ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 9, с. 1222–1239

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.35

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ВТОРОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

© 2023 г. В. И. Корзюк, Я. В. Рудько

Для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом рассматривается смешанная задача в первом квадранте, в которой на пространственной полуоси задаются условия Коши, а на временно́й полуоси – условие Неймана. Решение строится методом характеристик в неявном аналитическом виде как решение некоторых интегральных уравнений. Исследуются разрешимость этих уравнений, а также зависимость решений от гладкости начальных данных. Для рассматриваемой задачи доказывается единственность решения и устанавливаются условия, при выполнении которых существует её классическое решение. При невыполнении условий согласования строится задача с условиями сопряжения, а при недостаточно гладких данных – слабое решение.

DOI: 10.31857/S0374064123090078, EDN: WOVDFE

Введение. Строго говоря, все сплошные среды описываются нелинейными уравнениями. Выбор линейных или нелинейных уравнений для описания среды зависит от роли, которую играют нелинейные эффекты, и определяется конкретной физической ситуацией. Например, при описании распространения лазерных импульсов необходимо учитывать зависимость показателя преломления среды от интенсивности электромагнитного поля.

Линеаризация нелинейных уравнений математической физики не всегда ведёт к содержательному результату. Может оказаться, что линеаризация имеет смысл, но линейные уравнения сохраняют применимость лишь конечное время. И даже если линеаризация нелинейных уравнений математической физики возможна, с точки зрения физики исключительно важны "существенно нелинейные" решения, качественно отличающиеся от решений линейных уравнений. Такими могут быть стационарные решения солитонного типа, локализованные в одном или нескольких измерениях, или решения типа волновых коллапсов, описывающие самопроизвольную концентрацию энергии в небольших областях пространства [1].

Задачи, требующие наличия нелинейных дифференциальных уравнений, отличаются большим разнообразием, и от этого зависит выбор методов их решения или анализа. Примерами нелинейных дифференциальных уравнений являются уравнение Навье–Стокса в гидродинамике и уравнение Лотки–Вольтерры в биологии.

Одной из сложностей нелинейных задач является тот факт, что в общем случае невозможно объединить известные решения для построения новых решений. В линейных задачах, например, семейство линейно независимых решений можно использовать для построения общих решений с помощью принципа суперпозиции. Хорошим примером является одномерная задача для распределения температуры с наложенными граничными условиями Дирихле, решение которой можно построить как зависимую от времени линейную комбинацию синусоид различных частот, что делает решение очень гибким. Также можно найти несколько очень специфических решений для нелинейных уравнений, однако отсутствие принципа суперпозиции не позволяет построить новые решения [2].

Отметим также, что нелинейные уравнения трудно изучать: почти не существует общих методов, работающих для всех таких уравнений, и обычно каждое отдельное уравнение приходится изучать как отдельную задачу [3].

В данной статье, используя способ, предложенный ранее в работе [4] и представляющий собой сочетание метода характеристик с методом последовательных приближений, строится решение второй смешанной задачи для неоднородного гиперболического нелинейного уравнения второго порядка, доказываются единственность и непрерывная зависимость решения от начальных данных, а также выводятся условия гладкости данных задачи и необходимые и достаточные условия согласования, при которых решение смешанной задачи будет классическим. При невыполнении однородных условий согласования строится задача с условиями сопряжения на характеристике, причём одно из них, в отличии от первой смешанной задачи [4], содержит некоторую произвольную постоянную, обеспечивающую наперёд заданный разрыв решения. Это означает, что одной второй смешанной задаче в обычной формулировке будет соответствовать бесконечное множество вторых смешанных задач с условиями сопряжения на характеристике, но в каждом конкретном случае будет существовать единственное классическое решение. А если в задаче присутствуют недостаточно гладкие функции, то строится обобщённое слабое решение.

1. Постановка задачи. В области

$$Q = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t \in (0,\infty), \quad x \in (0,\infty)\}$$

двух независимых переменных рассмотрим одномерное нелинейное уравнение

$$\Box w(t,x) - \beta \partial_t w(t,x) - \varrho(t,x,w(t,x)) = \Phi(t,x), \tag{1}$$

где $\Box = \partial_t^2 - a^2\partial_x^2$ – оператор Д'Аламбера ($a > 0$ для определённости), β – действительное число, Φ – функция, заданная на множестве $\overline{Q}$, а ϱ – функция, заданная на множестве $[0,\infty) \times [0,\infty) \times \mathbb{R}$ и удовлетворяющая условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует измеримая функция $\varkappa$, заданная на множестве $\overline{Q}$, такая, что справедливо неравенство

$$|\varrho(t,x,z_1) - \varrho(t,x,z_2)| \leqslant \varkappa(t,x)|z_1 - z_2|,$$

и такая, что её вторая степень локально суммируема. К уравнению (1) присоединяются начальные

$$w(0,x) = w_0(x), \quad \partial_t w(0,x) = w_1(x), \quad x \in [0,\infty), \tag{2}$$

и граничное

$$\partial_x w(t,0) = w_N(t), \quad t \in [0,\infty), \tag{3}$$

условия, где w_0, w_1, w_N – функции, заданные на полуоси $[0,\infty)$.

Уравнение (1) возникает при описании таких различных физических процессов, как сверхпроводимость, дислокации в кристаллах, волны в ферромагнетиках, лазерные импульсы в двухфазных средах, мезонная теория ядерных сил [5, с. 490], эффект Джозефсона [6], квантовая теория поля [7].

Работы многих исследователей (см., например, [8–22]) посвящены в основном поиску обобщённых решений задач для нелинейных уравнений вида (5), а не классических. Среди них можно выделить периодические задачи [6–14], задачу Коши [15, 16] и смешанные задачи в неограниченных областях [18–22]. Однако в ряде исследований всё же строятся классические решения: [4, 23–25] (непосредственно) и [26–29] (из обобщённых решений, используя теоремы о повышении гладкости). Но, к сожалению, часто рассматриваются однородное уравнение и/или однородные краевые условия.

В частных линейных случаях задача (1)–(3) рассматривалась в статье [30], где использовались метод продолжения по параметру и теоремы повышения гладкости сильных решений, в [31] применялся метод отражений, в работах [32–34] – метод характеристик, а в книге [35, с. 100–103] – косинус-преобразование Фурье.

Как известно, заменой

$$w(t,x) = u(t,x)\exp\left(\frac{\beta t}{2}\right) \tag{4}$$

задача (1)–(3) приводится к виду

$$\Box u(t,x) - f(t,x,u(t,x)) = F(t,x), \quad (t,x) \in Q, \tag{5}$$

$$u(0,x)=\varphi(x)=w_0(x),\quad \partial_t u(0,x)=\psi(x)=w_1(x)-\frac{1}{2}\beta w_0(x),\quad x\in[30,\infty),\tag{6}$$

$$\partial_x u(t,0)=\mu(t)=w_N(t)\exp\left(-\frac{\beta t}{2}\right),\quad t\in[0,\infty),\tag{7}$$

где в уравнении (5) использовано обозначение

$$f(t,x,z)=\frac{1}{4}\beta^2 z+\varrho\left(t,x,z\exp\left(\frac{\beta t}{2}\right)\right)\exp\left(-\frac{\beta t}{2}\right),\quad F(t,x)=\Phi(t,x)\exp\left(-\frac{\beta t}{2}\right).$$

При этом гладкость нелинейности f и правой части F дифференциального уравнения, начальных и граничных данных φ, ψ, μ не хуже, чем в исходной задаче (1)–(3), и нелинейный член также удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной:

$$|f(t,x,z_1)-f(t,x,z_2)|\leqslant k(t,x)|z_1-z_2|,$$

где $k=\varkappa+\beta^2/4$, если верно неравенство

$$|\varrho(t,x,z_1)-\varrho(t,x,z_2)|\leqslant \varkappa(t,x)|z_1-z_2|$$

для любых неотрицательных t и x, действительных чисел z_1 и z_2 и некоторой функции $\varkappa$. При этом $k\in L_p^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, если и только если $\varkappa\in L_p^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$.

В дальнейшем в настоящей работе будет изучаться задача (5)–(7), а результаты для задачи (1)–(3) будут получены в виде следствий.

2. Интегральное уравнение. Область Q характеристикой $x-at=0$ разделим на две подобласти

$$Q^{(j)}=\{(t,x):(-1)^j(at-x)>0\},\quad j=1,2.$$

В замыкании $\overline{Q^{(j)}}$ каждой из подобластей $Q^{(j)}$ рассмотрим интегральные уравнения

$$u^{(j)}(t,x)=g^{(1,j)}(x-at)+g^{(2)}(x+at)-\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x-at}dy\int\limits_{(-1)^j(at-x)}^{x+at}\left[F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(j)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dz,\quad (t,x)\in\overline{Q^{(j)}},\quad j=1,2,\tag{8}$$

где $g^{(1,1)}$, $g^{(2)}$ и $g^{(1,2)}$ – некоторые функции, первые две заданы на множестве $[0,+\infty)$, а последняя – на $(-\infty,0]$.

Определим на замыкании $\overline{Q}$ области Q функцию u как совпадающую на замыкании $\overline{Q^{(j)}}$ области $Q^{(j)}$ с решением $u^{(j)}$ интегрального уравнения (8):

$$u(t,x)=u^{(j)}(t,x),\quad (t,x)\in\overline{Q^{(j)}},\quad j=1,2.\tag{9}$$

Лемма 1. *Пусть выполняются условия*

$$f\in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R}),\quad F\in C^1(\overline{Q}).$$

Функция $u^{(1)}$ принадлежит классу $C^2(\overline{Q^{(1)}})$ и удовлетворяет уравнению (5) в $\overline{Q^{(1)}}$ тогда и только тогда, когда она является непрерывным решением уравнения (8) при $j=1$, функции $g^{(1,1)}$ и $g^{(2)}$ в котором из класса $C^2([0,\infty))$.

Лемма 2. *Пусть выполняются условия*

$$f\in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R}),\quad F\in C^1(\overline{Q}).$$

Функция $u^{(2)}$ принадлежит классу $C^2(\overline{Q^{(2)}})$ и удовлетворяет уравнению (5) в $\overline{Q^{(2)}}$ тогда и только тогда, когда она является непрерывным решением уравнения (8), $j=2$, функции $g^{(1,2)}$ и $g^{(2)}$ в котором из классов $C^2((-\infty,0])$ и $C^2([0,\infty))$ соответственно.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}), \quad F \in C^1(\overline{Q}).$$

Функция u принадлежит классу $C^2(\overline{Q})$ и удовлетворят уравнению (5) тогда и только тогда, когда она для каждого $j = 1, 2$ является непрерывным решением уравнения (8), функции $g^{(1,1)}$, $g^{(1,2)}$ и $g^{(2)}$ в котором из классов $C^2([0,\infty))$, $C^2((-\infty,0])$ и $C^2([0,\infty))$ соответственно, и имеют место условия согласования

$$g^{(1,1)}(0) - g^{(1,2)}(0) = 0, \tag{10}$$

$$Dg^{(1,1)}(0) - Dg^{(1,2)}(0) = 0, \tag{11}$$

$$D^2g^{(1,1)}(0) - D^2g^{(1,2)}(0) + \frac{1}{a^2}(F(0,0) + f(0,0,g^{(1,1)}(0) + g^{(2)}(0))) = 0. \tag{12}$$

Доказательства лемм 1, 2 и теоремы 1 представлены в работе [4].

Теорема 2. *Пусть $F \in L_1^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, функция f удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция $k \in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ такая, что*

$$|f(t,x,z_1) - f(t,x,z_2)| \leqslant k(t,x)|z_1 - z_2|,$$

и заданы непрерывные функции $g^{(1,1)}$, $g^{(1,2)}$ и $g^{(2)}$. Тогда непрерывные решения уравнений (8) существуют, единственны и непрерывно зависят от исходных данных.

Доказательство. Теорема может быть доказана различными способами, например, методом последовательных приближений Пикара, как это сделано в работах [4, 24]. Также можно использовать различные теоремы о неподвижных точках (см., например, [25, 36]). Здесь представим альтернативное доказательство, основанное на обобщении теоремы Банаха о неподвижной точке для локально выпуклых пространств [37, теорема 2.2], следуя методу, изложенному в книге [38, с. 390].

Для определённости рассмотрим уравнение (8) при $j = 1$. Заметим, что $C^2(\overline{Q^{(1)}})$ – пространство Фреше, в котором топология может быть задана счётной системой полунорм

$$\mathfrak{p}_m(u) = \sup_{(t,x)\in\Omega_m} |u(t,x)\exp(-\gamma_m(x+at))|, \quad m \in \mathbb{N},$$

где $\Omega_m = \mathrm{Conv}\{(0,0),(0,m),(m/(2a),m/2)\}$ и γ_m – некоторые действительные числа, которые будут определены в дальнейшем.

Введём обозначения

$$\mathcal{K}_m = \sup_{(t,x)\in\Omega_m} \left(\int\limits_0^{x-at} dy \int\limits_{x-at}^{x+at} \left| k\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right|^2 dz\right)^{1/2}, \quad G(t,x) = g^{(1,1)}(x-at) + g^{(2)}(x+at),$$

перепишем уравнение (8) при $j = 1$ в операторном виде

$$u^{(1)}(t,x) = K[u^{(1)}](t,x) = G(t,x) - \frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x-at} dy \int\limits_{x-at}^{x+at} \left[F\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right)\right] dz, \quad (t,x) \in \overline{Q^{(1)}},$$

и оценим $|K[u_1](t,x) - K[u_2](t,x)|$:

$$|K[u_1](t,x) - K[u_2](t,x)| \leqslant \left| \frac{1}{4a^2} \int\limits_0^{x-at} dy \int\limits_{x-at}^{x+at} \left[f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u_1\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right) - \right.\right.$$

$$
- f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u_2\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right)\Bigg] dz\Bigg| \leqslant
$$

$$
\leqslant \frac{1}{4a^2} \int\limits_0^{x-at} dy \int\limits_{x-at}^{x+at} k\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\left|u_1\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) - u_2\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right| dz =
$$

$$
= \frac{1}{4a^2} \int\limits_0^{x-at} dy \int\limits_{x-at}^{x+at} k\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\left|u_1\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) - u_2\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right| \exp(-\gamma_m z)\exp(\gamma_m z)\, dz \leqslant
$$

$$
\leqslant \frac{1}{4a^2}\left(\int\limits_0^{x-at} dy \int\limits_{x-at}^{x+at} \left|k\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right|^2 dz\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^{x-at} dy \int\limits_{x-at}^{x+at} \left|\mathfrak{p}_m(u_1-u_2)\exp(\gamma_m z)\right|^2 dz\right)^{1/2} \leqslant
$$

$$
\leqslant \frac{\mathcal{K}_m \mathfrak{p}_m(u_1-u_2)}{4a^2}\sqrt{\frac{(x-at)\exp(2\gamma_m x)\operatorname{sh}(2a\gamma_m t)}{\gamma_m}} \leqslant \frac{\mathcal{K}_m \mathfrak{p}_m(u_1-u_2)\exp(\gamma_m(x+at))}{4a^2}\sqrt{\frac{x-at}{\gamma_m}} \leqslant
$$

$$
\leqslant \frac{\mathcal{K}_m \mathfrak{p}_m(u_1-u_2)\exp(\gamma_m(x+at))\sqrt{m}}{4a^2\sqrt{\gamma_m}}, \quad (t,x)\in\Omega_m.
$$

Умножив полученное неравенство на $\exp(-\gamma_m(x+at))$, получим

$$
|K[u_1](t,x) - K[u_2](t,x)|\exp(-\gamma_m(x+at)) \leqslant \frac{\mathcal{K}_m\sqrt{m}}{4a^2\sqrt{\gamma_m}}\mathfrak{p}_m(u_1-u_2), \quad (t,x)\in\Omega_m.
$$

Наконец, перейдём к супремуму на Ω_m, что даёт неравенство

$$
\mathfrak{p}_m(K[u_1]-K[u_2]) \leqslant \frac{\mathcal{K}_m\sqrt{m}}{4a^2\sqrt{\gamma_m}}\mathfrak{p}_m(u_1-u_2).
$$

Итак, K – сжимающий оператор относительно полунормы $\mathfrak{p}_m$, если, например,

$$
\gamma_m = \frac{m\mathcal{K}_m^2}{8a^4}.
$$

Теперь, воспользовавшись теоремой 2.2 из работы [37], заключаем, что уравнение (8) при $j=1$ имеет единственное решение в пространстве $C^2(\overline{Q^{(1)}})$.

Для доказательства непрерывной зависимости решения от начальных данных рассмотрим, наряду с уравнением (8) при $j=1$, возмущённое уравнение

$$
(u^{(1)}+\Delta u)(t,x) = (G+\Delta G)(t,x) - \frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x-at} dy \int\limits_{x-at}^{x+at}\left[(F+\Delta F)\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) + \right.
$$

$$
\left. + f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, (u^{(1)}+\Delta u)\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right)\right] dz, \quad (t,x)\in\overline{Q^{(1)}}, \tag{13}
$$

и разность возмущённого уравнения (13) и невозмущённого уравнения (8) при $j=1$:

$$
\Delta u(t,x) = \Delta G(t,x) - \frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x-at} dy \int\limits_{x-at}^{x+at}\left[\Delta F\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) + \right.
$$

$$
+ \left\{ f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, (u^{(1)}+\Delta u)\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right) - \right.
$$

$$- f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right)\Bigg\}\Bigg] dz, \quad (t,x) \in \overline{Q^{(1)}}. \tag{14}$$

Для уравнения (14) относительно возмущения Δu справедлива оценка модуля возмущения

$$|\Delta u(t,x)| \leqslant \mathcal{M}_m + \frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x-at} dy \int\limits_{x-at}^{x+at} k\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\left|\Delta u\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right| dz, \quad (t,x) \in \Omega_m,$$

где $\mathcal{M}_m = \|\Delta G\|_{C(\Omega_m)} + (2a^{-1})\|\Delta F\|_{L_1(\Omega_m)}$ (здесь для стандартной sup-нормы использовано обозначение

$$\|u\|_{C(\Omega_m)} = \sup_{(t,x)\in\Omega_m} |u(t,x)|).$$

Применив многомерную лемму Гронуолла [39, с. 401–403] к предыдущему неравенству, получим

$$|\Delta u(t,x)| \leqslant C^{(1)}\mathcal{M}_m, \quad (t,x) \in \Omega_m,$$

где $C^{(1)}$ – некоторая положительная константа, зависящая только от множества Ω_m, функции k и числа a. Из полученного неравенства следует, что какие бы малые возмущения ΔG, ΔF, $\mathcal{M}_m = \varepsilon$, мы ни взяли, для возмущения решения выполняется неравенство

$$\|\Delta u\|_{C(\Omega_m)} = \delta \leqslant C^{(1)}\varepsilon = C^{(1)}(\|\Delta G\|_{C(\Omega_m)} + (2a^{-1})\|\Delta F\|_{L_1(\Omega_m)}).$$

В силу произвольности $m \in \mathbb{N}$, а следовательно, и множеств Ω_m и $\bigcup_{m=1}^{\infty} \Omega_m = \overline{Q^{(1)}}$ получаем, что решение уравнения (8) при $j = 1$ непрерывно зависит от исходных данных.

Существование, единственность и непрерывная зависимость от начальных данных решения уравнения (8) при $j = 2$ в пространстве $C(\overline{Q^{(2)}})$ доказывается аналогично. Теорема доказана.

Замечание 1. В теореме 1 вместо условия $f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R})$ можно потребовать выполнения трёх условий:

1) функция $f_1 \colon \overline{Q} \ni (t,x) \mapsto f(t,x,z) \in \mathbb{R}$ измерима при любом фиксированном $z \in \mathbb{R}$;

2) функция $f_2 \colon \mathbb{R} \ni z \mapsto f(t,x,z) \in \mathbb{R}$ непрерывна на множестве $\mathbb{R}$ для почти любой фиксированной точки $(t,x) \in \overline{Q}$;

3) верно неравенство $|f(t,x,z)| \leqslant \alpha(t,x) + \beta|z|$, где $\alpha \in L_1^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Для обоснования замечания необходимо показать, что какой бы ни была непрерывная функция $u^{(j)}$, правая часть уравнения (8) есть также непрерывная функция. Заметим, что если мы зафиксируем $u^{(j)}$ и компакт $\mathcal{K} \subset \overline{Q}$, то при условиях, указанных в данном замечании, выражение

$$\mathcal{K} \ni (t,x) \mapsto f(t,x,u^{(j)}(t,x))$$

определяет функцию класса $L_1(\mathcal{K})$ [40, с. 204], а в силу произвольности $\mathcal{K}$ формула

$$\overline{Q} \ni (t,x) \mapsto f(t,x,u^{(j)}(t,x))$$

задаёт функцию класса $L_1^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$. Легко проверяется, что произведение локально суммируемой функции на непрерывную функцию является локально суммируемой функцией. Тогда, исходя из абсолютной непрерывности интеграла Лебега, заключаем, что правая часть уравнения (8) есть непрерывная функция.

3. Построение решения смешанной задачи. Функции $g^{(1,1)}$ и $g^{(2)}$ определяем из условий Коши (6). Подставив соотношение (8) при $j = 1$ в условия (6), получим систему уравнений относительно функций $g^{(1,1)}$ и $g^{(2)}$:

$$u^{(1)}(0,x) = \varphi(x) = g^{(1,1)}(x) + g^{(2)}(x), \quad x \geqslant 0,$$

$$\partial_t u^{(1)}(0,x) = \psi(x) = -aDg^{(1,1)}(x) + aDg^{(2)}(x) -$$

$$-\frac{1}{2a}\int\limits_0^x\left[f\left(\frac{x-y}{2a},\frac{x+y}{2},u^{(1)}\left(\frac{x-y}{2a},\frac{x+y}{2}\right)\right)+F\left(\frac{x-y}{2a},\frac{x+y}{2}\right)\right]dy,\quad x\geqslant 0.$$

Проинтегрировав второе уравнение от 0 до x, будем иметь

$$g^{(1,1)}(x)+g^{(2)}(x)=\varphi(x),\quad x\geqslant 0,$$

$$-g^{(1,1)}(x)+g^{(2)}(x)=\frac{1}{a}\int\limits_0^x\psi(z)\,dz+\frac{1}{2a^2}\int\limits_0^x dz\int\limits_0^z\left[F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dy+2C,\quad x\geqslant 0,$$

откуда находим

$$g^{(1,1)}(x)=\frac{\varphi(x)}{2}-\frac{1}{2a}\int\limits_0^x\psi(z)\,dz-C-$$

$$-\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^x dz\int\limits_0^z\left[F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)+f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dy,\quad x\geqslant 0,$$

$$g^{(2)}(x)=\frac{\varphi(x)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_0^x\psi(z)\,dz+C+$$

$$+\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^x dz\int\limits_0^z\left[F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)+f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dy,\quad x\geqslant 0,\qquad(15)$$

где C – произвольная константа из множества действительных чисел. Функцию $g^{(1,2)}$ определяем из граничного условия (7). Подставив соотношение (8) при $j=2$ в условие (7), получим уравнение

$$-\frac{1}{2a^2}\int\limits_0^{-at}\left[f\left(\frac{at-y}{2a},\frac{at+y}{2},u^{(2)}\left(\frac{at-y}{2a},\frac{at+y}{2}\right)\right)+F\left(\frac{at-y}{2a},\frac{at+y}{2}\right)\right]dy+$$

$$+Dg^{(1,2)}(-at)+Dg^{(2)}(at)=\mu(t),\quad t\geqslant 0,$$

относительно функции $g^{(1,2)}$. Сделав замену $t=-z/a$, будем иметь следующее обыкновенное дифференциальное уравнение для отыскания функции $g^{(1,2)}$:

$$-\frac{1}{2a^2}\int\limits_0^z\left[f\left(\frac{-y-z}{2a},\frac{y-z}{2},u^{(2)}\left(\frac{-y-z}{2a},\frac{y-z}{2}\right)\right)+F\left(\frac{-y-z}{2a},\frac{y-z}{2}\right)\right]dy+$$

$$+Dg^{(1,2)}(z)+Dg^{(2)}(-z)=\mu\left(-\frac{z}{a}\right),\quad z\leqslant 0.\qquad(16)$$

Уравнения (16) относительно $g^{(1,2)}$ вместе с условиями (10) рассматриваем как задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Решение этой задачи определяется по формуле

$$g^{(1,2)}(x)=g^{(1,1)}(0)+\int\limits_0^x\left\{\mu\left(-\frac{z}{a}\right)-Dg^{(2)}(-z)+\right.$$

$$+\frac{1}{2a^2}\int\limits_0^z\left[f\left(\frac{-y-z}{2a},\frac{y-z}{2},u^{(2)}\left(\frac{-y-z}{2a},\frac{y-z}{2}\right)\right)+F\left(\frac{-y-z}{2a},\frac{y-z}{2}\right)\right]dy\Bigg\}\,dz=$$

$$=\frac{\varphi(0)}{2}-C+\int\limits_0^x\left\{\mu\left(-\frac{z}{a}\right)-\frac{\psi(-z)}{2a}-\frac{\varphi'(-z)}{2}+\right.$$

$$+\frac{1}{2a^2}\int\limits_0^z\left[f\left(\frac{-y-z}{2a},\frac{y-z}{2},u^{(2)}\left(\frac{-y-z}{2a},\frac{y-z}{2}\right)\right)+F\left(\frac{-y-z}{2a},\frac{y-z}{2}\right)\right]dy-$$

$$\left.-\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{-z}\left[f\left(\frac{-y-z}{2a},\frac{y-z}{2},u^{(1)}\left(\frac{-y-z}{2a},\frac{y-z}{2}\right)\right)+F\left(\frac{-y-z}{2a},\frac{y-z}{2}\right)\right]dy\right\}dz,\quad z\leqslant 0.\quad(17)$$

Подставив формулы (15) и (17) в исходные интегральные уравнения (8), получим

$$u^{(1)}(t,x)=K_1[u^{(1)}](t,x)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz+$$

$$+\frac{1}{4a^2}\int\limits_{x-at}^{x+at}dz\int\limits_{x-at}^{z}\left[F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)+f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dy,\quad (t,x)\in\overline{Q^{(1)}},$$

$$u^{(2)}(t,x)=K_2[u^{(1)},u^{(2)}](t,x)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_0^{x+at}\psi(z)\,dz+\frac{1}{2a}\int\limits_0^{at-x}\psi(z)\,dz+$$

$$+\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x+at}dz\int\limits_0^z\left[F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)+f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dy+\frac{\varphi(0)}{2}+$$

$$+\int\limits_0^{x-at}\left\{\mu\left(-\frac{z}{a}\right)+\frac{1}{2a^2}\int\limits_0^z\left[f\left(\frac{-y-z}{2a},\frac{y-z}{2},u^{(2)}\left(\frac{-y-z}{2a},\frac{y-z}{2}\right)\right)+F\left(\frac{-y-z}{2a},\frac{y-z}{2}\right)\right]dy-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{-z}\left[f\left(\frac{-y-z}{2a},\frac{y-z}{2},u^{(1)}\left(\frac{-y-z}{2a},\frac{y-z}{2}\right)\right)+F\left(\frac{-y-z}{2a},\frac{y-z}{2}\right)\right]dy\right\}dz-$$

$$-\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x-at}dy\int\limits_{at-x}^{x+at}\left[F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)+f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(2)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dz,\quad (t,x)\in\overline{Q^{(2)}}.\quad(18)$$

Отметим, что уравнение для отыскания функции $u^{(2)}$ может быть выведено с помощью тождества характеристического параллелограмма [41] подобно тому, как это сделано в работе [23].

Лемма 3. *Пусть выполняются условия*

$$f\in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R}),\quad F\in C^1(\overline{Q}),\quad \varphi\in C^2([0,\infty)),\quad \psi\in C^1([0,\infty)),\quad \mu\in C^1([0,\infty))$$

и функция f удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция $k\in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ такая, что

$$|f(t,x,z_1)-f(t,x,z_2)|\leqslant k(t,x)|z_1-z_2|.$$

Тогда решения $u^{(j)}$, $j=1,2$, *уравнений (18) существуют, единственны в классе* $C^2(\overline{Q^{(j)}})$ *и непрерывно зависят от функций* φ, ψ, μ *и* F.

Доказательство. Существование, единственность и непрерывная зависимость от исходных данных решений $u^{(j)}$, $j=1,2$, уравнений (18) в пространстве $C(\overline{Q^{(j)}})$ доказывается аналогично тому, как это сделано теореме 2. А в силу условий $f\in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R})$, $F\in C^1(\overline{Q})$, $\varphi\in C^2([0,\infty))$, $\psi\in C^1([0,\infty))$, $\mu\in C^1([0,\infty))$ и представлений (18) класс гладкости непрерывных решений $u^{(j)}$ поднимается до $C^2(\overline{Q^{(j)}})$. Лемма доказана.

Таким образом, построено кусочно-гладкое решение задачи (5)–(7), которое определятся формулами (18) и (9).

4. Анализ решения смешанной задачи. Чтобы функция u принадлежала множеству $C^2(\overline{Q})$, кроме требований гладкости для функций f, F необходимо и достаточно выполнения равенств (10)–(12) согласно теореме 1. Вычисляя величины, которые входят в выражения (10)–(12), получаем следующие условия согласования:

$$\mu(0)=\varphi'(0), \tag{19}$$

$$\mu'(0)=\psi'(0). \tag{20}$$

Результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* $f\in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R})$, $F\in C^1(\overline{Q})$, $\varphi\in C^2([0,\infty))$, $\psi\in C^1([0,\infty))$, $\mu\in C^1([0,\infty))$ *и функция* f *удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция* $k\in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ *такая, что*

$$|f(t,x,z_1)-f(t,x,z_2)|\leqslant k(t,x)|z_1-z_2|.$$

Вторая смешанная задача (5)–(7) имеет единственное решение u, *определённое формулами (9) и (18), из класса* $C^2(\overline{Q})$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия (19) и (20).*

Доказательство леммы следует из теоремы 1, леммы 3 и рассуждений выше.

Отметим, что, в отличие от первой смешанной задачи для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом [4, 24], во второй смешанной задаче условия согласования (19) и (20) граничных функций совпадают с условиями согласования во второй смешанной задаче для линейного случая – волнового уравнения [34].

5. Неединственность решения. Возникает естественный вопрос, что произойдёт в том случае, если функция f не будет удовлетворять условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной? Конечно, можно придумать функцию u, задать каким-либо образом функцию f, вычислить φ, ψ, μ и F и, таким образом, поставить смешанную задачу вида (5)–(7), которая будет иметь глобальное классическое решение по построению. Но будет ли такое решение единственным? Следующий пример показывает, что ответ на последний вопрос, вообще говоря, отрицательный. Выберем функцию f в виде

$$f(t,x,z):=z^\alpha,\quad 0<\alpha<1, \tag{21}$$

и зададим

$$F(t,x)=0,\quad \varphi=\psi=\mu\equiv 0. \tag{22}$$

Легко видеть, что задача (5)–(7), (21), (22) допускает тривиальное решение $u\equiv 0$. Чтобы найти нетривиальные решения задачи (5)–(7), (21), (22), рассмотрим анзац вида

$$u(t,x)=u(t)=\theta t^\gamma,\quad (t,x)\in\overline{Q}, \tag{23}$$

где θ и γ – некоторые действительные числа. Подставляя анзац (23) в уравнение (5), получаем соотношение

$$\theta(\gamma-1)\gamma t^{\gamma-2}=\theta^\alpha t^{\alpha\gamma},$$

из которого следует система уравнений

$$\gamma-2=\gamma\alpha,\quad \theta(\gamma-1)\gamma=\theta^\alpha,$$

имеющая решение

$$\theta = 2^{1/(\alpha-1)}\left(\alpha - 3 + \frac{4}{\alpha+1}\right)^{1/(1-\alpha)}, \quad \gamma = \frac{2}{1-\alpha}. \tag{24}$$

Подставив (24) в (23), найдём функцию

$$u_p(t,x) = 2^{1/(\alpha-1)}\left(\frac{\alpha+1}{\alpha^2-2\alpha+1}\right)^{1/(\alpha-1)} t^{2/(1-\alpha)}. \tag{25}$$

Непосредсвенной проверкой убеждаемся, что функция (25) удовлетворяет начальным (6) и граничному (7) условиям. Значит, мы построили нетривиальное решение задачи (5)–(7), (21), (22), которое представлено формулой (25). Более того, можно легко показать, что склеенное решение

$$u_{p;s}(t,x) = \begin{cases} 0, & t \in [0,s), \\ u_p(t-s,x), & t \in [s,+\infty), \end{cases}$$

с параметром $s > 0$ также удовлетворяет задаче (5)–(7), (21), (22). Таким образом, построено бесконечное множество нетривиальных классических решений этой задачи.

Данный пример показателен ещё тем, что из него следует, что условие типа Липшица

$$|f(t,x,z_1) - f(t,x,z_2)| \leqslant k(t,x)|z_1 - z_2|$$

нельзя ослабить до условия типа Гёльдера

$$|f(t,x,z_1) - f(t,x,z_2)| \leqslant k(t,x)|z_1 - z_2|^{\lambda}$$

с показателем $\lambda \in (0,1)$ и сохранить при этом однозначную разрешимость смешанной задачи.

6. Неоднородные условия согласования. Подобно тому как это было сделано в работах [4, 24, 42–46], рассмотрим теперь задачу (5)–(7) в случае, когда условия согласования (19) и (20) частично или полностью не выполняются. Но, в отличие от первой смешанной задачи, во второй смешанной задаче условия согласования можно задать таким образом, что решение будет иметь произвольный наперёд заданный разрыв на характеристике $x - at = 0$.

Согласно теореме 1 присутствие неоднородных условий согласования нарушает непрерывность функции u или её производных, или всего вместе. Данное заключение можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Утверждение. *Если для заданных функций μ, φ, ψ не выполняются однородные условия согласования (19) и (20), то какими бы гладкими ни были функции f, F, μ, φ и ψ, задача (5)–(7) не имеет классического решения, определённого на $\overline{Q}$.*

Доказательство утверждения следует из теоремы 1.

Пусть заданные функции уравнения (5), граничных условий (6), (7) являются достаточно гладкими и такими как в теореме 3: $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi \in C^2([0,\infty))$, $\psi \in C^1([0,\infty))$, $\mu \in C^1([0,\infty))$. Так как условия согласования (19) и (20), вообще говоря, не выполнены, то получим разрывными производные функции u согласно следующим выражениям:

$$[(u)^+ - (u)^-](t,at) = C^{(1)},$$

$$[(\partial_t u)^+ - (\partial_t u)^-](t,at) = -a[(\partial_x u)^+ - (\partial_x u)^-](t,at) = a(\mu(0) - \varphi'(0)) +$$

$$+ \frac{1}{4a}\int\limits_0^{2at}\left[f\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},(u)^+\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\right)\right) - f\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},(u)^-\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\right)\right)\right]dz,$$

$$[(\partial_t^2 u)^+ - (\partial_t^2 u)^-](t,at) = \frac{1}{2}\Big(f(t,at,(u)^+(t,at)) - f(t,at,(u)^-(t,at))\Big) + 2a(\mu'(0) - \psi'(0)) +$$

$$+\frac{1}{8a}\int\limits_0^{2at}\Bigg\{\Bigg[\bigg((\partial_t u)^+\Big(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\Big)-a(\partial_x u)^+\Big(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\Big)\bigg)\partial_y f\bigg(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},y=(u)^+\Big(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\Big)\bigg)-$$

$$-a\partial_x f\bigg(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},(u)^+\Big(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\Big)\bigg)+\partial_t f\bigg(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},(u)^+\Big(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\Big)\bigg)\Bigg]-$$

$$-\Bigg[\bigg((\partial_t u)^-\Big(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\Big)-a(\partial_x u)^-\Big(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\Big)\bigg)\partial_y f\bigg(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},y=(u)^-\Big(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\Big)\bigg)-$$

$$-a\partial_x f\bigg(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},(u)^-\Big(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\Big)\bigg)+\partial_t f\bigg(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},(u)^-\Big(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\Big)\bigg)\Bigg]\Bigg\}\,dz=$$

$$=a^2[(\partial_x^2 u)^+-(\partial_x^2 u)^-](t,at)+(f(t,at,(u)^+(t,at))-f(t,at,(u)^-(t,at)))=$$

$$=-a[(\partial_t\partial_x u)^+-(\partial_t\partial_x u)^-](t,at)+\frac{1}{2}\bigg(f(t,at,(u)^+(t,at))-f(t,at,(u)^-(t,at))\bigg), \qquad (26)$$

где $C^{(1)}$ – некоторая произвольная наперёд заданная константа из множества действительных чисел (на самом деле, исходя из формул, приведённых в п. 5, $C^{(1)}=0$, но при рассмотрении задачи с условиями сопряжения можем положить $C^{(1)}\neq 0$). Здесь было использовано обозначение $()^{\pm}$ – предельные значения функции u и её частных производных с разных сторон на характеристике $x-at=0$, т.е.

$$(\partial_t^p u)^{\pm}(t,at)=\lim_{\delta\to 0+}\partial_t^p u(t,at\pm\delta).$$

Обозначим $\widetilde{Q}=\overline{Q}\setminus\{(t,x):x-at=0\}$. Справедлива следующая

Теорема 4. *Пусть выполняются условия*

$$f\in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R}),\quad F\in C^1(\overline{Q}),\quad \varphi\in C^2([0,\infty)),\quad \psi\in C^1([0,\infty)),\quad \mu\in C^1([0,\infty))$$

и функция f удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция $k\in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ такая, что

$$|f(t,x,z_1)-f(t,x,z_2)|\leqslant k(t,x)|z_1-z_2|.$$

Вторая смешанная задача (5)–(7) имеет единственное решение $\widetilde{u}$ из класса $C^2(\widetilde{Q})$, которое представляется в виде

$$\widetilde{u}(t,x)=\begin{cases}u^{(1)}(t,x)=K_1[u^{(1)}](t,x), & (t,x)\in Q^{(1)}\bigcup\{(0,x):x\in(0,\infty)\},\\ u^{(2)}(t,x)=K_2[u^{(1)},u^{(2)}](t,x)-C^{(1)}, & (t,x)\in Q^{(2)}\bigcup\{(t,0):t\in(0,\infty)\},\end{cases} \qquad (27)$$

где операторы K_1 и K_2 заданы формулой (18), тогда и только тогда, когда выполняются условия (26).

Для доказательства данной теоремы следует повторить рассуждения, которые привели нас к леммам 1–3.

Теорема 5. *Пусть выполняются условия*

$$f\in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R}),\quad F\in C^1(\overline{Q}),\quad \varphi\in C^2([0,\infty)),\quad \psi\in C^1([0,\infty)),\quad \mu\in C^1([0,\infty))$$

и функция f удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция $k\in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ такая, что

$$|f(t,x,z_1)-f(t,x,z_2)|\leqslant k(t,x)|z_1-z_2|.$$

Вторая смешанная задача (5)–(7) имеет единственное решение $\widetilde{u}$, *определённое формулой (27), из класса* $C^2(\widetilde{Q})\bigcap C(\overline{Q})$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия (26) и* $C^{(1)}=0$.

Доказательство этой теоремы следует фактически из теоремы 4 и формул (26). Действительно, если $C^{(1)}=0$, то решение $\widetilde{u}$ на множестве $\{(t,x): x-at=0\}$ является непрерывным в силу (26). Следовательно, кроме того, что решение $\widetilde{u}\in C^2(\widetilde{Q})$, оно является непрерывной функцией на замыкании $\overline{Q}$, $\widetilde{u}\in C(\overline{Q})$.

Теорема 6. *Пусть выполняются условия*

$$f\in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R}),\quad F\in C^1(\overline{Q}),\quad \varphi\in C^2([0,\infty)),\quad \psi\in C^1([0,\infty)),\quad \mu\in C^1([0,\infty))$$

и функция f *удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция* $k\in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ *такая, что*

$$|f(t,x,z_1)-f(t,x,z_2)|\leqslant k(t,x)|z_1-z_2|.$$

Вторая смешанная задача (5)–(7) имеет единственное решение $\widetilde{u}$, *определённое формулой (27), из класса* $C^2(\widetilde{Q})\bigcap C^1(\overline{Q})$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия (26),* $C^{(1)}=0$ *и (19).*

Доказательство теоремы 6 следует из теорем 4, 5 и формул (26), так как в этом случае решение $\widetilde{u}$ является непрерывным на множестве $\overline{Q}$, но в силу (26) имеет непрерывные производные первого порядка.

Замечание 2. Если заданные функции задачи (5)–(7) не удовлетворяют однородным условиям согласования (19) и (20), то решение задачи (5)–(7) сводится к решению соответствующей задачи сопряжения, где условия сопряжения задаются на характеристике $x-at=0$.

В качестве условий сопряжения могут быть условия (26).

Теперь задачу (5)–(7) можно сформулировать, используя условия (26), следующим образом.

Задача (5)–(7) с условиями сопряжения на характеристиках. Найти классическое решение уравнения (5), удовлетворяющее условиям Коши (6), граничному условию (7), условиям сопряжения (26).

Заметим, что такая формулировка рассмотренной задачи с условиями сопряжения более приемлема для её численной реализации.

7. Слабое решение. Рассмотрим теперь задачу (5)–(7) в случае, когда функции f, F, μ, φ и ψ не обладают достаточной степенью гладкости.

Определение 1. Следуя [47, 48], функцию u, представимую в виде (9), (18), назовём *слабым решением задачи* (5)–(7).

Замечание 3. Любое классическое решение задачи (5)–(7) является также слабым решением этой задачи.

Справедлива следующая

Теорема 7. *Пусть выполняются условия*

$$f\in C(\overline{Q}\times\mathbb{R}),\quad F\in L_1^{\mathrm{loc}}(\overline{Q}),\quad \varphi\in C([0,\infty)),\quad \psi\in L_1^{\mathrm{loc}}([0,\infty)),\quad \mu\in L_1^{\mathrm{loc}}([0,\infty))$$

и функция f *удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция* $k\in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ *такая, что*

$$|f(t,x,z_1)-f(t,x,z_2)|\leqslant k(t,x)|z_1-z_2|.$$

Вторая смешанная задача (5)–(7) имеет единственное слабое решение u *из класса* $C(\overline{Q})$.

Доказательство. Разрешимость интегральных уравнений (18) и принадлежность их решений классу непрерывных функций следует из теоремы 1. Корректность представления (9) следует из того факта, что $u^{(1)}(t,at)=u^{(2)}(t,at)$, исходя из формул (18). Теорема доказана.

Замечание 4. Аналогично п. 5 можно строить слабое решение задачи с условиями сопряжения.

8. Отсутствие решения. В случае линейных гиперболических уравнений с частными производными если задать коэффициентам уравнения и начальным данным нужную гладкость, то решение существует. Однако это неверно для нелинейных уравнений, что можно продемонстрировать следующими утверждениями, которые доказываются методами энергии. Но эти методы не охватывают все возможные случаи задания начальных условий, поэтому наложим следующие ограничения на нелинейность, правую часть уравнения, начальные и граничные данные смешанной задачи.

Условие А. Функции F и μ тождественно равны нулю, функция f имеет вид $f(t,x,z) = -g(z)$, где $g(0)=0$, и выполнены условия гладкости $\varphi \in C_c^2([0,\infty))$, $\psi \in C_c^1([0,\infty))$ и $g \in C^1(\mathbb{R})$.

В условии А использовано обозначение $C_c^k(\Omega)$ – множество непрерывно дифференцируемых функций до порядка $k \in \mathbb{N}$, определённых на множестве Ω и имеющих компактный носитель.

Также при выполнении условия А введём обозначение

$$G(z) = \int\limits_0^z g(\xi)d\xi, \quad z \in \mathbb{R},$$

и определим функцию "энергии"

$$E\colon [0,\infty) \ni t \mapsto E(t) = \int\limits_0^\infty \left[\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right)^2 + a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right)^2\right) + G(u(t,x))\right] dx \in \mathbb{R},$$

сопоставляемую решению u смешанной задачи (5)–(7). При этом явную зависимость E от u обозначать не будем (т.е. следовало бы записывать $E[u](t)$ или $E(u)(t)$, или $Eu(t)$ вместо $E(t)$), но будем её подразумевать.

Лемма 4 (закон сохранения энергии). *Пусть выполняется условие А. Тогда решению u второй смешанной задачи (5)–(7) соответствует постоянная функция "энергии" E, т.е. $E(t) \equiv \mathrm{const}$.*

Доказательство. В самом деле, легко вычислить

$$E'(t) = \int\limits_0^\infty \left[\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}u(t,x) + a^2\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}u(t,x) + g(u(t,x))\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right] dx =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right)\bigg|_0^\infty + \int\limits_0^\infty \left[\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + g(u(t,x))\right)\right] dx = 0, \quad t \in [0,\infty).$$

Интегрирование по частям в этом доказательстве корректно, так как функция $x \mapsto u(t,x)$ имеет компактный носитель для любого времени $t \in [0,\infty)$, что легко доказывается, исходя из конечности скорости распространения и области зависимости [3, с. 660–662]. Лемма доказана.

Теорема 8. *Пусть выполняется условие А и верно неравенство*

$$zg(z) \leqslant \lambda G(z), \quad z \in \mathbb{R}, \tag{28}$$

для некоторой константы $\lambda > 2$. Также предположим, что энергия отрицательна:

$$E(0) = \int\limits_0^\infty \left[\frac{1}{2}\left(\psi^2(x) + a^2(\varphi'(x))^2\right) + G(\varphi(x))\right] dx < 0. \tag{29}$$

Тогда не существует решения второй смешанной задачи (5)–(7), определённого на всём множестве $\overline{Q}$.

Доказательство. Доказательство теоремы проведём по схеме, изложенной в книге [15, с. 687–688].

1. Обозначим

$$I(t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty u^2(t,x)\,dx,\quad t\in[0,\infty).$$

Тогда

$$I''(t)=\int\limits_0^\infty\bigg[\bigg(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\bigg)^2+u(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)\bigg]\,dx=$$

$$=\int\limits_0^\infty\bigg[\bigg(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\bigg)^2+u(t,x)\bigg(a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)-g(u(t,x))\bigg)\bigg]\,dx=$$

$$=\int\limits_0^\infty\bigg[\bigg(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\bigg)^2-a^2\bigg(\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\bigg)^2-g(u(t,x))u(t,x)\bigg]\,dx,\quad t\in[0,\infty).\tag{30}$$

Интегрирование по частям здесь также корректно, так как функция $x\mapsto u(t,x)$ имеет компактный носитель для любого $t\in[0,\infty)$.

В силу закона сохранения энергии имеем

$$E(t)=\int\limits_0^\infty\bigg[\frac{1}{2}\bigg(\bigg(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\bigg)^2+a^2\bigg(\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\bigg)^2\bigg)+G(u(t,x))\bigg]\,dx=E(0),\quad t\in[0,\infty).$$

В (30) добавим слагаемые $(2+4\alpha)E(0)$ и $-(2+4\alpha)E(0)$:

$$I''(t)=(2+2\alpha)\int\limits_0^\infty\bigg(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\bigg)^2\,dx+2\alpha\int\limits_0^\infty a^2\bigg(\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\bigg)^2\,dx+$$

$$+\int\limits_0^\infty[(2+4\alpha)G(u(t,x))-g(u(t,x))u(t,x)]\,dx-(2+4\alpha)E(0),\quad t\in[0,\infty).\tag{31}$$

Выберем $\alpha>0$ так, чтобы $2+4\alpha=\lambda$, где λ – это константа из предположения (28). Тогда последний интегральный член выражения (31) неотрицательный, и поэтому

$$I''(t)\geqslant(2+2\alpha)\int\limits_0^\infty\bigg(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\bigg)^2\,dx-\lambda E(0),\quad t\in[0,\infty).\tag{32}$$

Поскольку

$$I'(t)=\int\limits_0^\infty u(t,x)\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\,dx,\quad t\in[0,\infty),$$

то неравенство (32) влечёт за собой соотношения

$$(1+\alpha)(I'(t))^2\leqslant(1+\alpha)\int\limits_0^\infty u^2(t,x)\,dx\int\limits_0^\infty\bigg(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\bigg)^2\,dx\leqslant I(t)(I''(t)-\beta),\quad t\in[0,\infty),\tag{33}$$

где $\beta=-\lambda E(0)>0$.

2. Пусть $J = I^{-\alpha}$. Тогда, пользуясь (33), подсчитаем

$$J'' = \alpha(\alpha+1)I^{-(\alpha+2)}(I')^2 - \alpha I^{-(\alpha+1)}I'' \leqslant -\alpha\beta I^{-(\alpha+1)} = -\alpha\beta J^{1+1/\alpha}. \tag{34}$$

Это показывает, что J – вогнутая функция. Предположим, что существует такое $t_0 > 0$, что $J'(t_0) < 0$. Тогда вогнутость функции J влечёт за собой

$$J(t) \leqslant J(t_0) + (t - t_0)J'(t_0), \quad t \in [0, \infty).$$

Из последнего неравенства следует противоречие: $J(t) < 0$ для достаточно больших t. Предположим вместо этого, что $J'(t) \geqslant 0$ для всех $t > 0$. Тогда из (34) следует

$$J''(t) \leqslant -\alpha\beta J^{1+1/\alpha}(0) = -\gamma, \quad t \in [0, \infty).$$

Имеем $\gamma > 0$, так как предположение об отрицательной энергии (29) подразумевает $\varphi \not\equiv 0$. Таким образом,

$$J'(t) \leqslant J'(0) - \gamma t < 0$$

для достаточно больших t, и мы снова приходим к противоречию. Теорема доказана.

9. Вторая смешанная задача (1)–(3). Применим результаты, полученные для вспомогательной задачи (5)–(7), к основной задаче (1)–(3).

Теорема 9. *Пусть выполняются условия*

$$\varrho \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}), \quad \Phi \in C^1(\overline{Q}), \quad w_0 \in C^2([0,\infty)), \quad w_1 \in C^1([0,\infty)), \quad w_N \in C^1([0,\infty))$$

и функция ϱ удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция $\varkappa \in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ такая, что

$$|\varrho(t,x,z_1) - \varrho(t,x,z_2)| \leqslant \varkappa(t,x)|z_1 - z_2|.$$

Вторая смешанная задача (1)–(3) имеет единственное решение w из класса $C^2(\overline{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$w_N(0) = w_0'(0), \tag{35}$$

$$w_N'(0) = w_1'(0). \tag{36}$$

Доказательство теоремы фактически следует из теоремы 3 и рассуждений выше. В самом деле, заменой (4) задача (1)–(3) приводится к задаче (5)–(7), где условия существования и единственности классического решения исследованы. При этом, как отмечено ранее, гладкость нелинейности и правой части уравнения, начальных и граничных данных не ухудшается (т.е. “новые” функции f, F, φ, ψ и μ будут удовлетворять условиям гладкости, указанным в теореме 3), и нелинейный член также будет удовлетворять условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной

$$|f(t,x,z_1) - f(t,x,z_2)| \leqslant k(t,x)|z_1 - z_2|,$$

где $k = \varkappa + \beta^2/4 \in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$. Условия согласования (35) и (36), по-сути, являются условиями согласования (19) и (20), представленными в терминах функций w_N, w_1 и w_2.

Поскольку дифференциальное уравнение (1) содержит член $\beta\partial_t w$, то слабое решение задачи (1)–(3) можно очевидным образом строить в пространстве $C^{1,0}(\overline{Q})$ или $C^1(\overline{Q})$, как это сделано в статье [25]. Однако существует способ определения слабого решения задачи (1)–(3) в классе $C(\overline{Q})$, который мы представим.

Определение 2. Функцию w, представимую в виде (4), назовём *слабым решением задачи* (1)–(3), если функция u есть слабое решение задачи (5)–(7).

Замечание 5. Любое классическое решение задачи (1)–(3) является также слабым решением этой задачи.

Справедлива следующая

Теорема 10. *Пусть выполняются условия*

$$\varrho \in C(\overline{Q}\times\mathbb{R}),\quad \Phi \in L_1^{\mathrm{loc}}(\overline{Q}),\quad w_0 \in C([0,\infty)),\quad w_1 \in L_1^{\mathrm{loc}}([0,\infty)),\quad w_N \in L_1^{\mathrm{loc}}([0,\infty))$$

и функция ϱ *удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция* $\varkappa \in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ *такая, что*

$$|\varrho(t,x,z_1)-\varrho(t,x,z_2)| \leqslant \varkappa(t,x)|z_1-z_2|.$$

Вторая смешанная задача (1)–(3) имеет единственное слабое решение u *из класса* $C(\overline{Q})$.

Доказательство теоремы фактически следует из теоремы 7 и рассуждений выше.

Аналогичным образом можно также рассматривать задачу с условиями сопряжения и переформулировать теоремы 4–6 в терминах функций ϱ, Φ, w_N, w_1 и w_2. Однако из (26) и (4) следует

$$[(w)^+-(w)^-](t,at)=\left[\left(u\exp\left(\frac{\beta t}{2}\right)\right)^+-\left(u\exp\left(\frac{\beta t}{2}\right)\right)^-\right](t,at)=C^{(1)}\exp\left(\frac{\beta t}{2}\right)\neq\mathrm{const},$$

что, с одной стороны, является в некотором смысле проблемой, так как в этом случае разрыв задаётся не в виде произвольной постоянной, как бы нам хотелось. Она не может быть решена в таком методе исследования задачи (1)–(3). Возможные способы решения этой проблемы будут представлены в дальнейших публикациях. С другой стороны, этот подход позволяет строить разрыв решения w задачи (1)–(3) на характеристике $x-at=0$ в виде переменной величины $C^{(1)}\exp(\beta t/2)$, где $C^{(1)}\in\mathbb{R}$, что является преимуществом метода.

Заключение. В статье сформулированы достаточные условия существования единственного классического решения второй смешанной задачи в четверти плоскости для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом. Показано, что нарушение условий согласования приводит к невозможности построения классического решения во всей четверти плоскости. В случае невыполнения данных условий рассмотрена задача с условиями сопряжения на характеристиках. При недостаточной гладкости исходных данных построено слабое решение начальной задачи и доказана его единственность. Также приведены примеры неединственности и несуществования глобального классического решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Физическая энциклопедия: в 5 т. / Гл. ред. А.М. Прохоров. М., 1992. Т. 3.
2. Nonlinear system. Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Nonlinear_system. Дата доступа: 31 мая 2023.
3. Nonlinear partial differential equation. Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Nonlinear_partial_differential_equation. Дата доступа: 31 мая 2023.
4. *Корзюк В.И., Рудько Я.В.* Классическое решение первой смешанной задачи для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 2. С. 174–184.
5. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. New York, 2012.
6. *Lebwohl P., Stephen M.J.* Properties of vortex lines in superconducting barriers // Phys. Rev. 1967. V. 163. № 2. P. 376–379.
7. *Nakayama Y.* Liouville field theory: a decade after the revolution // Int. J. of Modern Phys. A. 2004. V. 19. № 17–18. P. 2771–2930.
8. *Bereanu C.* Periodic solutions of the nonlinear telegraph equations with bounded nonlinearities // J. Math. Anal. Appl. 2008. V. 343. P. 758–762.
9. *Kim W.S.* Boundary value problem for nonlinear telegraph equations with superlinear growth // Nonlin. Anal.: Theory, Methods & Appl. 1998. V. 12. № 12. P. 1371–1376.
10. *Fucik S., Mawhin J.* Generalized periodic solutions of nonlinear telegraph equations // Nonlin. Anal.: Theory, Methods & Appl. 1978. V. 2. № 5. P. 609–617.

11. *Рудаков И.А.* Периодические решения нелинейного волнового уравнения с граничными условиями Неймана и Дирихле // Изв. вузов. Математика. 2007. № 2. С. 46–55.
12. *Рудаков И.А.* Нетривиальное периодическое решение нелинейного волнового уравнения с однородными граничными условиями // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 10. С. 1392–1399.
13. *Рудаков И.А.* Периодические решения квазилинейного волнового уравнения с однородными граничными условиями // Фунд. и прикл. математика. 2006. Т. 12. № 5. С. 189–201.
14. *Плотников П.И.* Существование счетного множества периодических решений задачи о вынужденных колебаниях для слабо нелинейного волнового уравнения // Мат. сб. 1988. Т. 178. № 4. С. 546–560.
15. *Evans L.C.* Partial Differential Equations. Providence, 2010.
16. *Jörgens K.* Das Anfangswertproblem in Großen für eine Klasse nichtlinearer Wellengleichungen // Math. Zeitschr. 1961. Bd. 208. S. 295–308.
17. *Shibata Y., Tsutsumi Y.* Global existence theorem for nonlinear wave equation in exterior domain // Proc. Japan Acad. Ser. A. 1984. V. 60. P. 14–17.
18. *Lions J.L., Strauss W.A.* Some non-linear evolution equations // Bull. de la Société Mathématique de France. 1965. V. 93. P. 43–96.
19. *Gallagher I., Gérard P.* Profile decomposition for the wave equation outside a convex obstacle // J. de Mathématiques Pures et Appliquées. 2001. V. 80. № 1. P. 1–49.
20. *Ikehata R.* Two dimensional exterior mixed problem for semilinear damped wave equations // J. Math. Anal. Appl. 2005. V. 301. № 2. P. 366–377.
21. *Ikehata R.* Global existence of solutions for semilinear damped wave equation in 2-D exterior domain // J. Differ. Equat. 2004. V. 200. № 1. P. 53–68.
22. *Лавренюк С.П., Пукач П.Я.* Мішана задача для нелінійного гіперболічного рівняння в необмеженій за просторовими змінними області // Український мат. журн. 2007. Т. 59. № 11. С. 1523–1531.
23. *Джохадзе О.М.* Смешанная задача с нелинейным граничным условием для полулинейного уравнения колебания струны // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 5. С. 591–606.
24. *Корзюк В.И., Рудько Я.В.* Классическое и слабое решение первой смешанной задачи для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. 2023. Т. 43. С. 48–63.
25. *Корзюк В.И., Рудько Я.В.* Классическое решение задачи Коши для одномерного квазилинейного волнового уравнения // Докл. НАН Беларуси. 2023. Т. 67. № 1. С. 14–19.
26. *Kharibegashvili S., Jokhadze O.* The second Darboux problem for the wave equation with integral nonlinearity // Trans. of A. Razmadze Math. Inst. 2016. V. 170. № 3. P. 385–394.
27. *Берикелашвили Г.К., Джохадзе О.М., Мидодашвили Б.Г., Харибегашвили С.С.* О существовании и отсутствии глобальных решений первой задачи Дарбу для нелинейных волновых уравнений // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 3. С. 359–372.
28. *Jokhadze O.* On existence and nonexistence of global solutions of Cauchy–Goursat problem for nonlinear wave equations // J. of Math. Anal. and Appl. 2008. V. 340. № 2. P. 1033–1045.
29. *Харибегашвили С.С., Джохадзе О.М.* Вторая задача Дарбу для волнового уравнения со степенной нелинейностью // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 12. С. 1623–1640.
30. *Ломовцев Ф.Е.* Вторая смешанная задача для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами в первой четверти плоскости // Веснік Гродзенскага дзярж. ўн-та імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2022. Т. 12. № 3. С. 50–70.
31. *Корзюк В.И., Рудько Я.В.* Метод отражений для уравнения Клейна–Гордона // Докл. НАН Беларуси. 2022. Т. 66. № 3. С. 263–268.
32. *Корзюк В.И., Козловская И.С., Соколович В.Ю., Сериков В.П.* Решение произвольной гладкости одномерного волнового уравнения для задачи со смешанными условиями // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2021. Т. 57. № 3. С. 286–295.
33. *Корзюк В.И., Наумовец С.Н., Севастюк В.А.* О классическом решении второй смешанной задачи для одномерного волнового уравнения // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2018. Т. 26. № 1. С. 35–42.
34. *Корзюк В.И., Козловская И.С.* Классические решения задач для гиперболических уравнений. Ч. 2. Минск, 2017.
35. *Пикулин В.П., Похожаев С.И.* Практический курс по уравнениям математической физики. М., 2004.
36. *Korzyuk V.I., Rudzko J.V.* Classical solution of the initial-value problem for a one-dimensional quasilinear wave equation // XX междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям (Еругинские чтения–2022). Новополоцк, 2022. Ч. 2. С. 38–39.

37. *Cain G.L. Jr., Nashed M.Z.* Fixed points and stability for a sum of two operators in locally convex spaces // Pacific J. of Math. 1971. V. 39. № 3. P. 581–592.
38. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М., 2002.
39. *Mitrinović D.S., Pečarić J.E., Fink A.M.* Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives. Dordrecht, 1991.
40. *Вайнберг М.М.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М., 1956.
41. *Korzyuk V.I., Rudzko J.V.* Curvilinear parallelogram identity and mean-value property for a semilinear hyperbolic equation of second-order // arXiv:2204.09408.
42. *Корзюк В.И., Столярчук И.И.* Классическое решение первой смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка в криволинейной полуполосе с переменными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 1. С. 77–88.
43. *Корзюк В.И., Столярчук И.И.* Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения типа Клейна–Гордона–Фока с неоднородными условиями согласования // Докл. НАН Беларуси. 2019. Т. 63. № 1. С. 7–13.
44. *Корзюк В.И., Козловская И.С., Наумовец С.Н.* Классическое решение первой смешанной задачи одномерного волнового уравнения с условиями типа Коши // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2015. № 1. С. 7–21.
45. *Корзюк В.И., Наумовец С.Н., Сериков В.П.* Смешанная задача для одномерного волнового уравнения с условиями сопряжения и производными второго порядка в граничных условиях // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2020. Т. 56. № 3. С. 287–297.
46. *Моисеев Е.И., Корзюк В.И., Козловская И.С.* Классическое решение задачи с интегральным условием для одномерного волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1373–1385.
47. *Ikeda M., Inui T., Wakasugi Y.* The Cauchy problem for the nonlinear damped wave equation with slowly decaying data // Nonlin. Differ. Equat. Appl. 2017. V. 50. № 2. Art. 10.
48. *Iwamiya T.* Global existence of mild solutions to semilinear differential equations in Banach spaces // Hiroshima Math. J. 1986. V. 50. P. 499–530.

Белорусский государственный университет,
г. Минск,
Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск

Поступила в редакцию 05.04.2023 г.
После доработки 06.06.2023 г.
Принята к публикации 21.08.2023 г.