ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 9, с. 1199–1204

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.2

О СУЩЕСТВОВАНИИ БЕСКОНЕЧНОГО СПЕКТРА ЗАТУХАЮЩИХ ВЫТЕКАЮЩИХ ТЕ-ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ВОЛН ОТКРЫТОГО НЕОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО МЕТАЛЛОДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА, ПОКРЫТОГО СЛОЕМ ГРАФЕНА

© 2023 г. Ю. Г. Смирнов, Е. Ю. Смолькин

Рассматривается задача о вытекающих волнах неоднородной волноведущей структуры, покрытой слоем графена, которая сводится к краевой задаче для продольных компонент электромагнитного поля в пространствах Соболева. Для определения решения используется вариационная формулировка задачи. Вариационная задача сводится к изучению оператор-функции. Исследуются свойства оператор-функции, необходимые для анализа её спектральных свойств. Доказываются теоремы о дискретности спектра и о распределении характеристических чисел оператор-функции на комплексной плоскости.

DOI: 10.31857/S0374064123090054, EDN: WORJJJ

Введение. Появление новых материалов, таких как графен, приводит к необходимости рассмотрения краевых задач электродинамики нового типа, когда условия сопряжения на границе диэлектриков содержат бесконечно тонкий проводящий слой графена [1–4]. При этом требуются как теоретическое исследование свойств задачи, так и разработка численных методов для её решения и проведение практически важных расчётов для конкретных структур.

Нами рассматривается металлодиэлектрический слой кругового поперечного сечения, покрытый слоем графена и расположенный в свободном пространстве. Цель исследования – изучить спектр собственных вытекающих волн, которые могут существовать в структуре. Основным теоретическим результатом в таких задачах обычно является теорема о дискретности спектра [5, 6]. Именно этот результат будет доказан ниже для металлодиэлектрического слоя, покрытого слоем графена. Насколько известно авторам, подобные результаты для этой задачи ранее не были получены.

В статье рассматривается задача о спектре вытекающих волн, которые растут при удалении от волновода. Вариационным методом задача сводится к исследованию оператор-функции в пространстве Соболева. Доказывается дискретность спектра задачи.

Важно отметить, что помимо доказательства теоремы о дискретности спектра получена и изучена система вариационных уравнений, к которой сводится краевая задача на собственные значения. Эта система уже может решаться численно. Некоторые результаты о распространении поляризованных электромагнитных волн в диэлектрической пластине, покрытой графеном, имеются в работах [7–9].

1. Задача о вытекающих волнах. Рассмотрим трёхмерное пространство $\mathbb{R}^3$ с цилиндрической системой координат $O\rho\varphi z$. Пространство заполнено изотропной средой без источников с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_0 \equiv \mathrm{const}$, где ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума. В $\mathbb{R}^3$ помещён цилиндрический диэлектрический волновод

$$\Sigma := \{(\rho, \varphi, z) : r_0 \leqslant \rho \leqslant r, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$$

с образующей, параллельной оси Oz, и с круговым поперечным сечением. Волновод неограниченно продолжается в направлении z. Сечение волновода, перпендикулярное его оси, представляет собой кольцо с внутренним радиусом r_0 и внешним радиусом r (рисунок). Границы $\rho = r_0$ – проекция поверхности идеально проводящего, бесконечно тонкого экрана, $\rho = r$ – проекция поверхности соприкосновения диэлектриков. Волновод заполнен неоднородным диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon_0\varepsilon(\rho)$.

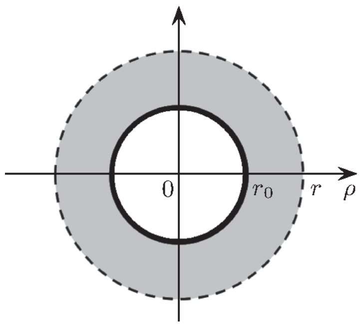

Рисунок. Сечение волновода.

Задача о вытекающих ТЕ-поляризованных волнах диэлектрического волновода состоит в отыскании нетривиальных решений однородной системы уравнений Максвелла в виде бегущей волны, т.е. с зависимостью $e^{i\gamma z}$ от координаты z, вдоль которой структура регулярна:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = -i\tilde{\varepsilon}\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = i\mathbf{H},$$

$$\mathbf{E} = (0, E_\varphi(\rho)e^{i\gamma z}, 0), \quad \mathbf{H} = (H_\rho(\rho)e^{i\gamma z}, 0, H_z(\rho)e^{i\gamma z}), \qquad (1)$$

где $\mathbf{H}$ – напряжённость магнитного поля, $\mathbf{E}$ – напряжённость электрического поля, γ – постоянная распространения, причём должны выполняться следующие условия: энергия поля в любом конечном объёме волновода ограничена, на поверхности идеального проводника касательных составляющих электрического поля

$$E_\varphi|_{\rho=r_0} = 0; \qquad (2)$$

для касательных составляющих полей на границе раздела сред

$$E_\varphi|_{r+0} - E_\varphi|_{r-0} = 0, \quad H_z|_{r+0} - H_z|_{r-0} = -\sigma E_\varphi|_{r+0}, \qquad (3)$$

здесь σ – проводимость графена (постоянная комплексная величина такая, что $\sigma' = \operatorname{Re}\sigma \geqslant 0$ и $\sigma'' = \operatorname{Im}\sigma \geqslant 0$); а также условие излучения на бесконечности для вытекающих волн [6, с. 63].

Система уравнений Максвелла (1) записана в нормированном виде. Перейдём к безразмерным величинам [5]:

$$k_0\rho \to \rho, \quad \gamma \to \frac{\gamma}{k_0}, \quad \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\mathbf{H} \to \mathbf{H}, \quad \mathbf{E} \to \mathbf{E},$$

где $k_0^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0$, ω – круговая частота, μ_0 – магнитная проницаемость вакуума (временно́й множитель $e^{-i\omega t}$ всюду опущен).

Диэлектрическая проницаемость во всем пространстве равна

$$\widetilde{\varepsilon} = \begin{cases} \varepsilon(\rho), & r_0 \leqslant \rho \leqslant r, \\ 1, & \rho > r. \end{cases}$$

Среда предполагается изотропной и немагнитной. Пусть также $\varepsilon(\rho)$ – вещественная непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[r_0, r]$.

Запишем систему уравнений Максвелла (1) в координатном виде:

$$i\gamma H_\rho - H_z' = -i\widetilde{\varepsilon}E_\varphi, \quad -i\gamma E_\varphi = iH_\rho, \quad \frac{1}{\rho}(\rho E_\varphi)' = iH_z. \qquad (4)$$

Выразим функции H_ρ и H_z через E_φ из второго и третьего уравнений системы (4) и получим

$$H_\rho = -\gamma E_\varphi, \quad H_z = -i\frac{(\rho E_\varphi)'}{\rho},$$

откуда следует, что поле ТЕ-волны может быть представлено в виде скалярной функции

$$u := iE_\varphi(\rho).$$

Тем самым задача сводится к нахождению функции u. Всюду $(\,\cdot\,)'$ обозначает дифференцирование по переменной ρ.

Из первого уравнения системы (4) получим следующее дифференциальное уравнение:

$$u'' + \frac{1}{\rho}u' - \frac{1}{\rho^2}u + (\widetilde{\varepsilon} - \gamma^2)u = 0. \qquad (5)$$

Граничные условия (2) и условия сопряжения (3) примут вид

$$u(r-0)=u(r+0),\quad u'(r-0)=u'(r+0)+i\sigma u(r+0),\tag{6}$$

где $[f]|_{\rho_0}=\lim\limits_{\rho\to\rho_0-0}f(\rho)-\lim\limits_{\rho\to\rho_0+0}f(\rho)$.

При $\rho>r$ имеем $\widetilde{\varepsilon}=1$, тогда из (5) получаем

$$u''+\frac{1}{\rho}u'-\frac{1}{\rho^2}u-\lambda^2u=0,$$

где $\lambda^2=\gamma^2-1$.

Учитывая условие на бесконечности для вытекающих волн, выберем решение последнего уравнения в виде

$$u(\rho;\gamma)=CI_1(\lambda\rho),\tag{7}$$

где I_1 – модифицированная функция Бесселя (функция Инфельда) [10], C – некоторая постоянная.

При $r_0\leqslant\rho\leqslant r$ имеем $\widetilde{\varepsilon}=\varepsilon(\rho)$, и из (5) получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$Lu:=(\rho u')'-\frac{1}{\rho}u+\rho(\varepsilon-1-\lambda^2)u=0.\tag{8}$$

Определение. Если существует нетривиальная функция u, отвечающая некоторому $\lambda\in\mathbb{C}$ и удовлетворяющая условиям (6), которая при $\rho>r$ определяется формулой (7), а при $r_0\leqslant\rho\leqslant r$ является решением уравнения (8), то λ называется *характеристическим числом* задачи (6)–(8).

Задача о вытекающих волнах является задачей на собственные значения для системы уравнений Максвелла относительно спектрального параметра λ.

2. Задача о спектре оператор-функции. Будем искать решения u задачи в пространстве Соболева [11] $H_0^1(r_0,r;\rho)$ со скалярным произведением и нормой

$$(f,g)_1=\int\limits_{r_0}^{r}\rho(f'\overline{g}'+f\overline{g})\,d\rho,\quad \|f\|_1^2=(f,f)_1=\int\limits_{r_0}^{r}\rho(|f'|^2+|f|^2)\,d\rho.$$

Замечание. Здесь использовано обозначение пространства Соболева $H_0^1(r_0,r;\rho)$, не совпадающее со стандартным (в нашем случае $f|_{r_0}=0$, но, вообще говоря, $f|_r\neq0$).

Дадим вариационную формулировку задачи. Умножим уравнение (8) на произвольную пробную функцию v, считая её пока непрерывно дифференцируемой на отрезке $[r_0,r]$. Использовав формулу Грина для уравнения (8) на отрезке $[r_0,r]$, получим

$$\lambda^2\int\limits_{r_0}^{r}\rho u\overline{v}\,d\rho+\int\limits_{r_0}^{r}\rho u'\overline{v}'\,d\rho+\int\limits_{r_0}^{r}\rho\left(\frac{1}{\rho^2}-\varepsilon-1\right)u\overline{v}\,d\rho-ru'(r-0)\overline{v}(r-0)=0.\tag{9}$$

Зная решение (7), выразим из формул (6) значения производной в точке $\rho=r$ следующим образом:

$$u'(r+0)=\lambda\frac{I_1'(\lambda r)}{I_1(\lambda r)}u(r+0).\tag{10}$$

Из (9) с учётом (10) имеем

$$\lambda^2\int\limits_{r_0}^{r}\rho u\overline{v}\,d\rho+\int\limits_{r_0}^{r}\rho(u'\overline{v}'+u\overline{v})\,d\rho+\int\limits_{r_0}^{r}\left(\frac{1}{\rho}-\rho\varepsilon\right)u\overline{v}\,d\rho-\lambda\frac{I_1'(\lambda r)}{I_1(\lambda r)}u(r)\overline{v}(r)-i\sigma ru(r)\overline{v}(r)=0.\tag{11}$$

Вариационное соотношение (11) получено для гладких функций v и распространяется на любые функции $v \in H_0^1(r_0, r; \rho)$ по непрерывности.

Интегралы, входящие в (11), можно рассматривать как полуторалинейные формы над полем $\mathbb{C}$, заданные на $H_0^1(r_0, r; \rho)$, от аргументов u, v. Эти формы определяют [12] некоторые линейные ограниченные операторы $\mathrm{T} : H_0^1(r_0, r; \rho) \to H_0^1(r_0, r; \rho)$ по формуле

$$\mathrm{t}(u, v) = (\mathrm{T}u, v), \quad v \in \widetilde{H}_0^1,$$

при условии, что сами формы ограничены: $|\mathrm{t}(u, v)| \leqslant C\|u\|\|v\|$. Линейность следует из линейности формы по первому аргументу, а непрерывность – из оценок

$$\|\mathrm{T}u\|^2 = \mathrm{t}(u, \mathrm{T}u) \leqslant C\|u\|\|\mathrm{T}u\|.$$

Рассмотрим полуторалинейные формы и порождаемые ими операторы:

$$\mathrm{k}(u, v) := \int\limits_{r_0}^{r} \rho u\overline{v}\, d\rho = (\mathrm{K}u, v), \quad \widetilde{\mathrm{k}}(u, v) := \int\limits_{r_0}^{r} \left(\frac{1}{\rho} - \rho\varepsilon\right) u\overline{v}\, d\rho = (\widetilde{\mathrm{K}}u, v),$$

$$\mathrm{a}(u, v) := \int\limits_{r_0}^{r} \rho(u'\overline{v}' + u\overline{v})\, d\rho = (\mathrm{I}u, v), \quad \mathrm{s}(u, v) := u(r)\overline{v}(r) = (\mathrm{S}u, v),$$

где $v \in H_0^1(r_0, r; \rho)$.

Ограниченность формы $\mathrm{a}(u, v)$ очевидна. Ограниченность форм $\mathrm{k}(u, v)$ и $\widetilde{\mathrm{k}}(u, v)$ следует из теоремы Соболева–Кондрашева [11, с. 44]. Ограниченность формы $\mathrm{s}(u, v)$ показана в статье [13].

Теперь вариационную задачу (11) можно записать в операторном виде

$$(\mathrm{N}(\lambda)u, v) = 0, \quad u \in \widetilde{H}_0^1,$$

или в эквивалентном

$$\mathrm{N}(\lambda)u := (\lambda^2\mathrm{K} + \mathrm{I} + \widetilde{\mathrm{K}} - s(\lambda)\mathrm{S} - i\sigma\mathrm{S})u = 0, \tag{12}$$

где

$$s(\lambda) = \lambda\frac{I_1'(\lambda r)}{I_1(\lambda r)}.$$

Уравнение (12) – операторная запись вариационного соотношения (11).

3. Свойства оператор-функции. Справедливы следующие свойства операторов [13].

Лемма 1. *Ограниченные операторы* K*и*$\widetilde{\mathrm{K}} : H_0^1(r_0, r; \rho) \to H_0^1(r_0, r; \rho)$ *являются компактными и* $\mathrm{K} > 0$.

Лемма 2. *Оператор* $\mathrm{S} : H_0^1(r_0, r; \rho) \to H_0^1(r_0, r; \rho)$ *является компактным конечномерным оператором.*

Лемма 3. *Функция* $s(\lambda)$ *является мероморфной функцией с полюсами в точках из множества* $\Lambda_0 := \{\lambda : I_1(\lambda r) = 0\}$.

Доказательство мероморфности заключается в проверке свойств указанной функции. Согласно [14, с. 191] функция $s(\lambda)$ имеет только простые полюсы в качестве особых точек, лежащие на мнимой оси. Совокупность всех полюсов функции $s(\lambda)$ совпадает с Λ_0.

Теорема 1. *Оператор-функция* $\mathrm{N}(\gamma) : H_0^1(r_0, r; \rho) \to H_0^1(r_0, r; \rho)$ *является конечно-мероморфной и фредгольмовой в поле* $\mathbb{C}$.

Доказательство. В $\mathbb{C}$ функция $\mathrm{N}(\lambda)$ является конечно-мероморфной [15] (как функция от λ) в силу леммы 3. Из лемм 1 и 2 следует, что оператор-функция $\mathrm{N}(\lambda)$ является фредгольмовой, как сумма обратимого I и компактных K, $\widetilde{\mathrm{K}}$ и S операторов. Теорема доказана.

Лемма 4. *Существует* $\lambda \in \mathbb{R}$ *такое, что оператор* $\mathrm{N}(\lambda)$ *непрерывно обратим, т.е. резольвентное множество* $\varrho(\mathrm{N}) := \{\lambda :$ *существует* $\mathrm{N}^{-1}(\lambda) : H_0^1(r_0, r; \rho) \to H_0^1(r_0, r; \rho)\}$ *оператор-функции* $\mathrm{N}(\lambda)$ *не пусто;* $\varrho(\mathrm{N}) \neq \varnothing$.

Доказательство. Для доказательства непустоты резольвентного множества $\varrho(\mathrm{N})$ оператор-функции $\mathrm{N}(\lambda)$ достаточно найти такое $\lambda_0 \in \Lambda$, что из $\mathrm{N}(\lambda_0)u = 0$ будет следовать $u = 0$. Тогда из альтернативы Фредгольма получим, что оператор $\mathrm{N}(\lambda)$ непрерывно обратим. Рассмотрим следующую форму:

$$\operatorname{Im}(\mathrm{N}(\lambda)u, u) = 2\lambda'\lambda'' \int\limits_{r_0}^{r} \rho|u|^2\,d\rho - \operatorname{Im} s(\lambda)|u(r)|^2 - \sigma''|u(r)|^2, \tag{13}$$

где $\lambda_0 = \lambda' + i\lambda''$. Учтём, что функции $I_0(\lambda r)$ и $I_1(\lambda r)$ вещественнозначные на мнимой оси, все нули функций $I_0(\lambda r)$ и $I_1(\lambda r)$ перемежаются [14, с. 191]. Выберем $\lambda_0 = i\widetilde{\beta}$, $\widetilde{\beta} \in \mathbb{R}$, $\widetilde{\beta} > 0$, так, что $I_0(\lambda_0 r) = 0$. Тогда в окрестности точки λ_0 найдутся такие $\lambda_1 = i\beta_1$ и $\lambda_2 = i\beta_2$, что $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, $0 < \beta_1 < \widetilde{\beta} < \beta_2$ и

$$\frac{I_0(\lambda_1 r)}{I_1(\lambda_1 r)}\frac{I_0(\lambda_2 r)}{I_1(\lambda_2 r)} < 0.$$

Следовательно, выражения $\operatorname{Im} s(\lambda_1)$ и $\operatorname{Im} s(\lambda_2)$ имеют разные знаки. Пусть для определённости $\operatorname{Im} s(\lambda_1) > 0$. Функция $s(\lambda)$ непрерывна в окрестности λ_1. Поэтому в δ-окрестности точки λ_1 она сохраняет знак при достаточно малом $\delta > 0$ (при $|\lambda - \lambda_1| < \delta$). Выберем $\lambda_0 = \lambda' + i\lambda''$ так, что $\lambda'' = \beta_1 > 0$, $\lambda' < 0$ и $|\lambda_0 - \lambda_1| < \delta$. Получаем, что все слагаемые в правой части (13) неположительны, $\operatorname{Im}(\mathrm{N}(\lambda_0)u, u) \leqslant 0$. Далее, равенство $\operatorname{Im}(\mathrm{N}(\lambda_0)u, u) = 0$ необходимо влечёт за собой

$$\int\limits_{r_0}^{r} \rho|u|^2\;d\rho = 0,$$

откуда находим, что $u \equiv 0$ (как элемент пространства $H_0^1(r_0, r; \rho)$). Лемма доказана.

Теорема 2. *Спектр оператор-функции* $\mathrm{N}(\lambda) : H_0^1(r_0, r; \rho) \to H_0^1(r_0, r; \rho)$ *является дискретным в поле* $\mathbb{C}$, *т.е. имеет конечное число характеристических чисел конечной алгебраической кратности в любом компакте* K_0.

Утверждение теоремы 2 является следствием теоремы 1, леммы 4 и теоремы о конечно-мероморфной оператор-функции [15].

Заключение. В статье рассмотрена задача на собственные значения о распространении электромагнитных волн в металлодиэлектрическом волноводе кругового поперечного сечения, покрытом графеном. Вариационным методом краевая задача на собственные значения сведена к изучению спектра оператор-функции в пространстве Соболева. Доказаны фредгольмовость и конечно-мероморфность оператор-функции на комплексной плоскости, а также дискретность спектра оператор-функции.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20087).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Geim A.K., Novoselov K.S.* The rise of graphene // Nature Materials. 2007. V. 6. P. 183–191.
2. *Hanson G.W.* Dyadic Green's functions and guided surface waves for a surface conductivity model of graphene // J. of Appl. Phys. 2008. V. 103. Art. 064302.
3. *Falkovsky L.A.* Optical properties of graphene // J. of Phys.: Conf. Ser. 2008. V. 129. Art. 012004.
4. *Mikhailov S.A.* Quantum theory of the third-order nonlinear electrodynamic effects of graphene // Phys. Rev. B. 2016. V. 93. Art. 085403.
5. *Смирнов Ю.Г.* Математические методы исследования задач электродинамики. Пенза, 2009.

6. *Shestopalov Y., Smirnov Y., Smolkin E.* Optical Waveguide Theory. Mathematical Models, Spectral Theory and Numerical Analysis. Springer Ser. in Optical Sciences. V. 237. Singapore, 2022.
7. *Hajian H., Rukhlenko I.D., Leung P.T., Caglayan H., Ozbay E.* Guided plasmon modes of a graphene-coated Kerr slab // Plasmonics. 2016. V. 11. P. 735–741.
8. *Smirnov Y., Tikhov S.* The nonlinear eigenvalue problem of electromagnetic wave propagation in a dielectric layer covered with graphene // Photonics. 2023. V. 10. P. 523.
9. *Смирнов Ю.Г., Тихов С.В., Гусарова Е.В.* О распространении электромагнитных волн в диэлектрическом слое, покрытом графеном // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. 2022. № 3. С. 11–18.
10. *Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.* Специальные функции математической физики. М., 1978.
11. *Adams R.* Sobolev Spaces. New York, 1975.
12. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.
13. *Смирнов Ю.Г., Смолькин Е.Ю.* О дискретности спектра в задаче о нормальных волнах открытого неоднородного волновода // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 10. С. 1298–1309.
14. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М., 1979.
15. *Гохберг И.Ц., Сигал Е.И.* Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете и теоремы Руше // Мат. сб. 1971. Т. 84 (126). № 4. С. 607–629.

Пензенский государственный университет,
Университет Евле, Швеция

Поступила в редакцию 02.06.2023 г.
После доработки 02.06.2023 г.
Принята к публикации 21.08.2023 г.