)$ принадлежит отрезку с концами $g_{i-1}(x,u)$ и $g_i(x,u)$, $i=\overline{1,m}$. Будем предполагать, что для п.в. $x\in(a,b)$ справедливо равенство

$$g(x,0)=0 \tag{2}$$

и

$$g_{i-1}(x,u)\leqslant g_i(x,u), \quad \text{если} \quad (x,u)\in S_i, \quad i=\overline{1,m}. \tag{3}$$

Зафиксируем последовательность положительных чисел $\{\delta_k\}$, сходящуюся к нулю и ограниченную сверху определённым выше числом d.

Нелинейность $g(x,u)$ аппроксимируется последовательностью каратеодориевых функций $\{g^k(x,u)\}$ таких, что для п.в. $x\in(a,b)$ выполняются следующие условия:

(i) $g^k(x,u)=g(x,u)$, если $|u-\varphi_i(x)|>\delta_k$ для любого $i=\overline{1,m}$;

(ii) для любого $u\in\mathbb{R}$

$$|g^k(x,u)|\leqslant\alpha(x), \tag{4}$$

где функция α из оценки (1).

Исходная задача Штурма–Лиувилля с разрывной по фазовой переменной u нелинейностью $g(x,u)$ имеет вид

$$Lu(x)=\lambda g(x,u(x)), \quad x\in(a,b), \tag{5}$$

$$u(a)=u(b)=0. \tag{6}$$

Здесь $Lu(x)\equiv-(p(x)u'(x))'+q(x)u(x)$ – дифференциальный оператор с коэффициентами $p\in C_{1,\beta}([a,b])$, $q\in C_{0,\beta}([a,b])$, $0<\beta\leqslant 1$, λ – положительный параметр.

Нам потребуются следующие определения.

Определение 1. *Сильным решением* задачи (5), (6) называется функция $u\in W_q^2((a,b))$, $q>1$, удовлетворяющая для п.в. $x\in(a,b)$ уравнению (5) и граничным условиям (6).

Определение 2. *Полуправильным решением* задачи (5), (6) называется такое сильное её решение u, значение которого $u(x)$ для п.в. $x\in(a,b)$ является точкой непрерывности функции $g(x,\cdot)$.

Определение 3. *Прыгающим разрывом* функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ называется такое $u\in\mathbb{R}$, что $f(u-)<f(u+)$, где $f(u\pm)=\lim\limits_{s\to u\pm}f(s)$.

Отметим, что в силу равенства (2) функция, почти всюду на интервале (a,b) равная нулю, является сильным решением задачи (5), (6), а из неравенства (3) следует, что для п.в. $x\in(a,b)$ точки разрыва функции $g(x,\cdot)$ прыгающие.

Пусть $X=H_\circ^1((a,b))$. С задачей (5), (6) свяжем функционал J^λ, определённый на функциональном пространстве X, следующим образом: $J^\lambda(u)=J_1(u)-\lambda J_2(u)$, где

$$J_1(u)=\frac{1}{2}\int\limits_a^b p(x)(u'(x))^2\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_a^b q(x)u^2(x)\,dx, \quad J_2(u)=\int\limits_a^b dx\int\limits_0^{u(x)} g(x,s)\,ds.$$

Будем предполагать, что выполнено условие

(iii) найдётся $\hat u\in X$, для которого $J_2(\hat u)>0$.

В дальнейшем рассматриваются два случая: коэрцитивный и резонансный.

В коэрцитивном случае $(J_1(u)\geqslant\gamma\|u\|^2$, $u\in X$, γ – положительная константа, независящая от $u)$ из теоремы в работе [15] следует существование $\lambda_0>0$ такого, что $\inf\limits_{v\in X}J^\lambda(v)<0$ для любого $\lambda>\lambda_0$, найдётся $\hat u_0\in X$, для которого $J^\lambda(\hat u_0)=\inf\limits_{v\in X}J^\lambda(v)$, и любое такое $\hat u_0$ является ненулевым полуправильным решением задачи (5), (6).

Если ядро дифференциального оператора с соответствующими граничными условиями ненулевое (резонансный случай), то дополнительно предположим выполнение условия

(iv) линейное пространство $N(L)$ решений задачи

$$Lu = 0, \quad x \in (a,b),$$

$$u(a) = u(b) = 0$$

одномерно и $\psi(x)$ – базисная функция этого подпространства.

Кроме того, пусть для базисной функции ψ пространства $N(L)$ выполнены условия Ландесмана–Лазера

$$\int\limits_{\psi<0} g_-(x)\psi(x)\,dx + \int\limits_{\psi>0} g_+(x)\psi(x)\,dx < 0 < \int\limits_{\psi>0} g_-(x)\psi(x)\,dx + \int\limits_{\psi<0} g_+(x)\psi(x)\,dx, \tag{7}$$

где $g_\pm(x) = \lim\limits_{u\to\pm\infty} g(x,u)$.

Известно [29], что условия Ландесмана–Лазера влекут за собой равенство

$$\lim_{u\in N(L),\|u\|\to+\infty} J_2(u) = -\infty.$$

Поэтому если дополнительно потребовать неотрицательность $J_1(u)$ на X, то из теоремы 4 в работе [30] следует существование $\lambda_0 > 0$ такого, что $\inf\limits_{v\in X} J^\lambda(v) < 0$ для любого $\lambda > \lambda_0$, найдётся $\hat{u}_0 \in X$, для которого $J^\lambda(\hat{u}_0) = \inf\limits_{v\in X} J^\lambda(v)$, и любое такое $\hat{u}_0$ является ненулевым полуправильным решением задачи (5), (6).

Зафиксируем $\lambda > \lambda_0$, и пусть числовая последовательность $\{\lambda_k\}$ сходится к λ, $\lambda_k > 0$. Рассмотрим аппроксимирующую задачу

$$Lu(x) = \lambda_k g^k(x, u(x)), \quad x \in (a,b), \tag{8}$$

$$u(a) = u(b) = 0, \tag{9}$$

где аппроксимирующая последовательность каратеодориевых функций $\{g^k(x,u)\}$ определена выше.

Положим

$$J^k(u) = J_1(u) - \lambda_k \int\limits_a^b dx \int\limits_0^{u(x)} g^k(x,s)\,ds, \quad k \in \mathbb{N}.$$

По построению функция $g^k(x,u)$ каратеодориева и для неё при п.в. $x \in (a,b)$ верна оценка (4) с функцией α из (1).

Согласно теореме из [15] (коэрцитивный случай) и теореме 4 из [30] (резонансный случай) для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $u_k \in X$ такое, что $J^k(u_k) = \inf\limits_{v\in X} J^k(v)$, причём любое такое $u_k \in W_q^2((a,b))$ и является сильным решением соответствующей аппроксимирующей краевой задачи.

2. Основной результат. Теорема о близости решений аппроксимирующей задачи (8), (9) к решениям исходной задачи (5), (6) является основным результатом данной работы.

Теорема. *Пусть выполнены оценка (1), равенство (2), неравенство (3), оценка (4), условие (iii) и дополнительно коэффициент $q(x)$ оператора L неотрицателен на (a,b) (в коэрцитивном случае), функционал $J_1(u)$ неотрицателен на X, выполнены условия (iv) и (7) (в резонансном случае). Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) последовательность $\{u_k\}$ решений аппроксимирующих задач (8), (9), построенная выше, является минимизирующей последовательностью для функционала J^λ на X;

2) последовательность $\{u_k\}$ содержит подпоследовательность $\{u_{k_l}\}$, сходящуюся в равномерной метрике $C_1([a,b])$ к полуправильному решению u_0 предельной задачи (5), (6), для которого $J^\lambda(u_0) = \inf\limits_{v\in X} J^\lambda(v)$;

3) если инфимум J^λ *на* X *достигается в единственной точке* u_0, *то* $u_k \to u_0$ *в* $C_1([a,b])$.

Доказательство. Пусть $|\lambda_k-\lambda|<\varepsilon_k$, где $\varepsilon_k\to+0$ при $k\to\infty$. Для $u\in X$ и $k\in\mathbb{N}$ имеем соотношения

$$|J^k(u)-J^\lambda(u)|=\left|\int\limits_a^b dx\int\limits_0^{u(x)}(-\lambda_k g^k(x,s)+\lambda g(x,s))\,ds\right|\leqslant\int\limits_a^b dx\int\limits_0^{u(x)}|\lambda_k g^k(x,s)-\lambda g(x,s)|\,ds\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_a^b dx\int\limits_0^{u(x)}(|\lambda_k-\lambda||g^k(x,s)|+|\lambda||g^k(x,s)-g(x,s)|)\,ds\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon_k\int\limits_a^b dx\int\limits_0^{u(x)}|g^k(x,s)|\,ds+|\lambda|\int\limits_a^b dx\int\limits_0^{u(x)}|g^k(x,s)-g(x,s)|\,ds\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon_k\int\limits_a^b dx\int\limits_0^{u(x)}\alpha(x)\,ds+|\lambda|\sum_{i=1}^m\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_i(x)-\delta_k}^{\varphi_i(x)+\delta_k}|g^k(x,s)-g(x,s)|\,ds\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon_k\int\limits_a^b\alpha(x)|u(x)|\,dx+|\lambda|\sum_{i=1}^m\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_i(x)-\delta_k}^{\varphi_i(x)+\delta_k}(\alpha(x)+\alpha(x))\,ds=$$

$$=\varepsilon_k\int\limits_a^b\alpha(x)|u(x)|\,dx+4|\lambda|m\delta_k\int\limits_a^b\alpha(x)\,dx.$$

Для любого $u\in X$ справедливо неравенство

$$\int\limits_a^b\alpha(x)|u(x)|\,dx\leqslant M\|u\|,$$

где постоянная M равна произведению $\|\alpha\|_{L_q((a,b))}$ на норму оператора вложения X в пространство $L_p((a,b))$, $p=q/(q-1)$, $q>1$. Таким образом,

$$|J^k(u)-J^\lambda(u)|\leqslant\varepsilon_k M\|u\|+4|\lambda|m\delta_k\int\limits_a^b\alpha(x)\,dx,\quad u\in X.$$

Поскольку в коэрцитивном случае коэффициент $q(x)$ оператора L неотрицателен на (a,b), то для любого решения u задачи (5), (6) имеем

$$\chi\|u\|^2\leqslant(Lu,u)=\int\limits_a^b\lambda g(x,u(x))u(x)\,dx\leqslant|\lambda|\bigg(\int\limits_a^b|g(x,u(x))|^q\,dx\bigg)^{1/q}\bigg(\int\limits_a^b|u(x)|^p\,dx\bigg)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant|\lambda|\|\alpha\|_{L_q((a,b))}\bigg(\int\limits_a^b|u(x)|^p\,dx\bigg)^{1/p}\leqslant|\lambda|M\|u\|,$$

где χ – положительная константа, независящая от u, $\|u\|$ – норма в пространстве X. Из этого следует, что $\|u\| \leqslant |\lambda|M/\chi$.

Аналогично доказывается, что

$$\|u_k\| \leqslant \frac{|\lambda_k|M}{\chi}, \quad k \in \mathbb{N},$$

где u_k – решение аппроксимирующей задачи (8), (9). В резонансном случае ограниченность последовательности $\{u_k\}$ доказывается от противного по схеме, предложенной в работе [5].

Пусть постоянная $N > 0$ из неравенства $\|u\| \leqslant N$ (например, в коэрцитивном случае $N = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |\lambda_k|M/\chi$). Тогда

$$|J^k(u) - J^\lambda(u)| \leqslant \varepsilon_k MN + 4|\lambda| m\delta_k \int\limits_a^b \alpha(x)\,dx = F_k, \tag{10}$$

если u или решение задачи (5), (6), или решение одной из аппроксимирующих задач (8), (9).

Отсюда следует $(d_\lambda = \inf\limits_{v\in X} J^\lambda(v),\ \ J^\lambda(\hat{u}_0) = d_\lambda)$

$$d_\lambda - F_k \leqslant J^\lambda(u_k) - F_k \leqslant J^k(u_k) \leqslant J^k(\hat{u}_0) \leqslant J^\lambda(\hat{u}_0) + F_k = d_\lambda + F_k,$$

что влечёт неравенство $|J^k(u_k) - d_\lambda| \leqslant F_k$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Тогда, с учётом (10), имеем

$$|J^\lambda(u_k) - d_\lambda| \leqslant |J^\lambda(u_k) - J^k(u_k)| + |J^k(u_k) - d_\lambda| \leqslant 2F_k \tag{11}$$

для любого натурального k.

Из того что $\varepsilon_k \to +0$, $\delta_k \downarrow 0$ при $k \to \infty$ следует, что $F_k \to 0$. Поэтому (11) влечёт $\lim\limits_{k\to\infty} J^\lambda(u_k) = d_\lambda$, и, значит, $\{u_k\}$ – минимизирующая последовательность для функционала J^λ на X.

В коэрцитивном случае имеем

$$\|Lu_k\|_{L_q((a,b))} = \bigg(\int\limits_a^b |\lambda_k g^k(x, u_k(x))|^q\,dx\bigg)^{1/q} \leqslant |\lambda_k| \|\alpha\|_{L_q((a,b))} < (\varepsilon_k + \lambda)\|\alpha\|_{L_q((a,b))}$$

в силу оценки (4). Поскольку $\varepsilon_k \to +0$ при $k \to \infty$, то существует константа $K > 0$ такая, что для произвольного k справедливо неравенство $\varepsilon_k < K$ и, значит, верна оценка

$$\|Lu_k\|_{L_q((a,b))} \leqslant (K + \lambda)\|\alpha\|_{L_q((a,b))}, \quad k \in \mathbb{N},$$

что приводит к ограниченности последовательности $\{u_k\}$ в пространстве $W_q^2((a,b))$ при сделанных выше предположениях относительно оператора L. В резонансном случае ограниченность последовательности $\{u_k\}$ в $W_q^2((a,b))$ доказана в статье [5].

Пространство $W_q^2((a,b))$ рефлексивно, значит последовательность $\{u_k\}$ содержит слабо сходящуюся к некоторому u_0 в $W_q^2((a,b))$ подпоследовательность $\{u_{k_l}\}$. Учитывая компактность вложения $W_q^2((a,b))$ в $C_1([a,b])$, получаем, что $\{u_{k_l}\}$ сильно сходится к u_0 в X и $C_1([a,b])$.

Функционал J^λ непрерывен на X, поэтому $J^\lambda(u_0) = \lim\limits_{l\to\infty} J^\lambda(u_{k_l})$. С другой стороны, $\lim\limits_{l\to\infty} J^\lambda(u_{k_l}) = d_\lambda$. Следовательно, $J^\lambda(u_0) = d_\lambda$. Из этого и теоремы из [15] (коэрцитивный случай), теоремы 4 из [30] (резонансный случай) заключаем, что u_0 – полуправильное решение задачи (5), (6).

Если инфимум J^λ на X достигается в единственной точке $u_0 \in X$, то $u_k \to u_0$ в $C_1([a,b])$, поскольку в этом случае из любой подпоследовательности последовательности $\{u_k\}$ можно выделить подпоследовательность, которая сильно сходится к u_0 в равномерной метрике $C_1([a,b])$. Теорема доказана.

3. Приложения. В качестве приложения установленной теоремы можно рассматривать, например, непрерывные аппроксимации одномерного аналога математической модели Гольдштика отрывных течений несжимаемой жидкости [11]. Действительно, одномерная задача Гольдштика имеет вид

$$-u'' = \omega g(x, u(x)), \quad x \in (0,1), \tag{12}$$

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{13}$$

Здесь параметр $\omega > 0$ – завихрённость, а нелинейность

$$g(x,u) = \begin{cases} -1, & \text{если } u < x-1, \\ 0, & \text{если } u \geqslant x-1. \end{cases}$$

Прямая

$$S = \{(x,u) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], \quad u = x-1\}$$

разбивает область $D = (0,1) \times \mathbb{R}$ на непересекающиеся подобласти

$$D_0 = \{(x,u) \in D : u < x-1\}, \quad D_1 = \{(x,u) \in D : u > x-1\}.$$

На $\overline{D_i}$, $i = 0,1$, заданы каратеодориевы функции $g_i(x,u)$, функция $g : (0,1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ суперпозиционно измерима и на D_i совпадает с $g_i(x,u)$, причём для п.в. $x \in (0,1)$, если $(x,u) \in S$, $g(x,u)$ принадлежит отрезку с концами $g_0(x,u)$ и $g_1(x,u)$. Положим $g_0(x,u) = -1$, $g_1(x,u) = 0$.

Краевой задаче (12), (13) сопоставим заданный на пространстве $H^1_\circ((0,1))$ функционал $J^\omega(u) = J_1(u) - \omega J_2(u)$, где

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 u'^2\,dx, \quad J_2(u) = \int_0^1 dx \int_0^{u(x)} g(x,s)\,ds.$$

В статье [15] отмечено, что существует $\omega_0 > 0$ такое, что $\inf\limits_{v \in H^1_\circ((0,1))} J^\omega(v) < 0$ для любого $\omega > \omega_0$, найдётся $\hat{u}_0 \in H^1_\circ((0,1))$, для которого $J^\omega(\hat{u}_0) = \inf\limits_{v \in H^1_\circ((0,1))} J^\omega(v)$, и любое такое $\hat{u}_0$ является ненулевым полуправильным решением задачи (12), (13).

Зафиксируем $\omega > \omega_0$ и пусть числовая последовательность $\{\omega_k\}$, $\omega_k > 0$, сходится к ω. Нелинейность $g(x,u)$ аппроксимируется последовательностью каратеодориевых функций $\{g^k(x,u)\}$. Имеем

$$-u'' = \omega_k g^k(x, u(x)), \quad x \in (0,1),$$

$$u(0) = u(1) = 0,$$

где

$$g^k(x,u) = \begin{cases} -1, & \text{если } u < -\varepsilon + x - 1, \\ (u+1-x)/\varepsilon, & \text{если } -\varepsilon + x - 1 \leqslant u \leqslant x-1, \\ 0, & \text{если } u \geqslant x-1. \end{cases}$$

Функция $g^k(x,u)$ непрерывная и зависит от малого параметра $\varepsilon > 0$, в пределе при $\varepsilon \to +0$ получается разрывная нелинейность $g(x,u)$.

Проверим, что для одномерной задачи Гольдштика выполнены все условия полученной в данной работе теоремы.

Для п.в. $x \in (0,1)$ выполнена оценка $|g_i(x,u)| \leqslant 1$ для любого u с $(x,u) \in \overline{D_i}$, где $1 \in \in L_q((0,1))$, $q > 1$, $i = 0,1$; верны равенство $g(x,0) = 0$ и неравенство $g_0(x,u) \leqslant g_1(x,u)$, если $(x,u) \in S$; справедлива оценка $|g^k(x,u)| \leqslant 1$ для любого $u \in \mathbb{R}$, где $1 \in L_q((0,1))$, $q > 1$. Покажем, что выполнено условие (iii). Возьмём отрезок $F \subset (0,1)$. Тогда существует интервал $G \supset F$ такой, что $\overline{G} \subset (0,1)$. Пусть функция $h \in C_\infty([0,1])$ равна единице на F, нулю вне G и $0 \leqslant h(x) \leqslant 1$ на $G \backslash F$. Имеем

$$J_2(u) = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{u(x)} g(x,s)\,ds = \int\limits_{\{x\in(0,1):\ u(x)<x-1\}} (x-1-u(x))\,dx.$$

Положим $u(x) = \hat{u}(x) = 2(x-1)h(x)$. Тогда

$$J_2(\hat{u}) = \int\limits_{\{x\in(0,1):\ \hat{u}(x)<x-1\}} (x-1-\hat{u}(x))\,dx = \int\limits_{\{x\in(0,1):\ h(x)>1/2\}} (x-1)(1-2h(x))\,dx > 0.$$

Таким образом, найдётся $\hat{u} \in H^1_\circ((0,1))$, для которого $J_2(\hat{u}) > 0$. Условие (iii) выполняется. Далее имеем

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 u'^2\,dx = \frac{1}{2}\|u\|^2.$$

Существует постоянная $\gamma \in (0,1/2]$ (например, $\gamma = 1/4$), для которой $J_1(u) \geqslant \gamma\|u\|^2$ для всех $u \in H^1_\circ((0,1))$, т.е. имеет место коэрцитивный случай. Коэффициент $q(x) \equiv 0$ (функция при $u(x)$ в дифференциальном операторе $Lu = -u''$) неотрицателен.

Итак, для одномерной задачи Гольдштика выполнены все условия теоремы и, значит, справедливы её утверждения.

Совершенно аналогично в качестве приложения можно рассмотреть одномерную модель Лаврентьева об отрывных течениях [31], для которой также будут выполнены условия доказанной теоремы. Поэтому утверждения теоремы будут справедливы и для одномерной задачи Лаврентьева.

Установленная теорема проиллюстрирована прикладными задачами.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00069).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красносельский М.А., Покровский А.В.* Уравнения с разрывными нелинейностями // Докл. АН СССР. 1979. Т. 248. № 5. С. 1056–1059.
2. *Павленко В.Н., Искаков Р.С.* Непрерывные аппроксимации разрывных нелинейностей полулинейных уравнений эллиптического типа // Укр. мат. журн. 1999. Т. 51. № 2. С. 224–233.
3. *Лепчинский М.Г., Павленко В.Н.* Аппроксимация резонансных краевых задач эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46. № 1. С. 139–148.
4. *Лепчинский М.Г., Павленко В.Н.* Правильные решения эллиптических краевых задач с разрывными нелинейностями // Алгебра и анализ. 2005. Т. 17. № 3. С. 124–138.
5. *Павленко В.Н., Потапов Д.К.* Аппроксимация краевых задач эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной нелинейностью // Изв. вузов. Математика. 2005. № 4. С. 49–55.
6. *Потапов Д.К.* Устойчивость основных краевых задач эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной нелинейностью в коэрцитивном случае // Изв. РАЕН. Сер. МММИУ. 2005. Т. 9. № 1–2. С. 159–165.
7. *Потапов Д.К.* Аппроксимация задачи Дирихле для уравнения эллиптического типа высокого порядка со спектральным параметром и разрывной нелинейностью // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 7. С. 1002–1003.

8. *Потапов Д.К.* Аппроксимация однопараметрического семейства задач Дирихле для уравнений эллиптического типа высокого порядка с разрывными нелинейностями в резонансном случае // Мат. заметки. 2011. Т. 90. Вып. 3. С. 467–469.
9. *Вайнштейн И.И., Юровский В.К.* Об одной задаче сопряжения вихревых течений идеальной жидкости // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1976. № 5. С. 98–100.
10. *Потапов Д.К.* Непрерывные аппроксимации задачи Гольдштика // Мат. заметки. 2010. Т. 87. Вып. 2. С. 262–266.
11. *Потапов Д.К.* Непрерывная аппроксимация одномерного аналога модели Гольдштика отрывных течений несжимаемой жидкости // Сиб. журн. вычислит. математики. 2011. Т. 14. № 3. С. 291–296.
12. *Carl S., Heikkila S.* On the existence of minimal and maximal solutions of discontinuous functional Sturm–Liouville boundary value problems // J. Inequal. Appl. 2005. № 4. P. 403–412.
13. *Bonanno G., Bisci G.M.* Infinitely many solutions for a boundary value problem with discontinuous nonlinearities // Bound. Value Probl. 2009. Art. 670675.
14. *Bonanno G., Buccellato S.M.* Two point boundary value problems for the Sturm–Liouville equation with highly discontinuous nonlinearities // Taiwanese J. Math. 2010. V. 14. № 5. P. 2059–2072.
15. *Потапов Д.К.* Задача Штурма–Лиувилля с разрывной нелинейностью // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 9. С. 1284–1286.
16. *Потапов Д.К.* Существование решений, оценки дифференциального оператора и “разделяющее” множество в краевой задаче для дифференциального уравнения второго порядка с разрывной нелинейностью // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 7. С. 970–974.
17. *Bonanno G., D'Agui G., Winkert P.* Sturm–Liouville equations involving discontinuous nonlinearities // Minimax Theory Appl. 2016. V. 1. № 1. P. 125–143.
18. *Павленко В.Н., Постникова Е.Ю.* Задача Штурма–Лиувилля для уравнения с разрывной нелинейностью // Челябинский физ.-мат. журн. 2019. Т. 4. Вып. 2. С. 142–154.
19. *Нижник И.Л., Краснеева А.А.* Периодические решения дифференциальных уравнений второго порядка с разрывной нелинейностью // Нелин. колебания. 2012. Т. 15. № 3. С. 381–389.
20. *Jacquemard A., Teixeira M.A.* Periodic solutions of a class of non-autonomous second order differential equations with discontinuous right-hand side // Phys. D: Nonlin. Phenom. 2012. V. 241. № 22. P. 2003–2009.
21. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Solution to second-order differential equations with discontinuous right-hand side // Electron. J. Differ. Equat. 2014. № 221. P. 1–6.
22. *Llibre J., Teixeira M.A.* Periodic solutions of discontinuous second order differential systems // J. Singularities. 2014. V. 10. P. 183–190.
23. *Самойленко А.М., Нижник И.Л.* Дифференциальные уравнения с биустойчивой нелинейностью // Укр. мат. журн. 2015. Т. 67. № 4. С. 517–554.
24. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Non-existence of periodic solutions to non-autonomous second-order differential equation with discontinuous nonlinearity // Electron. J. Differ. Equat. 2016. № 4. P. 1–8.
25. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Existence of solutions for second-order differential equations with discontinuous right-hand side // Electron. J. Differ. Equat. 2016. № 124. P. 1–9.
26. *Bensid S., Diaz J.I.* Stability results for discontinuous nonlinear elliptic and parabolic problems with a S-shaped bifurcation branch of stationary solutions // Disc. Contin. Dyn. Syst. Ser. B. 2017. V. 22. № 5. P. 1757–1778.
27. *Da Silva C.E.L., da Silva P.R., Jacquemard A.* Sliding solutions of second-order differential equations with discontinuous right-hand side // Math. Meth. Appl. Sci. 2017. V. 40. № 14. P. 5295–5306.
28. *Da Silva C.E.L., Jacquemard A., Teixeira M.A.* Periodic solutions of a class of non-autonomous discontinuous second-order differential equations // J. Dyn. Contr. Syst. 2020. V. 26. № 1. P. 17–44.
29. *Павленко В.Н., Винокур В.В.* Резонансные краевые задачи для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Изв. вузов. Математика. 2001. № 5. С. 43–58.
30. *Павленко В.Н., Потапов Д.К.* О существовании луча собственных значений для уравнений с разрывными операторами // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42. № 4. С. 911–919.
31. *Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Lavrent'ev problem for separated flows with an external perturbation // Electron. J. Differ. Equat. 2013. № 255. P. 1–6.

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию 15.01.2023 г.
После доработки 15.01.2023 г.
Принята к публикации 21.08.2023 г.