ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 9, с. 1205–1221

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958

РЕГУЛЯРНОСТЬ ФУНКЦИИ ДАВЛЕНИЯ ДЛЯ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА

© 2023 г. Е. В. Амосова

Изучена нестационарная система уравнений Навье–Стокса для несжимаемой жидкости. На основе регуляризованной задачи, учитывающей релаксацию поля скоростей в соленоидальное поле, обосновано существование функции давления почти всюду в рассматриваемой области для решений из класса Хопфа. С помощью предложенной регуляризации доказано существование более регулярных слабых решений исходной задачи без ограничений малости на исходные данные. В двумерном случае доказана теорема единственности.

DOI: 10.31857/S0374064123090066, EDN: WOUEAU

Введение. При доказательстве корректности начально-краевых задач для уравнений Навье–Стокса обычно используется регуляризация дифференциальных уравнений несжимаемой жидкости. Способы регуляризации, как правило, направлены на добавление слагаемых с малым параметром ε от искомых функций, компенсирующих производную по времени от давления [1]. Далее методом априорных оценок доказываются теоремы существования и единственности решений регуляризованной задачи и выполняется предельный переход по $\varepsilon \to 0$ в регуляризованных уравнениях.

Отметим, что все регуляризованные модели строятся чисто математически, для получения априорных оценок обобщённых решений. В работах [2–4] проведён численный анализ регуляризованных уравнений Навье–Стокса, где малый параметр регуляризации характеризует время релаксации векторного поля скоростей к соленоидальному. При этом появляется естественное условие

$$(\nabla p - \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n} = 0,$$

связывающее градиент функции давления p с вектор-функцией правых частей $\mathbf{f}$ на границе, которое означает отсутствие гидродинамических колебаний на стенке.

В данной работе регуляризованная система дифференциальных уравнений получена добавлением малой поправки к правой части уравнения неразрывности и добавлением граничных условий для функции давления и скорости. Предложенная аппроксимация рассматривается впервые и гарантирует существование функции давления для решения класса Хопфа. На основе новых априорных оценок установлена корректность аппроксимационной задачи. Найденные априорные оценки позволяют обосновать предельный переход регуляризованной задачи к системе уравнений Навье–Стокса с однородными краевыми условиями в нужных функциональных пространствах и установить существование функции давления почти всюду в рассматриваемой области для решения класса Хопфа. Стандартная техника использования неравенства Соболева при получении априорных оценок не позволяет доказать единственность полученного решения в трёхмерном случае. Опираясь на результаты А.В. Фурсикова, доказана регулярность функции давления в двумерном случае в классе слабых решений Хопфа для системы уравнений Навье–Стокса при неоднородных краевых условиях. Доказанное свойство регулярности функции давления играет важную роль при изучении корректности краевых задач динамики вязкого газа, которые описываются нелинейными уравнениями Навье–Стокса для сжимаемых сред.

Для формулировки основного результата введём необходимые функциональные пространства. Через $H^l(\Omega)$, l – натуральное число, обозначим пространство Соболева функций, суммируемых с квадратом вместе с производными до порядка $l > 0$. Пусть $H_0^1(\Omega)$ – замыкание

$C_0^\infty(\Omega)$ в норме $H^1(\Omega)$, $H^{-1}(\Omega)$ – сопряжённое с $H_0^1(\Omega)$ пространство. Норму в пространстве $L^2(\Omega)$ обозначим через $\|\cdot\|$, $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение элементов в $L^2(\Omega)$. Через $X(\Omega;\operatorname{Ker}\{\operatorname{div}\})$ обозначим пространство соленоидальных вектор-функций из X. Пространства функций, состоящие из l раз непрерывно дифференцируемых функций на $\bar\Omega$, обозначим $C^l(\bar\Omega)$.

Введём пространства: $H^\ell = H^\ell(\Omega)$ для скалярных функций, $\mathbf{H}^\ell = \mathbf{H}^\ell(\Omega)$, $\ell\in\mathbb{R}$; для векторных полей

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{u}\in\mathbf{H}^1\colon (\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})|_{\partial\Omega}=0,\ \ \operatorname{div}\mathbf{u}=0\},$$

$$\widehat{\mathbf{V}} = \{\mathbf{u}\in\mathbf{H}^1\colon (\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})|_{\partial\Omega}=0\},\quad \widetilde{H}^2_R=\{h\in H^2\colon (\nabla h\cdot\mathbf{n})|_{\partial\Omega}=0\}.$$

Обозначим $\widetilde{H}_R^{-2}=(\widetilde{H}_R^2)'$, $\bar H^{-\ell}=(H^\ell)'$, $\bar{\mathbf{H}}^{-\ell}=(\mathbf{H}^\ell)'$. Очевидно, что имеют место включения

$$\mathbf{V}\subset\widehat{\mathbf{V}}\subset\mathbf{H}^1\subset\mathbf{L}^2(\Omega)=(\mathbf{L}^2(\Omega))',\quad \widetilde{H}^2_R\subset H^2\subset L^2(\Omega)=(L^2(\Omega))'.$$

Непрерывные вложения по двойственности дают следующие непрерывные вложения:

$$\mathbf{L}^2(\Omega)=(\mathbf{L}^2(\Omega))'\subset\bar{\mathbf{H}}^{-1}\subset\widehat{\mathbf{V}}'\subset\mathbf{V}',\quad L^2(\Omega)=(L^2(\Omega))'\subset\bar H^{-2}\subset\widetilde{H}_R^{-2}.$$

Через $L^2(0,T;X)$ $(C^l(0,T;X))$ обозначим пространство измеримых функций (пространство непрерывных функций, имеющих непрерывные на $[0,T]$ производные до порядка l), отображающих интервал $(0,T)$ (отрезок $[0,T]$) в пространство X, таких что

$$\|f\|^2_{L^2(0,T;X)}=\int\limits_0^T\|f\|_X^2\,dt<\infty,\quad \|f\|^2_{C(0,T;X)}=\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|f\|^2_X\,dt<\infty.$$

Обозначим через

$$s=\begin{cases}2, & \text{если}\ \ n=2,\\ 8/7, & \text{если}\ \ n=3,\end{cases}\tag{1}$$

размерность пространства.

Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n=2,3$, – ограниченная область с границей $\partial\Omega\in C^2$, $Q=(0,T)\times\Omega$, $\Sigma=(0,T)\times\partial\Omega$, $T>0$, – боковая поверхность цилиндрического тела Q.

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнений Навье–Стокса, описывающих движения вязкой однородной несжимаемой жидкости:

$$\partial_t\mathbf{v}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}=\Delta\mathbf{v}-\nabla p+\mathbf{f},\quad \operatorname{div}\mathbf{v}=0,\quad (t,\mathbf{x})\in Q,\tag{2}$$

$$\mathbf{v}|_\Sigma=0,\quad (t,\mathbf{x})\in\Sigma,\tag{3}$$

$$\mathbf{v}|_{t=0}=\mathbf{v}_0(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in\Omega,\tag{4}$$

где $\mathbf{f}$ – внешние массовые силы, Δ – оператор Лапласа, ∇ – оператор градиента.

Предполагается, что известные функции обладают следующими свойствами:

$$\mathbf{f}\in L^2(0,T;\bar{\mathbf{H}}^{-1}),\quad \mathbf{v}_0\in\mathbf{L}^2(\Omega),\quad (\mathbf{v}_0,\nabla q)=0,\quad q\in H^1(\Omega).\tag{5}$$

Обозначим

$$E_0(\mathbf{f},\mathbf{v}_0)=\|\mathbf{f}\|^2_{L^2(0,T;\bar{\mathbf{H}}^{-1})}+\|\mathbf{v}_0\|^2.\tag{6}$$

Определение 1. *Слабым решением задачи* (2)–(4) назовём элемент

$$\mathbf{v}\in L^2(0,T;\mathbf{H}^1_0(\Omega;\operatorname{Ker}\{\operatorname{div}\})),$$

удовлетворяющий интегральному тождеству

$$\int\limits_0^T[-(\mathbf{v},\partial_t\mathbf{w})+\langle(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}^1_0(\Omega)}+(\operatorname{rot}\mathbf{v},\operatorname{rot}\mathbf{w})]\,dt=\int\limits_0^T\langle\mathbf{f},\mathbf{w}\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}^1_0(\Omega)}\,dt$$

для любой вектор-функции $\mathbf{w}\in L^2(0,T;\mathbf{H}^1_0(\Omega;\operatorname{Ker}\{\operatorname{div}\}))$ такой, что $\partial_t\mathbf{w}\in L^2(Q)$, $\mathbf{w}|_{t=T}=0$.

В этом случае элемент $\mathbf{v}$ называют *решением задачи* (2)–(4) *класса Хопфа* [5], про функцию давления ничего не сказано [1, с. 214].

Следуя терминологии, взятой из [1, с. 246], решение класса Хопфа, или решение в смысле определения 1, будем называть “*очень слабым решением*”.

Известно, что в двумерном случае существует единственное решение задачи (2)–(4) класса Хопфа [1, 6]. В трёхмерном случае единственность очень слабого решения установлена либо на малом промежутке времени [7, 8], либо в более узком пространстве, чем в котором установлено существование [7, 8].

В случае когда $\mathbf{f} \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ каждому слабому решению задачи (2)–(4) можно сопоставить соответствующее “поле давления” как распределение [9]. В статье [10] найдены условия на область Ω, при которых обосновано существование функции давления. При ограниченной области регулярность давления зависит от выбора правой части. Так, в [11] показано, что существует по крайней мере одно слабое решение задачи (2)–(4), для которого $p \in W^{-1,\infty}(0,T;L^2(\Omega))$, если $\mathbf{f} \in L^2(0,T;\mathbf{H}^{-1}(\Omega))$. В работе [12] для стохастических уравнений Навье–Стокса найдены априорные оценки на функцию давления без какого-либо предположения о регулярности вектора скорости. Подобные результаты были получены в [13, 14].

В теории гладкости слабых решений уравнений Навье–Стокса важную роль играет свойство частичной регулярности решений, когда решения являются достаточно гладкими всюду, за исключением, быть может, некоторого замкнутого множества. В статье [15] найдены достаточные условия локальной регулярности подходящих слабых решений (хотя бы одно слабое решение Хопфа принадлежит этому классу) нестационарных трёхмерных уравнений Навье–Стокса. Для таких решений в [16] получены достаточные условия того, что точка пространственно-временного цилиндра является регулярной точкой поля скоростей. Доказано, что в зависимости от внешних условий в окрестности регулярной точки поле скоростей может иметь ограниченную осцилляцию или быть непрерывным по Гёльдеру. Показатель непрерывности в данном случае определяется классом функции давления. Полная внутренняя регулярность решений двумерных уравнений системы Навье–Стокса, описывающих течение обобщённой ньютоновской жидкости, исследована в [17]. В работе [18] рассматривается подход к изучению локальной регулярности слабых решений уравнений Навье–Стокса, основанный на сведении вопросов локальной гладкости исходных решений к доказательству теорем лиувиллевского типа для ограниченных обратных по времени решений, соответствующих локальным особенностям исходной задачи.

Известно, что при дополнительной гладкости данных решение задачи (2)–(4) будет регулярным и единственным. Однако вопрос регулярности решения Хопфа при отсутствии дополнительной регулярности на исходные данные остаётся нерешённым со времён работы [5]. Вопрос о гладкости функции давления решения Хопфа задачи (2)–(4) обсуждается в [19].

В данной статье получена новая априорная оценка функции давления для задачи (2)–(4).

Определение 2. *Слабым решением задачи* (2)–(4) назовём пару $(\mathbf{v};p)$ такую, что $\mathbf{v} \in L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)) \bigcap L^2(0,T;\mathbf{H}^1_0(\Omega;\mathrm{Ker}\,\{\mathrm{div}\}))$, $p \in L^s(0,T;L^2(\Omega))$, удовлетворяющую интегральным тождествам

$$\int\limits_0^T [\langle \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}^1_0(\Omega)} + (\mathrm{rot}\,\mathbf{v}, \mathrm{rot}\,\mathbf{u}) - (p, \mathrm{div}\,\mathbf{u})]\,dt = \int\limits_0^T \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}^1_0(\Omega)}\,dt,$$

$$\int\limits_\Omega p\,dx = 0, \quad \int\limits_0^T (\mathrm{div}\,\mathbf{v}, q)\,dx = 0 \tag{7}$$

для произвольных $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1_0(\Omega)$, $q \in L^2(\Omega)$ и условию (4) почти всюду в Ω.

Основным результатом работы является следующая

Теорема 1. *Для любых функций* $\mathbf{f}$, $\mathbf{v}_0$, *удовлетворяющих условиям (5), существует слабое решение в смысле определения 2 задачи (2)–(4), для которого выполняется оценка*

$$\|\mathbf{v}\|^2_{L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} + \int\limits_0^T (\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{H}^1_0(\Omega)} + \|p\|^s)\, dt \leqslant CE_0(\mathbf{f}, \mathbf{v}_0),$$

где постоянная $E_0(\mathbf{f}, \mathbf{v}_0)$ *определена в (6), параметр* s *определён в (1). Причём если* $n = 2$, *то решение задачи (2)–(4) единственно.*

Доказательство теоремы проводится методом регуляризации.

В п. 1 статьи исследуется регуляризованная задача, учитывающая релаксацию поля скоростей в соленоидальное со специально выбранными краевыми условиями. Обосновывается сходимость слабых решений при $\varepsilon \to 0$. Используя предложенную регуляризацию краевой задачи, выводится новая априорная оценка функции давления, гарантирующая ограниченность p почти всюду в данной области. В п. 2 рассматривается система уравнений Навье–Стокса с неоднородными краевыми условиями для данного класса решений.

1. Регуляризованные уравнения Навье–Стокса. Для доказательства разрешимости будем аппроксимировать задачу (2)–(4) регуляризованной задачей. Пусть $\varepsilon > 0$ и выполняются условия (5). Рассмотрим следующую начально-краевую задачу: найти пару функций $(\mathbf{v}_\varepsilon; p_\varepsilon)$, определённых на $Q = \Omega \times (0, T)$, такую, что

$$\partial_t \mathbf{v}_\varepsilon + (\mathbf{v}_\varepsilon \cdot \nabla)\mathbf{v}_\varepsilon = \Delta \mathbf{v}_\varepsilon - \frac{1}{2}(\operatorname{div} \mathbf{v}_\varepsilon)\mathbf{v}_\varepsilon - \nabla p_\varepsilon + \mathbf{f}, \tag{8}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_\varepsilon = \varepsilon \Delta p_\varepsilon, \tag{9}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_\varepsilon}{\partial \mathbf{n}} \times \mathbf{n} = -\frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{v}_\varepsilon \times \mathbf{n}), \quad (\mathbf{v}_\varepsilon \cdot \mathbf{n}) = 0, \quad (\nabla p_\varepsilon \cdot \mathbf{n}) = 0, \quad (t, \mathbf{x}) \in \Sigma, \tag{10}$$

$$\mathbf{v}_\varepsilon|_{t=0} = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{11}$$

Слагаемое $(\operatorname{div} \mathbf{v}_\varepsilon)\mathbf{v}_\varepsilon/2$ в уравнении (8) называется *стабилизирующим* и введено в [1, с. 335].

Определение 3. *Слабым решением задачи* (8)–(11) назовём пару $(\mathbf{v}_\varepsilon; p_\varepsilon)$ такую, что

$$\mathbf{v}_\varepsilon \in L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \bigcap L^2(0, T; \widehat{\mathbf{V}}), \quad p_\varepsilon \in L^s(0, T; \widetilde{H}^2_R),$$

удовлетворяющую тождеству

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{v}_\varepsilon, \mathbf{u}\rangle_{\widehat{\mathbf{V}}' \times \widehat{\mathbf{V}}} + (\nabla \mathbf{v}_\varepsilon, \nabla \mathbf{u}) - (p_\varepsilon, \operatorname{div} \mathbf{u}) + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\partial\Omega} (\mathbf{v}_\varepsilon \cdot \mathbf{u})\, d\sigma =$$

$$= -\left\langle (\mathbf{v}_\varepsilon \cdot \nabla)\mathbf{v}_\varepsilon + \frac{1}{2}(\operatorname{div} \mathbf{v}_\varepsilon)\mathbf{v}_\varepsilon, \mathbf{u} \right\rangle_{\widehat{\mathbf{V}}' \times \widehat{\mathbf{V}}} + \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}\rangle_{\widehat{\mathbf{V}}' \times \widehat{\mathbf{V}}} \quad \text{для п.в.} \quad t \in (0, T), \tag{12}$$

для любой вектор-функции $\mathbf{u} \in \widehat{\mathbf{V}}$, уравнению (9) почти всюду на $(0, T)$ и условию (11) в $(C^\infty_0(\Omega))'$.

Точно также как в [1, с. 335] можно показать справедливость следующего утверждения.

Лемма 1. *Пусть* $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \bigcap L^2(0, T; \widehat{\mathbf{V}})$. *Тогда функция*

$$t \mapsto \left((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{2}(\operatorname{div} \mathbf{u})\mathbf{u} \right) \in L^s(0, T; \widehat{\mathbf{V}}') \tag{13}$$

и справедлива оценка

$$\int\limits_0^T \left\| (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{2}(\operatorname{div} \mathbf{u})\mathbf{u} \right\|^s_{\widehat{\mathbf{V}}'} dt \leqslant C\|\mathbf{u}\|^{2s/s'}_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \|\mathbf{u}\|^2_{L^2(0,T;\widehat{\mathbf{V}})},$$

где параметр s *определён в (1).*

Доказательство. Обозначим через s' сопряжённый показатель к s, $s' = 1/(1-1/s)$. Пусть $\mathbf{w} \in L^{s'}(0,T;\widehat{\mathbf{V}})$ – произвольная вектор-функция. Согласно вложениям $\widehat{\mathbf{V}} \subset \mathbf{H}^1 \subset$ $\subset L^4(\Omega)$ при $n=2,3$

$$u_i \in L^2(0,T;L^4(\Omega)), \quad (\mathbb{D}_i u_j) \in L^2(Q), \quad w_j \in L^{s'}(0,T;\widehat{\mathbf{V}}),$$

здесь $\mathbb{D}_i = \partial/\partial x_i$ – дифференциальный оператор. В силу неравенства Гёльдера $u_i(\mathbb{D}_i u_j)w_j$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, принадлежит $L^1(Q)$. Поэтому

$$I(t) = \int\limits_\Omega \left((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{2}(\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbf{u}\right)\mathbf{w}\,dx \leqslant C\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \tag{14}$$

для п.в. $t \in (0,T)$. Ограниченность выражения, стоящего в правой части (14), зависит от размерности пространства. Для его оценки применим неравенства Соболева [20]:

$$\|\mathbf{u}\|^2_{L^4(\Omega)} \leqslant \beta(\Omega)\|\mathbf{u}\|(\|\mathbf{u}\| + \|\nabla\mathbf{u}\|), \quad \mathbf{u}\in\mathbf{H}^1(\Omega), \quad n=2, \tag{15}$$

$$\|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)} \leqslant \beta(\Omega)\|\mathbf{u}\|^{1/4}(\|\mathbf{u}\| + \|\nabla\mathbf{u}\|)^{3/4}, \quad \mathbf{u}\in\mathbf{H}^1(\Omega), \quad n=3. \tag{16}$$

Подставив (15) или (16) в (14) и проинтегрировав по переменной t от 0 до T, найдём

$$\int\limits_0^T I(t)\,dt \leqslant C\int\limits_0^T (\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\mathbf{u}\|^{1/2}\|\mathbf{u}\|^3_{\mathbf{H}^1(\Omega)})^{1/2}\|\mathbf{w}\|^{1/2}\|\mathbf{w}\|^{1/2}_{\widehat{\mathbf{V}}}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant C\|\mathbf{w}\|^{1/2}_{L^2(0,T;\widehat{\mathbf{V}})}\|\mathbf{u}\|^{1/2}_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\|\mathbf{u}\|^{3/2}_{L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega))}, \quad n=2,$$

$$\int\limits_0^T I(t)\,dt \leqslant C\int\limits_0^T (\|\mathbf{u}\|^{4/3}\|\mathbf{u}\|^{4/3}_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\mathbf{u}\|^{1/3}\|\mathbf{u}\|^{7/3}_{\mathbf{H}^1(\Omega)})^{3/4}\|\mathbf{w}\|_{\widehat{\mathbf{V}}}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant C\|\mathbf{w}\|_{L^8(0,T;\widehat{\mathbf{V}})}\|\mathbf{u}\|^{1/4}_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\|\mathbf{u}\|^{7/4}_{L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega))}, \quad n=3.$$

Получим необходимую оценку

$$\left\|(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{2}(\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbf{u}\right\|_{L^s(0,T;\widehat{\mathbf{V}}')} = \sup_{\|\mathbf{w}\|_{L^{s'}(0,T;\widehat{\mathbf{V}})}=1}\left\langle(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{2}(\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbf{u}, \mathbf{w}\right\rangle_{L^s(0,T;\widehat{\mathbf{V}}')\times L^{s'}(0,T;\widehat{\mathbf{V}})} \leqslant$$

$$\leqslant C\sup_{\|\mathbf{w}\|_{L^{s'}(0,T;\widehat{\mathbf{V}})}=1}\{\|\mathbf{w}\|_{L^{s'}(0,T;\widehat{\mathbf{V}})}\|\mathbf{u}\|^{2/s'}_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\|\mathbf{u}\|^{2/s}_{L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega))}\} \leqslant$$

$$\leqslant C\|\mathbf{u}\|^{2/s'}_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\|\nabla\mathbf{u}\|^{2/s}_{L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega))}.$$

Лемма доказана.

Теорема 2. *Для любых* $\mathbf{f}$, $\mathbf{v}_0$, *удовлетворяющих (5), существует слабое решение задачи (8)–(11), причём если* $n=2$, *то это решение единственно.*

Доказательство. Для фиксированного параметра $\varepsilon > 0$ докажем разрешимость задачи (8)–(11), применяя метод Галёркина. Рассмотрим базис пространства $\widehat{\mathbf{V}}$, состоящий из элементов $\mathbf{u}_j \in \mathbf{H}^1$, определяемых из условий:

$$(\nabla\mathbf{u}_j, \nabla\mathbf{w}) + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\partial\Omega}(\mathbf{u}_j\cdot\mathbf{w})\,d\sigma = \lambda_j(\mathbf{u}_j,\mathbf{w}), \quad j\in\mathbb{N}, \quad \mathbf{w}\in\widehat{\mathbf{V}}.$$

Здесь число $\varepsilon > 0$ фиксировано.

Рассмотрим скалярный базис пространства H^1 из функций $r_j \in H^1$, удовлетворяющих следующей спектральной задаче Неймана:

$$-\Delta r_j = \mu_j(r_j - (\operatorname{mes}\Omega)^{-1}(r_j, 1)), \quad (\nabla r_j \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = 0, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Для каждого m определим приближённое решение задачи (8)–(11) $\mathbf{v}_\varepsilon$, p_ε соотношениями

$$\mathbf{v}_{\varepsilon m}(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\mathbf{u}_j, \quad p_{\varepsilon m}(t) = \sum_{j=1}^{m} s_{jm}(t) r_j.$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных g_{jm}, s_{jm}, $j = \overline{1, m}$:

$$(\partial_t \mathbf{v}_{\varepsilon m}, \mathbf{u}_k) + (\nabla \mathbf{v}_{\varepsilon m}, \nabla \mathbf{u}_k) - (p_{\varepsilon m}, \operatorname{div} \mathbf{u}_k) + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\partial\Omega} (\mathbf{v}_{\varepsilon m} \cdot \mathbf{u}_k)\, d\sigma =$$

$$= -\left((\mathbf{v}_{\varepsilon m} \cdot \nabla)\mathbf{v}_{\varepsilon m} + \frac{1}{2}(\operatorname{div} \mathbf{v}_{\varepsilon m})\mathbf{v}_{\varepsilon m}, \mathbf{u}_k\right) + (\mathbf{f}(t), \mathbf{u}_k), \tag{17}$$

$$(\mathbf{v}_{\varepsilon m}, \nabla r_l) = \varepsilon(\nabla p_{\varepsilon m}, \nabla r_l), \quad (p_{\varepsilon m}, 1) = 0, \quad k = \overline{1, m}, \quad l = \overline{1, m}, \tag{18}$$

$$\mathbf{v}_{\varepsilon m}(0) = \mathbf{v}_{0m}, \tag{19}$$

где $\mathbf{v}_{0m} = \mathrm{P}_m \mathbf{v}_0$, $\mathrm{P}_m \colon \mathbf{L}^2(\Omega) \mapsto \operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ – оператор проектирования.

Уравнения (17), (18) образуют систему нелинейных дифференциальных уравнений относительно функций g_{1m}, g_{2m}, $\ldots$, g_{mm}, s_{1m}, s_{2m}, $\ldots$, s_{mm}. Заметим, что нелинейность задачи Коши (17)–(19) гладкая. Повторяя рассуждения [1, с. 227], можно показать, что существует решение, определённое на некотором промежутке $[0, t_m)$, а приводимые ниже априорные оценки показывают, что фактически $t_m = T$.

Умножим (17) на $g_{jm}(t)$, а (18) на $s_{jm}(t)$ и просуммируем по $j = \overline{1, m}$. Учитывая (9), найдём

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{v}_{\varepsilon m}\|^2 + \|\nabla \mathbf{v}_{\varepsilon m}\|^2 + \varepsilon\|\nabla p_{\varepsilon m}\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|\mathbf{v}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial\Omega)} =$$

$$= (\mathbf{f}, \mathbf{v}_{\varepsilon m}) \leqslant \frac{1}{2}\|\nabla \mathbf{v}_{\varepsilon m}\|^2 + C\|\mathbf{f}\|^2_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}}. \tag{20}$$

Перенося первое слагаемое правой части (20) влево и интегрируя от 0 до t, получаем априорную оценку

$$\|\mathbf{v}_{\varepsilon m}(t)\|^2 + \int\limits_0^t \left(\|\nabla \mathbf{v}_{\varepsilon m}\|^2 + \varepsilon\|\nabla p_{\varepsilon m}\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|\mathbf{v}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial\Omega)}\right) ds \leqslant C E_0(\mathbf{f}, \mathbf{v}_0). \tag{21}$$

Здесь постоянная C не зависит от ε, m.

Получим оценку, гарантирующую компактность последовательности $\mathbf{v}_{\varepsilon m}$ в пространстве $L^2(Q)$. Обозначим

$$\Phi(t) = C\left(\|\nabla \mathbf{v}_{\varepsilon m}(t)\|^2 + \varepsilon\|\nabla p_{\varepsilon m}(t)\|^2 + \|\mathbf{f}(t)\|^2_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}} + \frac{1}{\varepsilon}\|\mathbf{v}_{\varepsilon m}(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial\Omega)}\right), \quad t \in (0, T).$$

Умножим (17) на $g_{jm}(t)$, затем умножим на $(-g_{jm}(\tau))$, просуммируем по $j = \overline{1, m}$, где $\tau, t \in$ $\in (0, T)$. Складывая получившиеся выражения и учитывая (18), получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{v}_{\varepsilon m}(t) - \mathbf{v}_{\varepsilon m}(\tau)\|^2 \leqslant \Phi(t) + \Phi(\tau) + \|\mathbf{v}_{\varepsilon m}(t)\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|\nabla \mathbf{v}_{\varepsilon m}(t)\|\|\mathbf{v}_{\varepsilon m}(\tau)\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по t на отрезке $[\tau,\tau+h]$ и по τ на отрезке $[0,T-h]$. Учитывая (21), точно так же как и в [21] имеем оценку равностепенной непрерывности для последовательности $\mathbf{v}_{\varepsilon m}$:

$$\int\limits_0^{T-h} \|\mathbf{v}_{\varepsilon m}(\tau+h)-\mathbf{v}_{\varepsilon m}(\tau)\|^2\,d\tau \leqslant Ch^{1/2}. \tag{22}$$

Как следствие неравенства (21) из (18) получим оценку равностепенной непрерывности для последовательности $\nabla p_{\varepsilon m}$. Рассмотрим выражение

$$\varepsilon\int\limits_0^{T-h} \|\nabla p_{\varepsilon m}(\tau+h)-\nabla p_{\varepsilon m}(\tau)\|^2\,d\tau =$$

$$=\varepsilon\int\limits_0^{T-h}(\nabla p_{\varepsilon m}(\tau+h),\nabla p_{\varepsilon m}(\tau+h))\,d\tau+\varepsilon\int\limits_0^{T-h}(\nabla p_{\varepsilon m}(\tau),\nabla p_{\varepsilon m}(\tau))\,d\tau-$$

$$-2\varepsilon\int\limits_0^{T-h}(\nabla p_{\varepsilon m}(\tau+h),\nabla p_{\varepsilon m}(\tau))\,d\tau=$$

$$=\int\limits_0^{T-h}(\mathbf{v}_{\varepsilon m}(\tau+h),\nabla p_{\varepsilon m}(\tau+h))\,d\tau+\int\limits_0^{T-h}(\mathbf{v}_{\varepsilon m}(\tau),\nabla p_{\varepsilon m}(\tau))\,d\tau-$$

$$-\int\limits_0^{T-h}(\mathbf{v}_{\varepsilon m}(\tau),\nabla p_{\varepsilon m}(\tau+h))\,d\tau-\int\limits_0^{T-h}(\mathbf{v}_{\varepsilon m}(\tau+h),\nabla p_{\varepsilon m}(\tau))\,d\tau=$$

$$=\int\limits_0^{T-h}(\mathbf{v}_{\varepsilon m}(\tau+h)-\mathbf{v}_{\varepsilon m}(\tau),\nabla p_{\varepsilon m}(\tau+h)-\nabla p_{\varepsilon m}(\tau))\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_0^{T-h}\|\mathbf{v}_{\varepsilon m}(\tau+h)-\mathbf{v}_{\varepsilon m}(\tau)\|^2\,d\tau+\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^{T-h}\|\nabla p_{\varepsilon m}(\tau+h)-\nabla p_{\varepsilon m}(\tau)\|^2\,d\tau.$$

Перенеся последнее слагаемое влево, найдём

$$\varepsilon^2\int\limits_0^{T-h}\|\nabla p_{\varepsilon m}(\tau+h)-\nabla p_{\varepsilon m}(\tau)\|^2\,d\tau\leqslant Ch^{1/2}. \tag{23}$$

Отметим, что в оценках (21)–(23) постоянная C не зависит от m и ε, а $E_0(\mathbf{f},\mathbf{v}_0)$ определена в (6).

Перейдём к пределу при $m\to\infty$ в (17)–(19), используя оценки (21)–(23).

Существует последовательность $m'\to\infty$ такая, что

$$\mathbf{v}_{\varepsilon m'}\to\mathbf{v}_\varepsilon \quad \text{слабо в } \ L^2(0,T;\mathbf{H}^1), \quad *\text{-слабо в } \ L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)), \quad \text{сильно в } \ \mathbf{L}^2(Q),$$

$$p_{\varepsilon m'}\to p_\varepsilon \quad \text{слабо в } \ L^2(0,T;H^2), \quad \text{сильно в } \ L^2(0,T;H^1). \tag{24}$$

Пусть $\psi \in C[0,T]$, $\psi(T)=0$. Умножим (17), (18) на $\psi(t)$ и проинтегрируем от 0 до T:

$$-\int_0^T (\mathbf{v}_{\varepsilon m'}, \mathbf{u}_k\psi'(t))\,dt + (\mathbf{v}_{0m'}, \mathbf{u}_k\psi(0)) +$$

$$+\int_0^T [(\nabla\mathbf{v}_{\varepsilon m'}, \nabla\mathbf{u}_k\psi(t)) - (p_{\varepsilon m'}, \operatorname{div}\mathbf{u}_k\psi(t))]\,dt + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T\int_{\partial\Omega} (\mathbf{v}_{\varepsilon m'}\cdot\mathbf{u}_k)\,d\sigma\,dt =$$

$$= -\int_0^T \left((\mathbf{v}_{\varepsilon m'}\cdot\nabla)\mathbf{v}_{\varepsilon m'} + \frac{1}{2}(\operatorname{div}\mathbf{v}_{\varepsilon m'})\mathbf{v}_{\varepsilon m'}, \mathbf{u}_k\psi(t)\right)dt + \int_0^T (\mathbf{f}(t), \mathbf{u}_k\psi(t))\,dt, \tag{25}$$

$$\int_0^T (\operatorname{div}\mathbf{v}_{\varepsilon m'}, r_l\psi(t))\,dt = -\int_0^T \varepsilon(\nabla p_{\varepsilon m'}, \nabla r_l\psi(t))\,dt, \quad k=\overline{1,m}, \quad l=\overline{1,m}. \tag{26}$$

Используя (24), перейдём к пределу при $m'\to\infty$ в линейных слагаемых (25) и в (26). В нелинейных слагаемых (25) предельный переход осуществим следующим образом:

$$\int_0^T \left((\mathbf{v}_{\varepsilon m'}\cdot\nabla)\mathbf{v}_{\varepsilon m'} + \frac{1}{2}(\operatorname{div}\mathbf{v}_{\varepsilon m'})\mathbf{v}_{\varepsilon m'}, \mathbf{u}_k\psi(t)\right)dt - \int_0^T \left((\mathbf{v}_\varepsilon\cdot\nabla)\mathbf{v}_\varepsilon + \frac{1}{2}(\operatorname{div}\mathbf{v}_\varepsilon)\mathbf{v}_\varepsilon, \mathbf{u}_k\psi(t)\right)dt =$$

$$= -\int_0^T [(\mathbf{v}_{\varepsilon m'}\cdot\nabla)\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_{\varepsilon m'} - (\mathbf{v}_\varepsilon\cdot\nabla)\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_\varepsilon]\psi(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega [(\operatorname{div}\mathbf{v}_{\varepsilon m'})\mathbf{v}_{\varepsilon m'} - (\operatorname{div}\mathbf{v}_\varepsilon)\mathbf{v}_\varepsilon]\mathbf{u}_k\psi(t)\,dx\,dt =$$

$$= -\int_0^T [(\mathbf{v}_{\varepsilon m'}\cdot\nabla)\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_{\varepsilon m'} - (\mathbf{v}_\varepsilon\cdot\nabla)\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_\varepsilon]\psi(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega (\operatorname{div}\mathbf{v}_{\varepsilon m'} - \operatorname{div}\mathbf{v}_\varepsilon)\mathbf{v}_\varepsilon\mathbf{u}_k\psi(t)\,dx\,dt -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega (\operatorname{div}\mathbf{v}_{\varepsilon m'})(\mathbf{v}_{\varepsilon m'} - \mathbf{v}_\varepsilon)\mathbf{u}_k\psi(t)\,dx\,dt \to 0 \quad \text{при} \quad m'\to\infty.$$

Мы показали, что $(\mathbf{v}_\varepsilon; p_\varepsilon)$ – слабое решение задачи (8)–(11), удовлетворяющее оценке

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon(t)\|^2 + \int_0^t \left(\|\nabla\mathbf{v}_\varepsilon\|^2 + \varepsilon\|\nabla p_\varepsilon\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|\mathbf{v}_\varepsilon\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial\Omega)}\right)ds \leqslant CE_0(\mathbf{f}, \mathbf{v}_0). \tag{27}$$

Здесь постоянная C не зависит от ε, $E_0(\mathbf{f}, \mathbf{v}_0)$ определена в (6).

Теперь если $\mathbf{v}_\varepsilon$, p_ε удовлетворяют (12), (9), то согласно (13) уравнение (12) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\langle\mathbf{v}_\varepsilon, \mathbf{u}\rangle_{\widehat{\mathbf{V}}'\times\widehat{\mathbf{V}}} = -(\nabla\mathbf{v}_\varepsilon, \nabla\mathbf{u}) + (p_\varepsilon, \operatorname{div}\mathbf{u}) + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\partial\Omega} (\mathbf{v}_\varepsilon\cdot\mathbf{u})\,d\sigma -$$

$$-\left\langle (\mathbf{v}_\varepsilon\cdot\nabla)\mathbf{v}_\varepsilon + \frac{1}{2}(\operatorname{div}\mathbf{v}_\varepsilon)\mathbf{v}_\varepsilon, \mathbf{u}\right\rangle_{\widehat{\mathbf{V}}'\times\widehat{\mathbf{V}}} + \langle\mathbf{f}, \mathbf{u}\rangle_{\widehat{\mathbf{V}}'\times\widehat{\mathbf{V}}}$$

для любой $\mathbf{u}\in\widehat{\mathbf{V}}$.

Отсюда и из леммы 1.1 [1] следует, что $\partial_t \mathbf{v}_\varepsilon \in L^s(0,T;\widehat{\mathbf{V}}')$, где параметр s определён в (1) и вектор-функция $\mathbf{v}_\varepsilon$ п.в. равняется некоторой непрерывной функции из $[0,T]$ в $\widehat{\mathbf{V}}'$. Таким образом, условие (11) имеет смысл.

В случае $n=2$ единственность слабого решения задачи (8)–(11) устанавливается аналогично [1]. Теорема доказана.

Получим дополнительную априорную оценку для p_ε. Во-первых, покажем, что p_ε удовлетворяет однородному начальному условию. В теореме 2 установлено, что условие (11) понимается в таком смысле:

$$\langle \mathbf{v}_\varepsilon(t), \mathbf{u}\rangle_{\widehat{\mathbf{V}}'\times\widehat{\mathbf{V}}} \to \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{u}\rangle_{\widehat{\mathbf{V}}'\times\widehat{\mathbf{V}}} \quad \text{при} \quad t\to 0$$

для произвольной $\mathbf{u}\in\widehat{\mathbf{V}}$.

Обозначим

$$\widetilde{H}^2 = \{h\in\widetilde{H}^2_R\colon (h,1)=0\}, \quad \widetilde{H}^{-2} = (\widetilde{H}^2)'.$$

Справедливы непрерывные вложения

$$\widetilde{H}^2 \subset L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))' \subset \widetilde{H}^{-2}.$$

Из теории разрешимости краевых эллиптических задач следует, что существует оператор

$$\mathrm{R}\colon \{r\in L^2(\Omega), \ \ (r,1)=0\} \mapsto \widetilde{H}^2$$

такой, что $b=\mathrm{R}(r)$, если

$$\Delta b = r, \quad (b,1)=0, \quad (\nabla b\cdot\mathbf{n})|_{\partial\Omega} = 0. \tag{28}$$

Тогда

$$\|\mathrm{R}(r)\|^2_{\widetilde{H}^2} \leqslant C\|r\|^2. \tag{29}$$

Пусть $g\in L^2(\Omega)$. Для функции $\pi\in\widetilde{H}^2$, удовлетворяющей условиям

$$\Delta\pi = g, \quad (\pi,1)=0, \quad (\nabla\pi\cdot\mathbf{n})|_{\partial\Omega}=0,$$

справедлива оценка

$$\|\pi\|^2 \leqslant C\|g\|^2_{\widetilde{H}^{-2}}. \tag{30}$$

Действительно. Пусть $r\in L^2(\Omega)$, а b – решение задачи (28). Применив формулу Грина, найдём

$$(\pi, r) = (g, b).$$

С учётом (29) получим

$$\|\pi\| = \sup_{\|r\|=1}(\pi,r) = \sup_{\|r\|=1}(g,b) = \sup_{\|r\|=1}\langle g,b\rangle_{\widetilde{H}^{-2}\times\widetilde{H}^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|r\|=1}\{\|g\|_{\widetilde{H}^{-2}}\|b\|_{\widetilde{H}^2}\} \leqslant \sup_{\|r\|=1}\{C\|g\|_{\widetilde{H}^{-2}}\|r\|\} \leqslant C\|g\|_{\widetilde{H}^{-2}}.$$

Рассмотрим вариационную задачу. Пусть $g\in\widetilde{H}^{-2}$. Требуется определить функцию $\pi\in$ $\in L^2(\Omega)$ такую, что

$$(\pi, \Delta b) = \langle g, b\rangle_{\widetilde{H}^{-2}\times\widetilde{H}^2}, \quad b\in\widetilde{H}^2. \tag{31}$$

Лемма 2. *Для произвольной функции $g\in\widetilde{H}^{-2}$ задача (31) имеет единственное решение $\pi\in L^2(\Omega)$, удовлетворяющее оценке*

$$\|\pi\|^2 \leqslant C\|g\|^2_{\widetilde{H}^{-2}}.$$

Доказательство. Единственность следует непосредственно, если положить $g = 0$, а $\Delta b = \pi$ в (31). Докажем существование. Пусть $g \in \widetilde{H}^{-2}$. Вложение $(L^2(\Omega)/R) \subset \widetilde{H}^{-2}$ плотно. Следовательно, существует последовательность $\{g_n\} \in L^2(\Omega)$ такая, что $g_n \to g$ в $\widetilde{H}^{-2}$. Пусть $\pi_n \in \widetilde{H}^2$ удовлетворяет условиям:

$$\Delta\pi_n = g_n, \quad (\pi_n, 1) = 0, \quad (\nabla\pi_n \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = 0.$$

Справедлива оценка (30), из которой заключаем, что существует $\widetilde{\pi}$ и $\pi_n \to \widetilde{\pi}$ слабо в $L^2(\Omega)$. Переходя к пределу по $n \to \infty$ в равенстве

$$(\pi_n, r) = (g_n, b), \quad r \in L^2(\Omega),$$

где b – решение (28), и учитывая единственность задачи (31), получаем, что $\widetilde{\pi} = \pi$. Лемма доказана.

В теореме 2 установлено, что $\mathbf{v}_\varepsilon(t) \in \widehat{\mathbf{V}}'$ для всех $t \in [0, T]$. Отсюда заключаем, что $\operatorname{div} \mathbf{v}_\varepsilon(t) \in \widetilde{H}_R^{-2} \subset \widetilde{H}^{-2}$ для всех $t \in (0, T)$.

Пусть $r \in L^2(\Omega)$, b – решение (28). Умножив первое уравнение (9) на $b \in \widetilde{H}^2$ и применив формулу Грина, получим равенство

$$(\varepsilon\tilde{p}_\varepsilon(t), r) = \langle \operatorname{div} \mathbf{v}_\varepsilon(t), b\rangle_{\widetilde{H}^{-2}\times\widetilde{H}^2}, \quad r \in L^2(\Omega), \tag{32}$$

где $\tilde{p}_\varepsilon = p_\varepsilon - (\mathrm{mes}\Omega)^{-1}(p_\varepsilon, 1)$. Вследствие леммы 2 из (32) заключаем, что $\tilde{p}_\varepsilon(t) \in L^2(\Omega)$. Из (32) также найдём

$$-(\varepsilon\tilde{p}_\varepsilon(t), r) = \langle \mathbf{v}_\varepsilon(t), \nabla b\rangle_{\widehat{\mathbf{V}}'\times\widehat{\mathbf{V}}} \to (\mathbf{v}_0, \nabla b) = 0, \quad r \in L^2(\Omega),$$

где b – решение (28).

Мы показали, что

$$\tilde{p}_\varepsilon|_{t=0} = 0 \quad \text{п.в. в } \Omega. \tag{33}$$

Далее покажем, что сужение на границу вектора вихря скорости $(\operatorname{rot} \mathbf{v}_\varepsilon \times \mathbf{n})|_\Sigma$ введено корректно в некотором функциональном пространстве.

Рассмотрим вспомогательную задачу: в области Q найти пару $(\mathbf{w}; \chi)$, удовлетворяющую условиям

$$\partial_t\mathbf{w} + \Delta\mathbf{w} + \nabla\chi = \mathbf{z}, \quad \operatorname{div} \mathbf{w} = 0, \tag{34}$$

$$(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) = 0, \quad (\operatorname{rot} \mathbf{w} \times \mathbf{n}) = 0, \quad (t, \mathbf{x}) \in \Sigma, \tag{35}$$

$$\mathbf{w}|_{t=T} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{36}$$

Задача (34)–(36) является обратно-временно́й задачей Стокса.

Определение 4. Пусть $\mathbf{z} \in L^2(0, T; \widehat{\mathbf{V}}')$. *Слабым решением задачи* (34)–(36) назовём вектор-функцию $\mathbf{w} \in L^2(0, T; \mathbf{V})$, которая удовлетворяет равенству

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{w}, \mathbf{y}) - (\operatorname{rot} \mathbf{w}, \operatorname{rot} \mathbf{y}) = \langle \mathbf{z}, \mathbf{y}\rangle_{\mathbf{V}'\times\mathbf{V}}, \quad \mathbf{y} \in \mathbf{V}. \tag{37}$$

Точно так же как в монографии [1] докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Для произвольной функции* $\mathbf{z} \in L^2(0, T; \widehat{\mathbf{V}}')$ *существует единственное слабое решение задачи (34)–(36) такое, что* $\partial_t\mathbf{w} \in L^2(0, T; \mathbf{V}')$ *и при этом* $\mathbf{w} \in C([0, T]; \mathbf{L}^2(\Omega))$.

В дальнейшем нам понадобятся более регулярные свойства слабого решения задачи (34)–(36).

Лемма 3. *Пусть* $\mathbf{z} \in L^\ell(0, T; \widehat{\mathbf{V}}')$, $2 \leqslant \ell < \infty$. *Тогда слабым решением задачи (34)–(36) является функция* $\mathbf{w} \in L^\ell(0, T; \mathbf{V})$, $\partial_t\mathbf{w} \in L^\ell(0, T; \mathbf{V}')$, *и справедлива оценка*

$$\|\mathbf{w}\|^\ell_{L^\ell(0,T;\mathbf{V})} + \|\partial_t\mathbf{w}\|^\ell_{L^\ell(0,T;\mathbf{V}')} \leqslant C\|\mathbf{z}\|^\ell_{L^\ell(0,T;\widehat{\mathbf{V}}')}.$$

Для доказательства леммы 3 умножим (37) на произвольную функцию $\xi \in L^{l/(l-1)}(0,T)$ такую, что $\xi' \in L^1(0,T)$, $\xi(0)=0$, и проинтегрируем получившееся выражение от 0 до T. Применяя неравенство Гёльдера [20] с сопряжёнными показателями l, $l \geqslant 2$ и $l' = l/(l-1)$, и учитывая (37), получаем требуемую оценку.

Будем искать векторное поле $\mathbf{a}$ из условий

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{j}, \quad \operatorname{div}\mathbf{a} = 0, \quad (\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})|_\Sigma = 0. \tag{38}$$

Относительно разрешимости задачи (38) справедлива следующая

Теорема 4 [22]. *Пусть Ω – односвязная область с границей $\partial\Omega \in C^2$. Если $\mathbf{j} \in W^{l-1}_m(\Omega)$, $m > 1$, то справедлива оценка*

$$\|\mathbf{a}\|_{W^l_m(\Omega)} \leqslant C\|\mathbf{j}\|_{W^{l-1}_m}. \tag{39}$$

Пусть $\mathbf{j} = \operatorname{rot}\mathbf{v}_\varepsilon$, тогда согласно (38), (39)

$$\|\mathbf{a}\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^1)} \leqslant C\|\operatorname{rot}\mathbf{v}_\varepsilon\|_{L^2(Q)}.$$

Заметим, что вследствие (9), (38) векторное поле $\mathbf{a} \in L^2(0,T;\mathbf{V})$ определяется равенством

$$\mathbf{a} = \mathbf{v}_\varepsilon - \varepsilon\nabla p_\varepsilon. \tag{40}$$

Обозначим

$$\mathbf{s} = (\mathbf{v}_\varepsilon\cdot\nabla)\mathbf{v}_\varepsilon + \frac{1}{2}(\operatorname{div}\mathbf{v}_\varepsilon)\mathbf{v}_\varepsilon - \nabla\operatorname{div}\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{f}. \tag{41}$$

Согласно лемме 1 и условиям (5) функция $t \mapsto \mathbf{s}(t) \in L^s(0,T;\widehat{\mathbf{V}}')$ и выполняется оценка

$$\|\mathbf{s}\|_{L^s(0,T;\widehat{\mathbf{V}}')} \leqslant CE_0(\mathbf{f},\mathbf{v}_0), \tag{42}$$

где постоянная $E_0(\mathbf{f},\mathbf{v}_0)$ определена в (6).

Пусть $\mathbf{z} \in L^{s'}(0,T;\widehat{\mathbf{V}}')$ – произвольная вектор-функция, s' – сопряжённый показатель s, $s' = 1/(1-1/s)$, где параметр s определён в (1), и $\mathbf{w}$ – слабое решение задачи (34)–(36). Из (12) с учётом (37), (40), (41), применив формулу Грина и интегрирование по частям, получим равенство

$$\int_0^T \langle(\operatorname{rot}\mathbf{v}_\varepsilon\times\mathbf{n}),\mathbf{w}\rangle_{\mathbf{H}^{-1/2}(\partial\Omega)\times\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)}\,dt = \int_0^T [\langle\mathbf{s},\mathbf{w}\rangle_{\mathbf{V}'\times\mathbf{V}} - \langle\mathbf{z},\mathbf{a}\rangle_{\mathbf{V}'\times\mathbf{V}}]\,dt - (\mathbf{v}_0,\mathbf{w}(0)). \tag{43}$$

Мы показали, что существует след на границу области вектора вихря

$$(\operatorname{rot}\mathbf{v}_\varepsilon\times\mathbf{n})|_\Sigma\colon L^s(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)) \mapsto L^s(0,T;\mathbf{H}^{-1/2}(\partial\Omega)), \quad s>1,$$

определяемый формулой (43), для которого вследствие теоремы 3 и леммы 3 справедлива оценка

$$\|\operatorname{rot}\mathbf{v}_\varepsilon\times\mathbf{n}\|^s_{L^s(0,T;\mathbf{H}^{-1/2}(\partial\Omega))} \leqslant C(\|\operatorname{rot}\mathbf{v}_\varepsilon\|^2_{L^2(Q)} + \|\mathbf{s}\|^s_{L^s(0,T;\widehat{\mathbf{V}}')} + \|\mathbf{v}_0\|^2). \tag{44}$$

Рассмотрим вариационную задачу. Пусть Ω – ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$, $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{h}$ – заданные вектор-функции. Найти пару $(\mathbf{g};\pi)$, удовлетворяющую условиям

$$(\operatorname{rot}\mathbf{g},\operatorname{rot}\mathbf{g}_1) - (\pi,\operatorname{div}\mathbf{g}_1) = -\langle\mathbf{s}_1,\mathbf{g}_1\rangle_{\widehat{\mathbf{V}}'\times\widehat{\mathbf{V}}} - \langle\mathbf{h},\mathbf{g}_1\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega)\times H^{1/2}(\partial\Omega)},$$

$$\langle\nabla\pi_1,\mathbf{g}\rangle_{\mathbf{V}'\times\mathbf{V}} = 0, \quad \mathbf{g}_1 \in \widehat{\mathbf{V}}, \quad \pi_1 \in L^2(\Omega), \quad (\pi_1,1) = 0. \tag{45}$$

Теорема 5. *Если $\mathbf{s}_1 \in \widehat{\mathbf{V}}'$, $\mathbf{h} \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$, то существует обобщённое решение задачи (45) и справедлива априорная оценка*

$$\|\mathbf{g}\|_{\widehat{\mathbf{V}}} + \|\pi\|_{L^2(\Omega/\mathbb{R})} \leqslant C(\|\mathbf{s}_1\|_{\widehat{\mathbf{V}}'} + \|\mathbf{h}\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}). \tag{46}$$

Доказательство теоремы 5 проводится аналогично доказательству теоремы 2 в работе [23].

Пусть $\mathbf{s}_1 \in L^s(0,T;\widehat{\mathbf{V}}')$, $\mathbf{h} \in L^s(0,T;H^{-1/2}(\partial\Omega))$, где параметр s определён в (1). Тогда условия (45), (46) останутся верными для п.в. $t \in (0,T)$. Учитывая (42), (44), выберем $(\mathbf{h} \times \times\, \mathbf{n}) = (\operatorname{rot}\mathbf{v}_\varepsilon \times \mathbf{n})|_\Sigma$, $\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}$ в (45), (46). Запишем первое равенство (45) в следующем виде:

$$\langle \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{g}, \mathbf{g}_1\rangle_{\widehat{\mathbf{V}}'\times\widehat{\mathbf{V}}} - (\pi, \operatorname{div}\mathbf{g}_1) = -\langle \mathbf{s}, \mathbf{g}_1\rangle_{\widehat{\mathbf{V}}'\times\widehat{\mathbf{V}}}, \quad \mathbf{g}_1 \in L^\infty(0,T;\widehat{\mathbf{V}}).$$

Используя формулу Грина и выбирая $\mathbf{g}_1 = \nabla q$, где $q \in L^\infty(0,T;\widetilde{H}^2_R)$ – произвольная функция, из последнего равенства найдём

$$\langle \Delta\pi + \operatorname{div}\mathbf{s}, q\rangle_{\widetilde{H}^{-2}_R\times\widetilde{H}^2_R} = \langle(\nabla\pi + [\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v}_\varepsilon + \mathbf{s}])\cdot\mathbf{n}, q\rangle_{H^{-3/2}(\partial\Omega)\times H^{3/2}(\partial\Omega)}. \tag{47}$$

Запишем равенство (12), учитывая (41), в виде

$$\langle \partial_t\mathbf{v}_\varepsilon + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v}_\varepsilon + \mathbf{s} + \nabla p_\varepsilon, \mathbf{w}_1\rangle_{\widehat{\mathbf{V}}'\times\widehat{\mathbf{V}}} = 0, \quad \mathbf{w}_1 \in L^\infty(0,T;\widehat{\mathbf{V}}). \tag{48}$$

В теореме 2 установлено, что $\partial_t\mathbf{v}_\varepsilon \in L^s(0,T;\widehat{\mathbf{V}}')$, где параметр s определён в (1), и, следовательно, $\varepsilon\partial_t\Delta p_\varepsilon = \partial_t(\operatorname{div}\mathbf{v}_\varepsilon) \in L^s(0,T;\widetilde{H}^{-2}_R)$.

Применим формулу Грина в (48) и положим $\mathbf{w}_1 = \nabla q$, где $q \in L^\infty(0,T;\widetilde{H}^2_R)$ – произвольная функция. Из (48), учитывая (9), (10), получаем

$$\langle \varepsilon\partial_t\Delta p_\varepsilon + \Delta p_\varepsilon + \operatorname{div}\mathbf{s}, q\rangle_{\widetilde{H}^{-2}_R\times\widetilde{H}^2_R} = \langle[\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v}_\varepsilon + \mathbf{s}]\cdot\mathbf{n}, q\rangle_{H^{-3/2}(\partial\Omega)\times H^{3/2}(\partial\Omega)}. \tag{49}$$

Сравнивая (47) и (49), запишем равенство

$$\langle \varepsilon\partial_t\Delta p_\varepsilon + \Delta p_\varepsilon - \Delta\pi, q\rangle_{\widetilde{H}^{-2}_R\times\widetilde{H}^2_R} + \langle\nabla\pi\cdot\mathbf{n}, q\rangle_{H^{-3/2}(\partial\Omega)\times H^{3/2}(\partial\Omega)} = 0 \tag{50}$$

для п.в. $t \in (0,T)$ и любых $q \in L^\infty(0,T;\widetilde{H}^2_R)$.

Пусть $q = \mathrm{R}(\tilde{p}_\varepsilon) + (\operatorname{mes}\Omega)^{-1}(q,1)$, где оператор R определён в (28), $\tilde{p}_\varepsilon = p_\varepsilon - (\operatorname{mes}\Omega)^{-1}(p_\varepsilon,1)$, $\tilde{\pi} = \pi - (\operatorname{mes}\Omega)^{-1}(\pi,1)$. Применив вторую формулу Грина в (50), с учётом краевых условий (10) будем иметь

$$\varepsilon(\partial_t\tilde{p}_\varepsilon, \tilde{p}_\varepsilon) + (\tilde{p}_\varepsilon, \tilde{p}_\varepsilon) = (\tilde{\pi}, \tilde{p}_\varepsilon) \quad \text{для п.в.} \ \ t \in (0,T). \tag{51}$$

Запишем первое слагаемое в (51) в виде

$$\varepsilon(\partial_t\tilde{p}_\varepsilon, \tilde{p}_\varepsilon) = (\varepsilon/s)\|\tilde{p}_\varepsilon\|^{2-s}\frac{d}{dt}\|\tilde{p}_\varepsilon\|^s,$$

где параметр s определён в (1). Из (51) найдём

$$\frac{\varepsilon}{s}\|\tilde{p}_\varepsilon(t)\|^{2-s}\frac{d}{dt}\|\tilde{p}_\varepsilon(t)\|^s + \|\tilde{p}_\varepsilon(t)\|^{2-s}\|\tilde{p}_\varepsilon(t)\|^s = (\tilde{\pi}, \tilde{p}_\varepsilon) \leqslant \|\tilde{\pi}(t)\|\|\tilde{p}_\varepsilon(t)\| \quad \text{для п.в.} \ \ t \in (0,T),$$

так что или $\|\tilde{p}_\varepsilon(t)\| = 0$, или

$$\frac{\varepsilon}{s}\frac{d}{dt}\|\tilde{p}_\varepsilon(t)\|^s + \frac{1}{2}\|\tilde{p}_\varepsilon(t)\|^s \leqslant \|\tilde{\pi}(t)\|^s.$$

Но $\|\tilde{p}_\varepsilon(t)\|$ есть непрерывная функция от t, поэтому для всех t, учитывая (33), имеем

$$\varepsilon\|\tilde{p}_\varepsilon(t)\|^s + \int\limits_0^t \|\tilde{p}_\varepsilon(\tau)\|^s\,ds \leqslant C\int\limits_0^t \|\tilde{\pi}(\tau)\|^s\,d\tau, \quad t \in (0,T), \tag{52}$$

где постоянная C не зависит от ε.

Заметим, что из (46) при $\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}$, $(\mathbf{h}\times\mathbf{n}) = (\operatorname{rot}\mathbf{v}_\varepsilon\times\mathbf{n})|_{\partial\Omega}$ в силу оценок (27), (42), (44) следует неравенство

$$\|\tilde\pi\|^s_{L^s(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant \|\mathbf{s}\|^s_{L^s(0,T;\widehat{\mathbf{V}}')} + \|\operatorname{rot}\mathbf{v}_\varepsilon\times\mathbf{n}\|^s_{L^s(0,T;H^{-1/2}\partial\Omega)} \leqslant CE_0(\mathbf{f},\mathbf{v}_0). \tag{53}$$

Из (52), учитывая (53), получаем следующую оценку:

$$\varepsilon\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\tilde p_\varepsilon\|^s + \int\limits_0^T \|\tilde p_\varepsilon\|^s\,d\tau \leqslant CE_0(\mathbf{f},\mathbf{v}_0), \tag{54}$$

где постоянная C не зависит от ε.

Доказательство теоремы 1. Пусть $n=2,3$ и $\mathbf{v}_\varepsilon$, p_ε – слабое решение задачи (8)–(11) в смысле определения 3. Построенные в теореме 2 решения $(\mathbf{v}_\varepsilon,\ p_\varepsilon)$ удовлетворяют оценкам (21), (22), (54). Можно выделить подпоследовательность – обозначим её также $(\mathbf{v}_\varepsilon;p_\varepsilon)$:

$$\begin{gathered}\mathbf{v}_\varepsilon\to\mathbf{v}^*\quad\text{слабо в}\ \ L^2(0,T;\mathbf{H}^1_0(\Omega)),\quad *\text{-слабо в}\ \ L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)),\quad\text{сильно в}\ \ \mathbf{L}^2(Q),\\ (\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{v}_\varepsilon\to\mathbf{q}\quad\text{слабо в}\ \ L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\partial\Omega)),\\ \sqrt{\varepsilon}\nabla\tilde p_\varepsilon\to\chi\quad\text{слабо в}\ \ L^2(Q),\\ \tilde p_\varepsilon\to p^*\quad\text{слабо в}\ \ L^2(Q)\quad\text{при}\ \ n=2,\\ \tilde p_\varepsilon\to p^*\quad\text{слабо в}\ \ L^{8/7}(0,T;L^2(\Omega))\quad\text{при}\ \ n=3.\end{gathered} \tag{55}$$

Используя (55), перейдём к пределу при $\varepsilon\to0$ в (9), (10). Рассмотрим

$$(\operatorname{div}\mathbf{v}_\varepsilon,q) = -\varepsilon(\nabla\tilde p_\varepsilon,\nabla q)\to\sqrt{\varepsilon}(\chi,\nabla q)\to 0,\quad q\in H^1(\Omega),$$

для п.в. $t\in(0,T)$. Следовательно, $\operatorname{div}\mathbf{v}_\varepsilon=0$ в смысле теории распределений. Рассуждая аналогично, получаем

$$(\mathbf{v}_\varepsilon,\mathbf{q}_1)_{\mathbf{L}^2(\partial\Omega)}\to\sqrt{\varepsilon}(\mathbf{q},\mathbf{q}_1)_{L^2(\partial\Omega)}\to0,\quad \mathbf{q}_1\in\mathbf{L}^2(\partial\Omega),$$

для п.в. $t\in(0,T)$. Следовательно, $\mathbf{v}_\varepsilon=0$ для п.в. $(t,\mathbf{x})\in\Sigma$.

Пусть $\mathbf{u}\in\mathbf{H}^1_0(\Omega)$. Запишем (12) в виде

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_\varepsilon,\mathbf{u}) + \langle(\mathbf{v}_\varepsilon\cdot\nabla)\mathbf{v}_\varepsilon,\mathbf{u}\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}^1_0(\Omega)} + (\operatorname{rot}\mathbf{v}_\varepsilon,\operatorname{rot}\mathbf{u}) - (\tilde p_\varepsilon,\operatorname{div}\mathbf{u}) = \langle\mathbf{f},\mathbf{u}\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}^1_0(\Omega)}. \tag{56}$$

Пусть $\psi\in C[0,T]$ и $\psi(T)=0$. Умножим (56) на ψ скалярно в $L^2(0,T)$. Интегрируя затем это равенство по переменной t от 0 до T, получаем

$$-\int\limits_0^T(\mathbf{v}_\varepsilon,\mathbf{u}\psi')\,dt + \int\limits_0^T\langle(\mathbf{v}_\varepsilon\cdot\nabla)\mathbf{v}_\varepsilon,\mathbf{u}\psi\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}^1_0(\Omega)}\,dt + \int\limits_0^T(\operatorname{rot}\mathbf{v}_\varepsilon,\operatorname{rot}\mathbf{u}\psi)\,dt - \int\limits_0^T(\tilde p_\varepsilon,\operatorname{div}\mathbf{u}\psi)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^T\langle\mathbf{f},\mathbf{u}\psi\rangle_{\mathbf{H}_0^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}^1(\Omega)}\,dt + \langle\mathbf{v}_\varepsilon(0),\mathbf{u}\psi(0)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}^1_0(\Omega)},\quad \mathbf{u}\in\mathbf{H}^1_0(\Omega). \tag{57}$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to0$ в (57), учитывая (55), найдём

$$-\int\limits_0^T(\mathbf{v}^*,\mathbf{u}\psi')\,dt + \int\limits_0^T\langle(\mathbf{v}^*\cdot\nabla)\mathbf{v}^*,\mathbf{u}\psi\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}^1_0(\Omega)}\,dt + \int\limits_0^T(\operatorname{rot}\mathbf{v}^*,\operatorname{rot}\mathbf{u}\psi)\,dt - \int\limits_0^T(p^*,\operatorname{div}\mathbf{u}\psi)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^T \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}\psi\rangle_{\tilde{H}^{-1}(\Omega)\times H^1(\Omega)}\,dt + \langle \mathbf{v}^*(0), \mathbf{u}\psi(0)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}_0^1(\Omega)}, \quad \mathbf{u}\in\mathbf{H}_0^1(\Omega). \tag{58}$$

Умножим (7) на ψ скалярно в $L^2(0,T)$ и проинтегрируем по частям. Сравнив с (58), получим $\langle \mathbf{v}^*(0), \mathbf{u}\psi(0)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}_0^1(\Omega)} = \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{u}\psi(0)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}_0^1(\Omega)}$ для любого $\mathbf{u}\in\mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Выбрав $\psi(0)=1$, приходим к (4).

Мы показали, что если $n=2$, то при $\varepsilon\to 0$ слабое решение $(\mathbf{v}_\varepsilon; p_\varepsilon)$ задачи (8)–(11) сходится к единственному решению $(\mathbf{v}; p)$ задачи (2)–(4) в следующем смысле:

$$\mathbf{v}_\varepsilon \to \mathbf{v} \quad \text{слабо в} \;\; L^2(0,T;\mathbf{H}_0^1(\Omega)), \quad *\text{-слабо в} \;\; L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)), \quad \text{сильно в} \;\; L^2(Q),$$

$$\tilde{p}_\varepsilon \to p \quad \text{слабо в} \;\; L^2(Q),$$

и выполняется оценка

$$\|\mathbf{v}\|^2_{L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} + \int\limits_0^T (\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} + \|p\|^2)\,dt \leqslant CE_0(\mathbf{f}, \mathbf{v}_0),$$

где постоянная $E_0(\mathbf{f},\mathbf{v}_0)$ определена в (6) и не зависит от ε.

Если $n=3$, то существует последовательность $(\mathbf{v}_{\varepsilon'}; p_{\varepsilon'})$ решений задачи (8)–(11) в смысле определения 3 такая, что при $\varepsilon\to 0$ сходится к некоторому решению $(\mathbf{v}; p)$ задачи (2)–(4) в следующем смысле:

$$\mathbf{v}_{\varepsilon'} \to \mathbf{v} \quad \text{слабо в} \;\; L^2(0,T;\mathbf{H}_0^1(\Omega)), \quad *\text{-слабо в} \;\; L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)), \quad \text{сильно в} \;\; L^2(Q),$$

$$\tilde{p}_{\varepsilon'} \to p \quad \text{слабо в} \;\; L^{8/7}(0,T;L^2(\Omega)).$$

Кроме того, справедлива оценка

$$\|\mathbf{v}\|^2_{L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} + \int\limits_0^T (\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} + \|p\|^{8/7})\,dt \leqslant CE_0(\mathbf{f}, \mathbf{v}_0),$$

где постоянная $E_0(\mathbf{f},\mathbf{v}_0)$ определена в (6) и не зависит от ε. Теорема 1 доказана.

2. Неоднородные граничные условия. Рассмотрим систему уравнений Навье–Стокса, описывающих динамику движения несжимаемой среды, состояние которой характеризуется распределением давления $p(t,\mathbf{x})$ и полем скоростей $\mathbf{v}(t,\mathbf{x})$, $(t,\mathbf{x})\in Q$:

$$\partial_t\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = \Delta\mathbf{v} - \nabla p + \mathbf{f}, \tag{59}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \tag{60}$$

На боковой поверхности рассматриваемого цилиндрического тела ставится условие Дирихле:

$$\mathbf{v}|_\Sigma = \mathbf{g}, \quad (t,\mathbf{x})\in\Sigma. \tag{61}$$

В начальный момент времени задаётся условие

$$\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\Omega. \tag{62}$$

Относительно разрешимости задачи (59)–(62) (для ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ с границей $\partial\Omega\in C^\infty$) доказана следующая

Теорема 6 [24]. *Пусть* $\alpha\in(3/2;2]$ *и выполняются условия:*

$$\mathbf{f}\in L^2(0,T;\mathbf{H}^{\alpha-2}(\Omega)), \quad \operatorname{div}\mathbf{f} = 0, \quad \mathbf{g}\in G_\alpha(\Sigma), \quad \int\limits_{\partial\Omega}(\mathbf{g},\mathbf{n})d\sigma = 0,$$

$$\mathbf{v}_0 \in \mathbf{H}^{\alpha-2}(\Omega), \quad \operatorname{div}\mathbf{v}_0 = 0, \quad (\mathbf{v}_0, \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = (\mathbf{g}, \mathbf{n})|_{t=0}.$$

Предположим, что

$$\|\mathbf{f}\|^2_{L^2(0,\mathbf{H}^{\alpha-2}(\Omega))} + \|\mathbf{v}_0\|^2_{\mathbf{H}^{\alpha-2}(\Omega)} + \|\mathbf{g}\|^2_{G_\alpha(\Sigma)} < \delta,$$

где постоянная δ *достаточно мала. Тогда существует единственное решение* $\mathbf{v}$, $(\mathbf{v}, \nabla p) \in L^2(0,T;\mathbf{H}^{\alpha-2}(\Omega)) \times L^2(0,T;\mathbf{H}^{\alpha-2}(\Omega))$, $\partial_t\mathbf{v} \in L^2(0,T;\mathbf{H}^{\alpha-2}(\Omega))$, *задачи (59)–(62).*

Исследуем случай $\alpha = 1$.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$. Предположим, что известные функции $\mathbf{f}$, $\mathbf{g} = g_n\mathbf{n} + g_r\mathbf{r}$, где $\mathbf{n}$ – внешний вектор нормали, $\mathbf{r}$ – касательное к $\partial\Omega$ векторное поле, направленное против часовой стрелки, $g_n = (\mathbf{g}\cdot\mathbf{n})$, $g_r = (\mathbf{g}\cdot\mathbf{r})$, обладают следующими свойствами:

$$\mathbf{f} \in L^2(0,T;\bar{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)),$$

$$g_r \in G_r(\Sigma), \quad G_r(\Sigma) = L^2(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega)) \bigcap L^{1/2}(0,T;H^{-1/2}(\partial\Omega)),$$

$$g_n \in G_n(\Sigma), \quad G_n(\Sigma) = L^2(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega)) \bigcap L^{3/4}(0,T;H^{-1}(\partial\Omega)),$$

$$\int\limits_{\partial\Omega} (\mathbf{g}\cdot\mathbf{n})\,d\sigma = 0 \quad \text{для п.в.} \quad t \in (0,T),$$

$$\mathbf{v}_0 \in L^2(\Omega), \quad (\mathbf{v}_0, \nabla q) = 0, \quad q \in H^1(\Omega). \tag{63}$$

Обозначим

$$G(\Sigma) = G_n(\Sigma) \times G_r(\Sigma), \quad E(\mathbf{f},\mathbf{g},\mathbf{v}_0) = \|\mathbf{f}\|^2_{L^2(0,T;\bar{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega))} + \|\mathbf{g}\|^2_{G(\Sigma)} + \|\mathbf{v}_0\|^2. \tag{64}$$

Определение 5. *Слабым решением задачи* (59)–(62) назовём пару

$$(\mathbf{v};p) \in L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)) \bigcap L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega;\operatorname{Ker}\{\operatorname{div}\})) \times L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

удовлетворяющую интегральным тождествам

$$\int\limits_0^T [\langle \partial_t\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}^1_0(\Omega)} + (\operatorname{rot}\mathbf{v}, \operatorname{rot}\mathbf{u}) - (p, \operatorname{div}\mathbf{u})]\,dt = \int\limits_0^T \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}^1_0(\Omega)}\,dt,$$

$$\int\limits_\Omega p\,dx = 0, \quad \int\limits_0^T (\operatorname{div}\mathbf{v}, q)\,dx = 0$$

для произвольных $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1_0(\Omega)$, $q \in L^2(\Omega)$, и условию (61) в смысле следа функции из указанного класса.

Теорема 7. *Для любых функций* $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{v}_0$, *удовлетворяющих условиям (63), существует единственное слабое решение задачи (59)–(62) и выполняется оценка*

$$\|\mathbf{v}\|^2_{L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} + \int\limits_0^T (\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|p\|^2)\,dt \leqslant E(\mathbf{f},\mathbf{g},\mathbf{v}_0),$$

где постоянная $E(\mathbf{f},\mathbf{g},\mathbf{v}_0)$ *определена в (64).*

Доказательство. Ввиду теоремы 2.2 из [24] для пары $(g_n;g_r)$ существует непрерывный оператор продолжения

$$\Pi\colon G_n(\Sigma) \times G_r(\Sigma) \to \{\mathbf{u}\colon \mathbf{u} \in L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega) \bigcap \operatorname{Ker}\{\operatorname{div}\}), \partial_t\mathbf{u} \in L^2(0,T;\bar{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega))\}. \tag{65}$$

Рассмотрим вектор-функцию

$$\mathbf{v}_1 \in L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)\bigcap \operatorname{Ker}\{\operatorname{div}\}), \quad \partial_t \mathbf{v}_1 \in L^2(0,T;\bar{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)),$$

такую, что $\mathbf{v}_1|_\Sigma = \mathbf{g}$, $(t,\mathbf{x}) \in \Sigma$. В силу (65) (см. [23]) найдётся константа $K > 0$ такая, что выполняется неравенство

$$\|\mathbf{v}_1\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega))} + \|\partial_t \mathbf{v}_1\|^2_{L^2(0,T;\bar{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega))} \leqslant K\|\mathbf{g}\|^2_{G(\Sigma)}.$$

Представим решение задачи (59)–(62) в виде суммы

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{w}. \tag{66}$$

Подставим (66) в (59)–(62) и получим условия для определения функции $\mathbf{w}$:

$$\partial_t \mathbf{w} + ((\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}) \cdot \nabla)\mathbf{w} + (\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{v}_1 = \Delta \mathbf{w} - \nabla p + \mathbf{f}_1, \tag{67}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = 0, \tag{68}$$

$$\mathbf{w}|_\Sigma = 0, \quad (t,\mathbf{x}) \in \Sigma, \tag{69}$$

$$\mathbf{w}|_{t=0} = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) - \mathbf{v}_1(\,\cdot\,,\mathbf{x})|_{t=0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{70}$$

где $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f} - \partial_t \mathbf{v}_1 - (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla)\mathbf{v}_1 + \Delta \mathbf{v}_1 \in L^2(0,T;\bar{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega))$. Доказательство существования и единственности решения задачи (67)–(70) проводится аналогично доказательству теоремы 1.

Заключение. На основе метода априорных оценок доказана корректность новой регуляризованной задачи при фиксированном параметре регуляризации (теорема 2). Строгое обоснование ограниченности искомых функций в нужных функциональных пространствах говорит о стремлении к нулю нормы разности решений в соответствующих пространствах регуляризованной и исходной систем при $\varepsilon \to 0$. Доказано существование функции давления почти всюду в рассматриваемой области для решений уравнений Навье–Стокса из класса Хопфа в случае однородных (теорема 1) и неоднородных (теорема 7) краевых условий.

Работа выполнена в Дальневосточном центре математических исследований при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы развития региональных научно-образовательных математических центров по соглашению № 075-02-2023-946.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М., 1981.
2. *Смагулов Ш.* Об одном нелинейном уравнении с малым параметром, аппроксимирующем уравнение Навье–Стокса // Тр. V Всесоюз. семинара по численным методам механики вязкой жидкости. Новосибирск, 1975. Т. 1. С. 123–134.
3. *Волков П.К., Переверзев А.В.* Метод конечных элементов для решения краевых задач регуляризованных уравнений несжимаемой жидкости в переменных “скорости–давление” // Мат. моделирование. 2003. Т. 15. № 3. С. 15–28.
4. *Fedoseyev A.I., Alexeev B.V.* Simulation of viscous flows with boundary layers within multiscale model using generalized hydrodynamics equations // Intern. Conf. on Comput. Sci. ICCS. 2010.
5. *Hopf E.* Uber die Anfangswertaufgabe fur die Hydrodynamischen Grandgleichungen // Math. Nachr. 1951. V. 4. P. 213–231.
6. *Ладыженская О.А.* Решение “в целом” краевой задачи для уравнений Навье–Стокса в случае двух пространственных переменных // Докл. АН СССР. 1958. Т. 123. № 3. С. 427–429.
7. *Киселёв А.А., Ладыженская О.А.* О существовании единственности решений нестационарной задачи для вязкой несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1957. Т. 21. С. 655–680.
8. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Е.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971.
9. *Galdi G.P.* An Introduction to the Navier–Stokes Initial-Boundary Value Problem // Fundamental Directions in Mathematical Fluid Mechanics. Advances in Mathematical Fluid Mechanics / Eds. G.P. Galdi, J.G. Heywood, R. Rannacher. Basel, 2000.

10. *Sohr H., Wahl W.* On the regularity of the pressure of weak solutions of Navier–Stokes equations // Archiv der Mathematik. 1986. Bd. 46. S. 428–439.
11. *Simon J.* On the existence of the pressure for solutions of the variational Navier–Stokes equations // J. of Math. Fluid Mech. 1999. V. 1. № 3. P. 225–234.
12. *Langa J.A., Real J., Simon J.* Existence and Regularity of the Pressure for the Stochastic Navier–Stokes Equations // Appl. Math. Optim. 2003. V. 48. P. 195–210.
13. *Bensoussan A.* Stochastic Navier–Stokes equations // Acta Appl. Math. 1995. V. 38. № 3. P. 267–304.
14. *Capinski M., Peszat S.* On the existence of solution to stochastic Navier–Stokes equations // Nonlin. Anal. 2001. V. 44. P. 141–177.
15. *Серёгин Г.А.* О локальной регулярности подходящих слабых решений уравнений Навье–Стокса // Успехи мат. наук. 2007. Т. 62. № 3 (375). С. 149–168.
16. *Серёгин Г.А.* Дифференциальные свойства слабых решений уравнений Навье–Стокса // Алгебра и анализ. 2002. Т. 14. № 1. С. 194–237.
17. *Шилкин Т.Н.* Полная внутренняя регулярность решений двумерной модифицированной системы Навье–Стокса // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. № 1. С. 182–221.
18. *Серёгин Г.А., Шилкин Т.Н.*. Теоремы лиувиллевского типа для уравнений Навье–Стокса // Успехи мат. наук. 2018. Т. 73. № 4 (442). С. 103–170.
19. *Амосова Е.В.* О регулярности решений нестационарных уравнений Навье–Стокса // Мат. проблемы механики сплошных сред: тез. докл. Всерос. конф. и школы молодых учёных, посвящ. 100-летию акад. Л.В. Овсянникова. Новосибирск. 2019. С. 27.
20. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М., 1988.
21. *Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск, 1983.
22. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. М., 1962.
23. *Лукина Е.В.* Глобальные решения многомерных приближённых уравнений Навье–Стокса вязкого газа // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44. С. 299–401.
24. *Fursikov A., Gunzburger M., Hou L.* Trace theorems for three-dimensional, time-dependent solenoidal vector fields and their applications // Trans. of the Amer. Math. Soc. 2001. V. 354. № 3. P. 1079–1116.

Институт прикладной математики ДВО РАН,
г. Владивосток,
Дальневосточный федеральный университет,
г. Владивосток

Поступила в редакцию 16.03.2021 г.
После доработки 23.07.2023 г.
Принята к публикации 21.08.2023 г.