ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 9, с. 1240–1246

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.958

ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ДЛЯ ПОЛЕЙ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ НА ПРОНИЦАЕМЫХ ТЕЛАХ ВРАЩЕНИЯ

© 2023 г. Ю. А. Еремин, В. В. Лопушенко

На основе интегральных представлений с плотностями, распределёнными вдоль отрезка оси симметрии, построено и обосновано представление решения граничной задачи дифракции плоской волны на локальном проницаемом теле вращения с гладкой поверхностью. Полученное интегральное представление позволяет избежать резонансов внутренней области при анализе частотных характеристик рассеяния.

DOI: 10.31857/S037406412309008X, EDN: WQFZOQ

Введение. Впечатляющие достижения наноплазмоники позволили добиться огромных успехов в продвижении научных результатов и технологических прорывов в последние годы. Огромный вклад был внесён в разработку новых подходов к лечению онкологических образований, инновационных средств улавливания и хранения солнечной энергии, а также в реализацию плазмонного нанолазера [1]. Все эти технологии так или иначе связаны с локализованным плазмонным резонансом в наночастицах при облучении волнами оптического диапазона. Совершенствование технологий синтеза частиц привело к тому, что их средний размер уменьшился до 10–20 нм, что составляет 1/20–1/50 от длины волны внешнего возбуждения [2]. Наиболее технологичными формами частиц являются тела вращения: сферы, сфероиды и цилиндры [3]. Это обстоятельство позволяет использовать для анализа оптических характеристик подобных наночастиц подход, связанный с разложением полей в ряд Фурье по азимутальной переменной с последующей аппроксимацией каждой отдельной гармоники [4]. В настоящей работе нами разработан подход, позволяющий строить интегральные представления для полей в задачах дифракции плоской волны на проницаемом теле вращения с носителями, расположенными на оси симметрии рассеивателя. Подобные представления в рамках дискретного аналога – метода дискретных источников – успешно используются в задачах наноплазмоники [5].

1. Постановка задачи. Будем рассматривать задачу дифракции поля плоской волны u^0 на проницаемом теле вращения с внутренней областью D_i в $\mathbb{R}^3$, ограниченном гладкой замкнутой поверхностью $\partial D_i \in C^{(2,\nu)}$. Математическая постановка граничной задачи имеет вид

$$\triangle u_{e,i} + k_{e,i}^2 u_{e,i} = 0, \quad M \in D_{e,i}, \quad D_e = \mathbb{R}^3 \setminus /\overline{D}_i;$$

$$u_i(Q) - u_e(Q) = u^0(Q), \quad \frac{\partial u_i(Q)}{\partial n} - \frac{\partial u_e(Q)}{\partial n} = \frac{\partial u^0(Q)}{\partial n}, \quad Q \in \partial D_i;$$

$$\frac{\partial u_e}{\partial r} - ik_e u_e = o(r^{-1}), \quad r \to \infty. \tag{1}$$

Здесь $k_{e,i}$ – волновые числа в областях $D_{e,i}$ соответственно. Будем полагать, что $k_e > 0$, $\operatorname{Im} k_i \geqslant 0$. Как известно, задача (1) имеет единственное классическое решение [6, с. 112].

2. Вспомогательные результаты. Прежде всего нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть $U(M)$ есть функция, удовлетворяющая уравнению Гельмгольца с постоянным волновым числом k в некоторой области D. Выберем цилиндрическую систему* *координат* (ρ,φ,z). *Обозначим через* u_m *фурье-гармонику функции* $U(M)$ *по* φ. *Тогда существует предел вида*

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{u_m(\zeta)}{\rho^m}=v_m(z),\quad m\in\{0,\mathbb{N}\},\tag{2}$$

который представляет собой аналитическую функцию координаты z. *Здесь* $\zeta=(\rho,z)$ – *точка, расположенная в полуплоскости* $\Phi\colon\ \varphi=\mathrm{const}$.

Доказательство. Выберем шар B с центром в начале координат, целиком расположенный в области D. Тогда функция $U(M)$ внутри шара может быть представлена в виде [7, с. 45, 46]

$$U(M)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}a_n^m j_n(kr)P_n^m(\cos\theta)e^{im\varphi},\tag{3}$$

здесь $j_n(kr)$ – сферическая функция Бесселя, $P_n^m(\cos\theta)$ – присоединённый полином Лежандра, $r=|M|$. Коэффициент Фурье этой функции по φ принимает вид

$$u_m(\zeta)=\sum_{n=m}^{\infty}a_n^m j_n(kr)P_n^m(\cos\theta),\quad m\in\{0,\mathbb{N}\}.$$

Выразим присоединённый полином Лежандра через гипергеометрическую функцию [8, с. 786]

$$P_n^{|m|}(\cos\theta)=2^{-|m|}\frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!m!}\frac{\rho^{|m|}}{r^{|m|}}F(|m|-n,|m|+n+1,|m|+1,(1-\cos\theta)/2).$$

Принимая во внимание, что $F(|m|-n,|m|+n+1,|m|+1,0)=1$, предел (2) можно записать в следующем виде:

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{u_m(\zeta)}{\rho^m}=v_m(z)=\sum_{n=m}^{\infty}b_n^m\frac{j_n(kz)}{z^m},$$

где $b_n^m=a_n^m 2^{-|m|}(n+|m|)!/((n-|m|)!m!)$. Учитывая асимптотику сферических функций Бесселя [9, с. 258]

$$\frac{j_n(x)}{x^n}(x\to 0)=\frac{1}{(2n+1)!!},$$

можно заключить, что $v_m(z)$ представляет собой аналитическую функцию переменной z при всех $m\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* Z_0 – *отрезок оси* Z, *целиком расположенный внутри области* $D\bigcap\Phi$. *Тогда из того, что* $v_m(z)\equiv 0$, $z\in Z_0$, *следует* $u_m(\zeta)\equiv 0$, $\zeta\in D\bigcap\Phi$.

Доказательство. В силу условия леммы имеем

$$\sum_{n=m}^{\infty}b_n^m\frac{j_n(kz)}{z^m}\equiv 0.$$

Устремляя последовательно $z\to 0$ для $n=m,m+1,\ldots$ и учитывая асимптотику функции Бесселя в нуле, получаем, что все $b_n^m=0$. Лемма доказана.

Представление для функции $U(M)$, удовлетворяющей уравнению Гельмгольца с постоянным волновым числом, можно получить не только в виде ряда (3). В частности, она может быть представлена в виде потенциала простого или двойного слоёв или их комбинации [6, с. 64, 65] с плотностями, распределёнными по поверхности ∂D_i. Причём в случае нерезонансной поверхности это представление единственно.

Теорема 1. *Конкретный вид функций для интегрального представления фурье-гармоник полей, удовлетворяющих условиям излучения, с плотностями, распределёнными по отрезку оси* Z, *следующий:*

$$Y_m^e(\zeta,\bar z)=h_m^{(1)}(kR_{\zeta\bar z})P_m^m(\cos\theta_{\bar z}),$$

здесь $R^2_{\zeta\bar z} = \rho^2 + (z-\bar z)^2$, $P^m_m(\cos\theta_{\bar z}) = (\sin\theta_{\bar z})^m$, $\sin\theta_{\bar z} = \rho/R_{\zeta\bar z}$, $h^{(1)}_m(kR)$ *– сферические функции Ханкеля, удовлетворяющие условиям излучения задачи (1).*

Доказательство. Будем использовать в области D_i представление для функции $U(M)$ в виде потенциала простого слоя с плотностью μ. Тогда

$$U(M) = \int\limits_{\partial D_i} \Psi(M,P)\mu(P)\,d\sigma_P, \quad M\in D_i,$$

где $\Psi(M,P)$ – фундаментальное решение уравнения Гельмгольца. Перейдём к фурье-гармоникам $u_m(\zeta)$, $\zeta\in\Phi$:

$$u_m(\zeta) = \int\limits_{L_i} S_m(\zeta,\xi)\mu_m(\xi)dl_\xi.$$

Здесь L_i – образующая поверхности вращения ∂D_i, $\xi\in L_i$ и функции

$$S_m(\zeta,\xi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Psi(M,P)\exp\{-im\varphi_p\}d\varphi_p$$

являются S-функциями, которые были введены Е.Н. Васильевым [10, с. 232, 233]. Для них справедливы следующие представления:

$$\operatorname{Im} S_m(\zeta,\xi) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\rho\bar\rho)^{2l+|m|}}{l!(l+|m|)!2^{2l+|m|}}R_1^{-(2l+|m|+1/2)}J_{2l+|m|+1/2}(R_1),$$

$$\operatorname{Re} S_m(\zeta,\xi) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\rho\bar\rho)^{2l+|m|}}{l!(l+|m|)!2^{2l+|m|}}R_1^{-(2l+|m|+1/2)}N_{2l+|m|+1/2}(R_1),$$

где $R_1^2 = \rho^2+\bar\rho^2+(z-\bar z)^2$, а J_α, N_α – цилиндрические функции Бесселя и Неймана соответственно. Из представлений для функций $S_m(\zeta,\xi)$ непосредственно следует, что

$$\lim_{\bar\rho\to 0}\frac{S_m(\zeta,\xi)}{\bar\rho^m} = q_m h^{(1)}_m(kR_{\zeta\bar z})P^m_m(\cos\theta_{\bar z}), \quad q_m = \text{const}.$$

Теорема 1 доказана.

Легко видеть, что система функций $\{Y_m(M)\} = h^{(1)}_m(kR_{\zeta\bar z})P^m_m(\cos\theta_{\bar z})\exp(im\varphi)$, $M = (\rho,\varphi,z)$, удовлетворяет вне оси Z уравнению Гельмгольца и условиям излучения на бесконечности.

3. Интегральное представление решения. Будем строить решение (1) на основе интегральных представлений аналогично схеме [11]. Поскольку построенные ранее функции $h^{(1)}_m(kR_{\zeta\bar z})P^m_m(\cos\theta_{\bar z})\exp(im\varphi)$, $j_m(kR_{\zeta\bar z})P^m_m(\cos\theta_{\bar z})\exp(im\varphi)$, $j_m(\cdot)$ – сферические функции Бесселя [8, с. 790], удовлетворяют уравнениям Гельмгольца по M в соответствующих областях, то достаточно удовлетворить граничным условиям задачи (1). Разложим поле плоской волны u^0 в ряд Фурье по переменной φ следующим образом [8, с. 781]:

$$u^0(M) = \exp[ik_{\mathrm e}(x\sin\theta_0 - z\cos\theta_0)] = \exp[-ik_{\mathrm e}z\cos\theta_0]\sum_{m=0}^{\infty}(2-\delta_{m0})(-j)^m J_m(\rho\sin\theta_0)\cos(m\varphi),$$

здесь θ_0 – угол падения плоской волны, δ_{m0} – символ Кронекера. Зафиксируем произвольное целое m, тогда фурье-гармоники граничных условий приобретают вид

$$u^m_i(\zeta) - u^m_e(\zeta) = u^0_m(\zeta), \quad \frac{\partial u^m_i(\zeta)}{\partial n} - \frac{\partial u^m_e(\zeta)}{\partial n} = \frac{\partial u^0_m(\zeta)}{\partial n}, \quad \zeta\in L_i, \tag{4}$$

где L_i – образующая поверхности вращения ∂D_i. Теперь наша задача состоит в том, чтобы показать, что граничные условия для гармоник можно выполнить посредством интегральных представлений с любой степенью точности.

Для этого на отрезке оси симметрии Z_0 зададим плотности $\beta_{e,i} \in L_2(Z_0)$ и будем искать представления решения граничной задачи (1) в виде

$$u_e^m(\zeta) = \int\limits_{Z_0} \Psi_m(k_e, \zeta, z)\beta_e(z)\, dz, \tag{5}$$

$$u_i^m(\zeta) = \int\limits_{Z_0} \Phi_m(\zeta, z)\beta_i(z)\, dz, \tag{6}$$

здесь $\Psi_m(k_e, \zeta, \bar z) = h_m^{(1)}(k_e R_{\zeta\bar z}) P_m^m(\cos\theta_{\bar z})$, $\Phi_m(\zeta, \bar z) = j_m(k_i R_{\zeta\bar z}) P_m^m(\cos\theta_{\bar z})$.

Обозначим соответствующие интегральные операторы в (5), (6) как $\mathbf{A}_{e,i}$. Операторы действуют из $L_2(Z_0)$ в $L_2(L_i)$. Формально подставляя интегральные представления для полей в условия сопряжения задачи (1), получаем следующие соотношения:

$$\mathbf{A}_i\beta_i - \mathbf{A}_e\beta_e = p(\zeta), \quad \zeta \in \partial D_i;$$

$$\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\mathbf{A}_i\beta_i - \frac{\partial}{\partial n_\zeta}\mathbf{A}_e\beta_e = q(\zeta), \quad \{p, q\} \in \mathbf{L}_2(L_i) = L_2(L_i) \times L_2(L_i).$$

Образуем матричный оператор

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{A}_e \\ \partial_\zeta \mathbf{A}_i & \partial_\zeta \mathbf{A}_e \end{bmatrix},$$

действующий из $\mathbf{L}_2(Z_0) = L_2(Z_0) \times L_2(Z_0)$ в $\mathbf{L}_2(L_i)$. Здесь для краткости введено обозначение $\partial_\zeta = \partial/\partial n_\zeta$. В силу того, что все элементы матричного оператора представляют собой вполне непрерывные операторы, матричный оператор $\mathbf{B}$ является оператором с незамкнутой областью значений в $\mathbf{L}_2(L_i)$ [12, с. 227]. Наша задача состоит в том, чтобы показать, что замыкание области его значений $\overline{R(\mathbf{B})}$ совпадает со всем пространством $\mathbf{L}_2(L_i)$.

Теорема 2. *Замыкание области значений* $\overline{R(\mathbf{B})}$ *оператора* $\mathbf{B}$ *совпадает со всем пространством* $\mathbf{L}_2(L_i)$.

Доказательство.

1. Поскольку оператор $\mathbf{B}$ определён на всём пространстве $\mathbf{L}_2(Z_0)$, то существует сопряжённый оператор [12, с. 191], действующий из $\mathbf{L}_2(L_i)$ в $\mathbf{L}_2(Z_0)$: $(\mathbf{B}x, y) = (x, \mathbf{B}^*y)$. Запишем его как

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i^* & (\partial_Q \mathbf{A}_i)^* \\ \mathbf{A}_e^* & (\partial_Q \mathbf{A}_e)^* \end{bmatrix}.$$

2. Для доказательства теоремы достаточно показать, что имеет место равенство [12, с. 227]

$$N(\mathbf{B}^*) = \{\varnothing\}.$$

От противного предположим, что существуют функции $\{p, q\} \in \mathbf{L}_2(L_i)$ такие, что $\|p\| + \|q\| \neq 0$, и в то же время

$$\mathbf{B}^*\{p, q\} = \mathbf{0}.$$

Заметим, что функции $\{p, q\}$ должны удовлетворять дополнительным условиям при $\rho \to +0$ [13, с. 175–178], которые запишем подробно, опустив знаки комплексного сопряжения:

$$\int\limits_{L_i} [\Psi_m(k_e, \zeta, z)p(\zeta) + \partial_\zeta \Psi_m(k_e, \zeta, z)q(\zeta)]\, d\sigma_\zeta = 0, \quad z \in Z_0,$$

$$\int\limits_{L_i} [\Phi_m(\zeta, z)p(\zeta) + \partial_\zeta \Phi_m(\zeta, z)q(\zeta)]\, d\sigma_\zeta = 0, \quad z \in Z_0.$$

Введём в области D_i следующие функции:

$$W(\xi) = \int\limits_{L_i} \{\Psi_m(k_e, \zeta, \xi)p(\zeta) + \partial_\zeta \Psi_m(k_e, \zeta, \xi)q(\zeta)\}\, d\sigma_\zeta, \quad \xi \in \Phi \bigcap D_i, \tag{7}$$

$$V(\xi) = \int\limits_{L_i} \{\Phi_m(\zeta, \xi)p(\zeta) + \partial_\zeta \Phi_m(\zeta, \xi)q(\zeta)\}\, d\sigma_\zeta. \tag{8}$$

С учётом (7), (8) и на основе результатов леммы 2 получаем

$$W(\xi) = 0, \quad \xi \in \Phi \bigcap D_i, \tag{9}$$

$$V(\xi) = 0, \quad \xi \in \Phi \bigcap D_i, \tag{10}$$

где выражение (9) представляет собой соотношение метода нулевого поля для фурье-гармоники [14].

Для завершения доказательства необходимо преобразовать соотношение (10). Будем действовать по схеме, изложенной в работе [15]. Заметим, что $V(\xi)$ – целая функция в полуплоскости в силу свойств ядра Φ_m. Следовательно, равенство (10) справедливо в любой конечной части полуплоскости Φ.

Выберем полуокружность Σ_R с радиусом R так, чтобы область $\Phi \bigcap D_i$ целиком содержалась внутри и не касалась полукруга. Будем полагать, что внутренняя область нерезонансная для заданного значения k_i. В силу предыдущего, на Σ_R имеет место равенство

$$\int\limits_{L_i} [\Phi_m(\zeta, \xi)p(\zeta) + \partial_\zeta \Phi_m(\zeta, \xi)q(\zeta)]\, d\sigma_\zeta = 0, \quad \xi \in \Sigma_R. \tag{11}$$

Воспользуемся обобщённой теоремой сложения Гегенбауера следующего вида [16]:

$$\frac{h_m^{(1)}(kR_{\zeta\xi})}{R_{\zeta\xi}^m} = \kappa_m \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_{lm} \frac{h_{l+m}^{(1)}(kr_\zeta)}{(kr_\zeta)^m} \frac{j_{l+m}(kr_\xi)}{(kr_\xi)^m}, \quad r_\xi < r_\zeta, \tag{12}$$

где

$$\kappa_m = k^{-m} 2^{m+1/2} (2m-1)!! \Gamma(m+1/2), \quad \gamma_{lm} = (l+m+1/2) C_l^{m+1/2}(\cos(\theta_\zeta - \theta_\xi)),$$

$C_l^{m+1/2}(x)$ – полиномы Гегенбауэра.

Аналогичное (12) соотношение имеет место для функций $j_m(kR_{\zeta\xi})/R_{\zeta\xi}^m$:

$$\frac{j_m(kR_{\zeta\xi})}{R_{\zeta\xi}^m} = \kappa_m \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_{lm} \frac{j_{l+m}(kr_\zeta)}{(kr_\zeta)^m} \frac{j_{l+m}(kr_\xi)}{(kr_\xi)^m}. \tag{13}$$

Поступим по аналогии с работой [15].

1. На Σ_R подставим вместо функции $\Phi_m(\zeta, \xi)$ в (11) её разложение вида (13).

2. Из нерезонансности полуокружности Σ_R для заданного k_i следует, что все члены полученного ряда обращаются в нуль:

$$\kappa_m \gamma_{lm} \int\limits_{L_i} \left[\frac{j_{l+m}(k_i r_\zeta)}{(k_i r_\zeta)^m} p(\zeta) + \partial_\zeta \frac{j_{l+m}(k_i r_\zeta)}{(k_i r_\zeta)^m} q(\zeta) \right] d\sigma_\zeta = 0, \quad l \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}. \tag{14}$$

3. Умножаем каждый член (14) на $h^{(1)}_{l+m}(k_iR)/(k_iR)^m$ и суммируем по l от 0 до ∞ на Σ_R. Сходимость функционального ряда обеспечивается выбором R. В результате получим функцию вида

$$V_i(\xi) = V(k_i,\xi) = \int\limits_{L_i} \{\Psi_m(k_i,\zeta,\xi)p(\zeta) + \partial_\zeta\Psi_m(k_i,\zeta,\xi)q(\zeta)\}\,d\sigma_\zeta.$$

Для неё вне полукруга Σ_R имеет место граничная задача вида

$$\triangle V_i + k_i^2 V_i = 0, \quad |\xi| > R,$$

$$V_i(\xi) = 0, \quad \xi \in \Sigma_R,$$

с условиями излучения на бесконечности. Таким образом, $V_i(\xi) \equiv 0$ вне полуокружности Σ_R, а в силу аналитичности функции V_i всюду в $\Phi \bigcap D_e$. В результате имеем

$$V_i(\xi) \equiv 0, \quad \xi \in \Phi \bigcap D_i. \tag{15}$$

4. Полученные соотношения (9) и (15) представляют собой базовые соотношения метода нулевого поля [14].

5. Как показано в статье [17], в силу единственности решения исходной граничной задачи дифракции $\|p\| + \|q\| = 0$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Перейдём к формулировке основного результата статьи. Поскольку $D(\mathbf{B}) = \mathbf{L}_2(Z_0)$ и $\overline{R(\mathbf{B})} = \mathbf{L}_2(\partial D_i)$, то имеет место следующая

Теорема 3. *Для любого $\delta > 0$ существуют функции $\{\beta_e^{m,\delta}, \beta_i^{m,\delta}\} \in \mathbf{L}_2(\Sigma)$ и имеет место оценка $\|u_e^m - u_e^{m,\delta}\| + \|u_i^m - u_i^{m,\delta}\| \leqslant \delta$. Здесь $\{u_e^m, u_i^m\}$ – фурье-гармоники решения задачи (1) с граничными условиями (4), а $\{u_e^{m,\delta}, u_i^{m,\delta}\}$ – их интегральные представления (5), (6). Следовательно, в любой ограниченной замкнутой области в $\Phi \bigcap D_e$ справедливо предельное равенство*

$$\lim_{\delta\to 0} u_e^{m,\delta}(\zeta) = u_e^m(\zeta), \quad \zeta \in \Phi \bigcap D_e. \tag{16}$$

Таким образом, интегральное представление сходится в пределе к точному решению задачи (1) для m-й гармоники Фурье.

Замечание 1. Аналогичный (16) результат имеет место для гармоники внутреннего поля u_i^m в области $\Phi \bigcap D_i$.

Замечание 2. Следует отметить, что поскольку m было выбрано произвольно, то очевидно, что решение граничной задачи (1) может быть получено с любой степенью точности посредством конечной суммы ряда Фурье интегральных представлений.

Отметим, что распределение плотностей интегрального представления решения по оси вращения имеет преимущество по сравнению с интегральными представлениями полей с плотностями, распределёнными на вспомогательной поверхности внутри рассеивателя [18]. Кроме того, по аналогии с [19] можно показать, что такой важный показатель рассеяния как интегральный поперечник можно вычислить в аналитическом виде, не прибегая к численному интегрированию по единичной сфере.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stockman M.I., Kneipp K., Bozhevolnyi S.I. et al.* Roadmap on plasmonics // J. Opt. 2018. V. 20. P. N043001.
2. *Shi H., Zhu X., Zhang S., et al.* Plasmonic metal nanostructures with extremely small features: new effects, fabrication and applications // Nanoscale Adv. 2021. V. 3. P. N4349.
3. *Phan A.D., Nga D.T., Viet N.A.* Theoretical model for plasmonic photothermal response of gold nanostructures solutions // Opt. Commun. 2018. V. 410. P. 108–111.

4. *Еремин Ю.А., Лопушенко В.В.* Исследование эффекта пространственной дисперсии в металлической оболочке несферической магнетоплазменной наночастицы // Оптика и спектроскопия. 2022. Т. 130. Вып. 10. С. 1596–1602.
5. *Еремин Ю.А., Свешников А.Г.* Квазиклассические модели квантовой наноплазмоники на основе метода дискретных источников (обзор) // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2021. Т. 61. № 4. С. 34–62.
6. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М., 1987.
7. *Свешников А.Г., Могилёвский И.Е.* Математические задачи теории дифракции. М., 2010.
8. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М., 1973.
9. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М., 1979.
10. *Васильев Е.Н.* Возбуждение тел вращения. М., 1987.
11. *Еремин Ю.А., Захаров Е.В.* Свойства системы интегральных уравнений первого рода в задачах дифракции на проницаемом теле // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 9. С. 1230–1237.
12. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М., 1985.
13. *Дмитриев В.И., Захаров Е.В.* Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике. М., 2008.
14. *Doicu A., Eremin Yu., Wriedt T.* Acoustic and Electromagnetic Scattering Analysis Using Discrete Sources. San Diego, 2000.
15. *Eremin Yu.A., Tsitsas N.L., Kouroublakis M., Fikioris G.* New scheme of the discrete sources method for two-dimensional scattering problems by penetrable obstacles // J. Comput. Appl. Math. 2023. V. 417. P. 114556.
16. *Ватсон Дж.Н.* Теория бесселевых функций. М., 1949.
17. *Еремин Ю.А., Свешников А.Г., Скобелев С.П.* Метод нулевого поля в задачах дифракции волн // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2011. Т. 51. № 8. С. 1490–1494.
18. *Кюркчан А.Г., Смирнова Н.И.* Математическое моделирование в теории дифракции с использованием априорной информации об аналитических свойствах решения. М., 2014.
19. *Еремин Ю.А., Захаров Е.В.* Аналитическое представление для интегрального поперечника рассеяния в рамках интегрофункционального метода дискретных источников // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 8. С. 1073–1077.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 15.05.2023 г.
После доработки 15.05.2023 г.
Принята к публикации 20.07.2023 г.