ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 9, с. 1247–1259

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.22

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА ВОЛЬТЕРРЫ С ДВУМЯ ГРАНИЧНЫМИ И ОДНОЙ ВНУТРЕННЕЙ СИНГУЛЯРНЫМИ ТОЧКАМИ

© 2023 г. Н. Раджабов, Л. Н. Раджабова

Получены явные решения модельного и немодельного интегральных уравнений типа Вольтерры с двумя граничными и одной внутренней сингулярными точками, изучены свойства полученных решений. В случае, когда решение модельного уравнения содержит произвольную постоянную, выяснена корректная постановка задач с условиями, заданными на сингулярных многообразиях.

DOI: 10.31857/S0374064123090091, EDN: WOWZYC

К 85-летию академика Национальной академии
наук Таджикистана Нусрата Раджабова

Введение. В настоящее время теория сингулярных интегралов и сингулярных интегральных уравнений находит всё более широкое применение в различных областях математики, механики и физики. К сингулярным интегральным уравнениям сводятся граничные задачи теории функций, к которым, в свою очередь, приводятся многие важные задачи математической физики и механики, в частности, теории упругости и гидроаэродинамики. Отметим, что теория сингулярных интегральных уравнений, ядра которых имеют слабую или сильную особенность, особенность первого порядка, особенности степенного или логарифмического типа, с ядром Коши или когда интеграл понимается в смысле главного значения, встречается во многих работах. В частности, в [1–5] для нахождения решения интегральных уравнений используется в основном численный метод.

Проблеме исследования интегральных уравнений типа Вольтерры с сингулярными и сверхсингулярными точками в ядре посвящено много исследований. Так, в работах [6–11] изучены интегральные уравнения типа Вольтерры с одной граничной, или внутренней сингулярной, или сверхсингулярной точкой, а в [12–14] – с двумя граничными сингулярными точками. В настоящей статье найдены явные решения некоторых интегральных уравнений типа Вольтерры с двумя граничными и одной внутренней сингулярными точками. На основе полученных интегральных представлений решений и их свойств, когда общие решения содержат произвольные постоянные, исследуются задачи типа Коши с условиями, заданными на сингулярных многообразиях.

Сингулярным интегральным уравнением называется интегральное уравнение с ядром, обращающимся в бесконечность на граничных или внутренних точках данной области.

Пусть $\Gamma_0 = \{x : a < x < b\}$ – множество точек на вещественной оси и $c \in \Gamma_0$. Далее обозначим $\Gamma = \Gamma_0 \setminus \{c\}$, $\Gamma_1 = \{x : a < x < c\}$, $\Gamma_2 = \{x : c < x < b\}$.

На множестве Γ рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x) + \int_x^c \frac{A(t)\varphi(t)\,dt}{(t-a)(b-t)|c-t|} = f(x),$$

где $A(x)$ и $f(x)$ – заданные функции, $\varphi(x)$ – искомая функция.

Сначала изучим модельное интегральное уравнение вида

$$\varphi(x) + \lambda \int_c^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-a)(b-t)|c-t|} = f(x), \tag{1}$$

где λ – заданная постоянная.

Будем искать решения $\varphi(x)$ интегрального уравнения (1) в классе функций $C(\Gamma_0)$, удовлетворяющие условию $\varphi(c)=0$ и с асимптотическим поведением

$$\varphi(x)=o[|x-c|^{\varepsilon}] \quad \text{при} \quad x\to c$$

для некоторого $\varepsilon>0$.

Тогда из (1) следует, что если решение интегрального уравнения (1) существует, то $f(c)=0$.

Пусть в уравнении (1) $x\in\Gamma_1$, тогда $|x-c|=c-x$ и уравнение (1) на Γ_1 примет вид

$$\varphi(x)+\lambda\int\limits_c^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(c-t)}=f(x), \quad x\in\Gamma_1. \tag{2}$$

Если $x\in\Gamma_2$, то $|c-x|=x-c$ и уравнение (1) имеет вид

$$\varphi(x)-\lambda\int\limits_x^c \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(t-c)}=f(x), \quad x\in\Gamma_2. \tag{3}$$

Если обозначим решение уравнения (2) через $\varphi_1(x)$, а уравнения (3) через $\varphi_2(x)$, то решение интегрального уравнения (1) можем записать как

$$\varphi(x)=\begin{cases}\varphi_1(x), & \text{когда } x\in\Gamma_1,\\ \varphi_2(x), & \text{когда } x\in\Gamma_2.\end{cases}$$

Пусть $x\in\Gamma_1$. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что функция

$$\omega_1(x)=\left[\left(\frac{c-x}{x-a}\right)^{1/(c-a)}\left(\frac{c-x}{b-x}\right)^{1/(b-c)}\right]^{\lambda/(b-a)} \tag{4}$$

при $\lambda>0$ является решением однородного интегрального уравнения (2). Данное решение в окрестности точки $x=c-0$ обращается в нуль с асимптотическим поведением

$$\omega_1(x)=O[(c-x)^{\lambda/((c-a)(b-c))}] \quad \text{при} \quad x\to c-0.$$

Решение (4) неограниченно в точке $x=a$, его поведение при $x\to a$ определяется из асимптотической формулы

$$\omega_1(x)=O[(x-a)^{-\lambda/((c-a)(b-c))}] \quad \text{при} \quad x\to a.$$

Полученное решение (4) обладает свойством

$$\frac{\omega_1(t)}{(t-a)(b-t)(c-t)}=-\frac{1}{\lambda}\frac{d\omega_1(t)}{dt}. \tag{5}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что функция

$$\varphi(x)=K_1^-(f(x))\equiv f(x)-$$

$$-\lambda\int\limits_c^x\left\{\left[\left(\frac{c-x}{x-a}\right)\left(\frac{t-a}{c-t}\right)\right]^{1/(c-a)}\left[\left(\frac{c-x}{b-x}\right)\left(\frac{b-t}{c-t}\right)\right]^{1/(b-c)}\right\}^{\lambda/(b-a)}\frac{f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(c-t)} \tag{6}$$

будет частным решением неоднородного уравнения (2).

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условию $f(c-0)=0$ с асимптотическим поведением

$$f(x)=o[(c-x)^{\gamma_1}], \quad \gamma_1>\frac{\lambda}{(c-a)(b-c)} \quad \text{при} \quad x\to c, \tag{7}$$

то общее решение интегрального уравнения (2) при $\lambda>0$

$$\varphi_1(x)=c_1\omega_1(x)+K_1^-(f(x)), \tag{8}$$

где c_1 – произвольная постоянная. Решение вида (8) в точке $x=c-0$ обращается в нуль с асимптотическим поведением

$$\varphi(x)=o[(c-x)^{\lambda/((c-a)(b-c))}] \quad \text{при} \quad x\to c-0.$$

Данное решение в точке $x=a$ неограниченно, а его поведение определяется из асимптотической формулы

$$\varphi(x)=O[(x-a)^{-\lambda/((c-a)(b-a))}] \quad \text{при} \quad x\to a.$$

Умножив обе части равенства (8) на $(c-x)^{-\lambda/((c-a)(b-c))}$, после перехода к пределу при $x==c-0$ получим

$$[\varphi(x)(c-x)^{-\lambda/((c-a)(b-c))}]_{x=c-0}=[(c-a)^{1/(c-a)}(b-c)^{1/(b-c)}]^{-\lambda/(b-a)}c_1.$$

В случае $\lambda<0$ из представления (8) следует, что если решение интегрального уравнения (2) существует, то оно определяется равенством (8) при $c_1=0$:

$$\varphi_1(x)=K_1^-(f(x)). \tag{9}$$

Решение вида (9) существует, если $f(x)\in C(\overline{\Gamma})$, $f(c-0)=0$ и

$$f(x)=o[(c-x)^{\varepsilon}], \quad \varepsilon>0, \quad \text{при} \quad x\to c-0. \tag{10}$$

Таким образом, доказана

Лемма 1. *Пусть в интегральном уравнении (2) функция $f(x)\in C(\overline{\Gamma})$ удовлетворяет условию $f(c-0)=0$ с асимптотическим поведением (7) при $\lambda>0$ и с асимптотическим поведением (10) при $\lambda<0$. Тогда любое решение интегрального уравнения (2) из класса $C(\Gamma_1)$ представимо в виде*

$$\varphi(x)=\begin{cases} c_1\omega_1(x)+K_1^-(f(x)), & \text{когда } \lambda>0, \quad x\in\Gamma_1,\\ K_1^-(f(x)), & \text{когда } \lambda<0, \quad x\in\Gamma_1.\end{cases}$$

Пусть $x\in\Gamma_2$. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что функция

$$\omega_2(x)=\left[\left(\frac{x-c}{x-a}\right)^{1/(c-a)}\left(\frac{x-c}{b-x}\right)^{1/(b-c)}\right]^{|\lambda|/(b-a)} \tag{11}$$

при $\lambda<0$ является решением однородного уравнения (3). Данное решение обладает свойством

$$\frac{d\omega_2(x)}{dx}=\frac{|\lambda|}{(x-a)(b-x)(x-c)}\omega_2(x), \quad x\in\Gamma_2.$$

Теперь покажем, что при $\lambda<0$ и выполнении условия $f(c+0)=0$ с асимптотическим поведением

$$f(x)=o[(x-c)^{\gamma_3}], \quad \gamma_3>\frac{|\lambda|}{(c-a)(b-c)} \quad \text{при} \quad x\to c+0, \tag{12}$$

функция

$$\varphi_2(x) = f(x) - \lambda \int_c^x \left\{ \left[\left(\frac{x-c}{x-a}\right)\left(\frac{t-a}{t-c}\right) \right]^{1/(c-a)} \left[\left(\frac{x-c}{b-x}\right)\left(\frac{b-t}{t-c}\right) \right]^{1/(b-c)} \right\}^{|\lambda|/(b-a)} \times$$

$$\times \frac{f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(t-c)} \equiv K_1^+(f(x)) \tag{13}$$

будет частным решением неоднородного интегрального уравнения (3).

Подставив значение функции $\varphi_2(x)$ из равенства (13) в уравнение (3), далее сократив на $f(x)$ и заменив порядок интегрирования в кратном интеграле, получим равенство

$$-\lambda \int_c^x \left\{ \left[\left(\frac{x-c}{x-a}\right)\left(\frac{t-a}{t-c}\right) \right]^{1/(c-a)} \left[\left(\frac{x-c}{b-x}\right)\left(\frac{b-t}{t-c}\right) \right]^{1/(b-c)} \right\}^{|\lambda|/(b-a)} \frac{f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(t-c)} +$$

$$+\lambda \int_c^x \frac{f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(t-c)} - \lambda^2 \int_c^x \left\{ \left(\frac{\tau-a}{\tau-c}\right)^{1/(c-a)} \left(\frac{b-\tau}{\tau-c}\right)^{1/(b-c)} \right\}^{|\lambda|/(b-a)} \frac{f(\tau)\,d\tau}{(\tau-a)(b-\tau)(\tau-c)} \times$$

$$\times \int_\tau^x \left\{ \left(\frac{t-c}{t-a}\right)^{1/(c-a)} \left(\frac{t-c}{b-t}\right)^{1/(b-c)} \right\}^{|\lambda|/(b-a)} \frac{dt}{(t-a)(b-t)(t-c)} = 0. \tag{14}$$

Справедливо соотношение

$$\int_\tau^x \left\{ \left(\frac{t-c}{t-a}\right)^{1/(c-a)} \left(\frac{t-c}{b-t}\right)^{1/(b-c)} \right\}^{|\lambda|/(b-a)} \frac{dt}{(t-a)(b-t)(t-c)} = \frac{1}{|\lambda|} \int_\tau^x \frac{d\omega_2(t)}{dt} = \frac{1}{|\lambda|}(\omega_2(x) - \omega_2(\tau)).$$

Следовательно, из равенства (14) будем иметь

$$-\lambda \int_c^x \left\{ \left[\left(\frac{x-c}{x-a}\right)\left(\frac{t-a}{t-c}\right) \right]^{1/(c-a)} \left[\left(\frac{x-c}{b-x}\right)\left(\frac{b-t}{t-c}\right) \right]^{1/(b-c)} \right\}^{|\lambda|/(b-a)} \frac{f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(t-c)} +$$

$$+\lambda \int_c^x \frac{f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(t-c)} - |\lambda| \int_c^x \left\{ \left[\left(\frac{x-c}{x-a}\right)\left(\frac{\tau-a}{\tau-c}\right) \right]^{1/(c-a)} \left[\left(\frac{x-c}{b-x}\right)\left(\frac{b-\tau}{\tau-c}\right) \right]^{1/(b-c)} \right\}^{|\lambda|/(b-a)} \times$$

$$\times \frac{f(\tau)\,d\tau}{(\tau-a)(b-\tau)(\tau-c)} + |\lambda| \int_c^x \frac{f(\tau)\,d\tau}{(\tau-a)(b-\tau)(\tau-c)} = 0.$$

Тогда функция вида

$$\varphi(x) = c_2\varphi_2(x) + K_1^+(f(x)) \tag{15}$$

будет общим решением неоднородного интегрального уравнения (3) при $\lambda < 0$. При этом для сходимости интеграла в правой части равенства (15) функция $f(x)$ должна удовлетворять условию (7).

В случае $\lambda > 0$ если решение интегрального уравнения (3) существует, то оно выражается равенством (15) при $c_2 = 0$:

$$\varphi(x) = K_1^+(f(x)). \tag{16}$$

Интеграл в правой части равенства (16) сходится для любой функции $f(x) \in C(\overline{\Gamma_2})$. Но так как решение интегрального уравнения (3) ищем в классе функций, удовлетворяющих условию $\varphi(c+0)=0$, необходимо выполнение условия $f(c+0)=0$ с асимптотическим поведением

$$f(x) = o[(x-c)^{\varepsilon}], \quad \varepsilon > 0, \quad \text{при} \quad x \to c+0. \tag{17}$$

На основе приведённых выше рассуждений справедлива

Лемма 2. *Пусть в интегральном уравнении (3) функция $f(x) \in C(\Gamma_2)$ при $\lambda < 0$ обладает свойством $f(c+0)=0$ с асимптотическим поведением (12), при $\lambda > 0$ $f(c+0)=0$ с асимптотическим поведением (17). Тогда любое решение интегрального уравнения (3) из класса $C(\overline{\Gamma})$ представимо в виде*

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_2\omega_2(x) + K_1^{+}(f(x)) & \textit{при} \;\; \lambda < 0, \\ K_1^{+}(f(x)) & \textit{при} \;\; \lambda > 0, \end{cases}$$

где c_2 – произвольная постоянная.

Из лемм 1 и 2 следуют утверждения.

Теорема 1. *Пусть при $\lambda > 0$ выполнены все условия лемм 1 и 2. Тогда любое решение интегрального уравнения (1) из класса $C(\Gamma)$ представимо в виде*

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_1\omega_1(x) + K_1^{-}(f(x)) & \textit{при} \;\; x \in \Gamma_1, \\ K_1^{+}(f(x)) & \textit{при} \;\; x \in \Gamma_2, \end{cases} \tag{18}$$

где c_1 – произвольная постоянная, а функция $\omega_1(x)$ и интегральные операторы $K_1^{-}(f(x))$, $K_1^{+}(f(x))$ определяются равенствами (4) и (6), (13) соответственно.

Теорема 2. *Пусть при $\lambda < 0$ выполнены все условия лемм 1 и 2. Тогда любое решение интегрального уравнения (1) из класса $C(\Gamma)$ представимо в виде*

$$\varphi(x) = \begin{cases} K_1^{-}(f(x)) & \textit{при} \;\; x \in \Gamma_1, \\ c_2\omega_2(x) + K_1^{+}(f(x)) & \textit{при} \;\; x \in \Gamma_2, \end{cases} \tag{19}$$

где c_2 – произвольная постоянная, функция $\omega_2(x)$ выражается равенством (11).

Замечание 1. Из интегрального представления (18) следует, что в точке $x=c$ при $\lambda > 0$ решение вида (18) обращается в нуль с асимптотическими поведениями

$$\varphi(x) = o[(c-x)^{\lambda/((c-a)(b-c))}] \quad \text{при} \quad x \to c-0,$$

$$\varphi(x) = o[(x-c)^{\varepsilon}] \quad \text{при} \quad x \to c+0.$$

Замечание 2. Из интегрального представления (19) следует, что при $\lambda < 0$ решение вида (19) в точке $x=c$ обращается в нуль с асимптотическими поведениями

$$\varphi(x) = o[(c-x)^{\varepsilon}], \quad \varepsilon > 0, \quad \text{при} \quad x \to c-0,$$

$$\varphi(x) = o[(x-c)^{|\lambda|/((c-a)(b-c))}] \quad \text{при} \quad x \to c+0.$$

Замечание 3. Решения вида (18) и (19) обладают свойствами

$$[\varphi(x)(c-x)^{|\lambda|/((c-a)(b-c))}]_{x=c-0} = c_1(c-a)^{\lambda/((c-a)(b-c))}(b-c)^{\lambda/((b-c)(b-a))}, \tag{20}$$

$$[\varphi(x)(x-c)^{\lambda/((c-a)(b-c))}]_{x=c+0} = c_2(c-a)^{\lambda/((c-a)(b-c))}(b-c)^{\lambda/((b-c)(b-a))}. \tag{21}$$

Интегральные представления (18), (19), а также свойства (20), (21) дают возможность для интегрального уравнения (1) ставить и исследовать задачи типа Коши.

Задача K_1. Требуется найти решение интегрального уравнения (1) при $\lambda > 0$, удовлетворяющее граничному условию

$$[(c-x)^{-\lambda/((c-a)(b-c))}\varphi(x)]_{x=c-0} = E_1, \tag{22}$$

где E_1 – заданная постоянная.

Решение задачи K_1. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда, используя интегральное представление (18), свойство (20) и условие (22), имеем

$$c_1(c-a)^{-\lambda/((c-a)(b-a))}(b-c)^{-\lambda/((b-c)(b-a))} = E_1,$$

откуда находим

$$c_1 = (c-a)^{\lambda/((c-a)(b-a))}(b-c)^{\lambda/((b-c)(b-a))}E_1.$$

Подставив полученное значение c_1 в интегральное представление (18), получим

$$\varphi(x) = \begin{cases} \omega_1(x)(c-a)^{-\lambda/((c-a)(b-a))}(b-c)^{-\lambda/((b-c)(b-a))}E_1 + K_1^-(f(x)) & \text{при } x \in \Gamma_1, \\ K_1^+(f(x)) & \text{при } x \in \Gamma_2. \end{cases} \tag{23}$$

Теорема 3. *Пусть в интегральном представлении (18) параметры λ и функция $f(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда задача K_1 имеет единственное решение, которое определяется формулой (23).*

Задача K_2. Требуется найти решение интегрального уравнения (1) при $\lambda < 0$, удовлетворяющее граничному условию

$$[(x-c)^{\lambda/((c-a)(b-c))}\varphi(x)]_{x=c+0} = E_2, \tag{24}$$

где E_2 – заданная постоянная.

Решение задачи K_2. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда, использовав интегральное представление (19), свойство (21) и условие (24), получим

$$c_2(c-a)^{\lambda/((c-a)(b-c))}(b-c)^{\lambda/((b-c)(b-a))} = E_2,$$

откуда

$$c_2 = (c-a)^{-\lambda/((c-a)(b-c))}(b-c)^{-\lambda/((b-c)(b-a))}E_2.$$

Подставляя полученное значение c_2 в интегральное представление (19), находим решение задачи K_2:

$$\varphi(x) = \begin{cases} K_1^-(f(x)) & \text{при } x \in \Gamma_1, \\ \omega_2(x)(c-a)^{-\lambda/((c-a)(b-c))}(b-c)^{-\lambda/((b-c)(b-a))}E_2 + K_1^+(f(x)) & \text{при } x \in \Gamma_2. \end{cases} \tag{25}$$

Теорема 4. *Пусть в интегральном представлении (19) параметр λ и функция $f(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 2. Тогда задача K_2 имеет единственное решение, которое определяется формулой (25).*

Теперь на множестве Γ рассмотрим более общее интегральное уравнение вида

$$\varphi(x) + \int\limits_x^c \frac{A(t)\varphi(t)\,dt}{(t-a)(b-t)|c-t|} = f(x) \tag{26}$$

в предположении, что $A(c) \neq 0$ и $A(c-0) \neq A(c+0)$.

Пусть в уравнении (26) $x \in \Gamma_1$, тогда $|x-c| = c-x$ и это уравнение примет вид

$$\varphi(x) + \int\limits_x^c \frac{A(t)\varphi(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(c-t)} = f(x). \tag{27}$$

В случае $x \in \Gamma_2$ имеем $|x-c| = x-c$ и, следовательно, (26) запишем как

$$\varphi(x) + \int_x^c \frac{A(t)\varphi(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(t-c)} = f(x). \tag{28}$$

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что функция

$$\Omega_1(x) = \exp[-W_A^-(x)]\left[\left(\frac{c-x}{x-a}\right)^{1/(c-a)}\left(\frac{c-x}{b-x}\right)^{1/(b-c)}\right]^{A(c-0)/(b-a)},$$

где

$$W_A^-(x) = \int_x^c \frac{A(c-0)-A(t)}{(t-a)(b-t)(c-t)}\,dt,$$

при $A(c-0)>0$ будет решением однородного уравнения (27), если функция $A(x)$ в окрестности точки $x=c-0$ удовлетворяет условию

$$|A(c-0)-A(x)| \leqslant H_1(c-x)^{\varepsilon}(x-a)^{\varepsilon}, \quad \varepsilon>0. \tag{29}$$

Докажем, что функция вида

$$\Omega_2(x) = f(x) - \int_x^c \left\{\left[\left(\frac{c-x}{x-a}\right)\left(\frac{t-a}{c-t}\right)\right]^{1/(c-a)}\left[\left(\frac{c-x}{b-x}\right)\left(\frac{b-t}{c-t}\right)\right]^{1/(b-c)}\right\}^{A(c-0)/(b-a)} \times$$

$$\times \exp[W_A^-(t)-W_A^-(x)]\frac{A(t)f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(c-t)} \equiv M_1^-(f(x)) \tag{30}$$

будет частным решением неоднородного интегрального уравнения (27). Подставив значение $\Omega_2(x)$ в (27) и изменив порядок интегрирования, получим

$$-\int_x^c \left\{\left[\left(\frac{c-x}{x-a}\right)\left(\frac{t-a}{c-t}\right)\right]^{1/(c-a)}\left[\left(\frac{c-x}{b-x}\right)\left(\frac{b-t}{c-t}\right)\right]^{1/(b-c)}\right\}^{A(c-0)/(b-a)} \times$$

$$\times \frac{\exp[W_A^-(t)-W_A^-(x)]A(t)f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(c-t)} + \int_x^c \frac{A(t)f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(c-t)} -$$

$$-\int_x^c \frac{A(\tau)f(\tau)}{(\tau-a)(b-\tau)(c-\tau)}\left[\left(\frac{\tau-a}{c-\tau}\right)^{1/(c-a)}\left(\frac{b-\tau}{c-\tau}\right)^{1/(b-c)}\right]^{A(c-0)/(b-a)}\exp[W_A^-(\tau)]\,d\tau \times$$

$$\times \int_\tau^x \left[\left(\frac{c-t}{t-a}\right)^{1/(c-a)}\left(\frac{c-t}{b-t}\right)^{1/(b-c)}\right]^{A(c-0)/(b-a)}\exp[-W_A^-(t)]\frac{A(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(c-t)} = 0. \tag{31}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что функция $\Omega_1(x)$ обладает свойством

$$\frac{\Omega_1(x)A(x)}{(x-a)(b-x)(c-x)} = -\frac{d\Omega_1(x)}{dx},$$

использовав которое, получим

$$\int_\tau^x \frac{\Omega_1(t)A(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(c-t)} = -\int_\tau^x \frac{d\Omega_1(t)}{dt} = -\Omega_1(x)+\Omega_1(\tau).$$

Тогда

$$J(x)=\int\limits_{c}^{x}\frac{A(\tau)f(\tau)\,d\tau}{\Omega_1(\tau)(\tau-a)(b-\tau)(c-\tau)}\int\limits_{\tau}^{x}\frac{\Omega_1(t)A(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(c-t)}=$$

$$=\int\limits_{c}^{x}[\Omega_1(\tau)-\Omega_1(x)]\,\frac{A(\tau)f(\tau)\,d\tau}{\Omega_1(\tau)(\tau-a)(b-\tau)(c-\tau)}=\int\limits_{c}^{x}\frac{A(\tau)}{(\tau-a)(b-\tau)(c-\tau)}\left[1-\frac{\Omega_1(x)}{\Omega_1(\tau)}\right]f(\tau)\,d\tau.$$

На основе полученных равенств для выражения (31) запишем равенство

$$-\int\limits_{x}^{c}\frac{\Omega_1(x)}{\Omega_1(t)}\,\frac{A(t)f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(c-t)}+\int\limits_{x}^{c}\frac{A(t)f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(c-t)}-\int\limits_{x}^{c}\frac{A(\tau)f(\tau)\,d\tau}{(\tau-a)(b-\tau)(c-\tau)}+$$

$$+\int\limits_{c}^{x}\frac{\Omega_1(x)}{\Omega_1(\tau)}\,\frac{A(\tau)f(\tau)\,d\tau}{(\tau-a)(b-\tau)(c-\tau)}=0.$$

При $A(c-0)>0$ частное решение вида (30) существует, если функция $A(x)$ в окрестности точки $x=c-0$ удовлетворяет условию (29), а функция $f(x)\in C(\overline{\Gamma})$ удовлетворяет условию $f(c-0)=0$ с асимптотическим поведением

$$f(x)=o[(c-x)^{\gamma_4}],\quad \gamma_4>\frac{A(c-0)}{(c-a)(b-c)}\quad\text{при}\quad x\to c-0. \tag{32}$$

Далее, добавляя частное решение неоднородного уравнения (27) (функцию $\Omega_2(x)$) к общему решению однородного интегрального уравнения (27), найдём общее решение неоднородного уравнения (27):

$$\varphi(x)=c_1\Omega_1(x)+M_1^-(f(x)). \tag{33}$$

На основе приведённых выше рассуждений справедлива

Теорема 5. *Пусть в интегральном уравнении (27) функция $A(x)\in C(\Gamma_1)$ имеет в точке $x=c$ разрыв первого рода, пусть $A(c-0)>0$ и в окрестности точки $x=c-0$ выполняется условие (29). Пусть функция $f(x)\in C(\overline{\Gamma_1})$ удовлетворяет условию $f(c-0)=0$ с асимптотическим поведением (32). Тогда интегральное уравнение (27) в классе $C(\Gamma_1)$ всегда разрешимо, а его общее решение задаётся формулой (33), где c_1 – произвольная постоянная.*

Пусть теперь $A(c-0)<0$. Из представления (33) следует, что если в этом случае существует решение интегрального уравнения (27), то оно будет выражаться равенством (33) при $c_1=0$:

$$\varphi(x)=M_1^-(f(x)). \tag{34}$$

Решение (34) существует, если $f(x)\in C(\overline{\Gamma_1})$ и $f(c-0)=0$ с асимптотическим поведением

$$f(x)=o[(c-x)^{\varepsilon}],\quad \varepsilon>0,\quad\text{при}\quad x\to c-0. \tag{35}$$

Следовательно, справедлива

Теорема 6. *Пусть в интегральном уравнении (27) функция $A(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 5, кроме условия $A(c-0)>0$. Пусть $A(c-0)<0$, а функция $f(x)\in C(\overline{\Gamma_1})$ удовлетворяет условию $f(c-0)=0$ с асимптотическим поведением (35). Тогда интегральное уравнение (27) в классе $C(\Gamma_1)$ имеет единственное решение, которое выражается равенством*

$$\varphi(x)=f(x)-\int\limits_{c}^{x}\left\{\left[\left(\frac{x-a}{c-x}\right)\left(\frac{c-t}{t-a}\right)\right]^{1/(c-a)}\left[\left(\frac{b-x}{c-x}\right)\left(\frac{c-t}{b-t}\right)\right]^{1/(b-c)}\right\}^{|A(c-0)|/(b-a)}\times$$

$$\times\exp[W_A^-(t)-W_A^-(x)]\frac{A(t)f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(c-t)}\equiv M_1^-[f(x)].$$

Замечание 4. Решение вида (33) в точке $x = c - 0$ обращается в нуль с асимптотическим поведением
$$\varphi(x) = o[(c-x)^{A(c-0)/((c-a)(b-c))}] \quad \text{при} \quad x \to c - 0,$$
а в точке $x = a$ обращается в бесконечность с асимптотическим поведением
$$\varphi(x) = O[(x-a)^{-A(c-0)/((c-a)(b-c))}] \quad \text{при} \quad x \to a + 0.$$

Замечание 5. Решение вида (33) обладает свойством
$$[\varphi(x)(c-x)^{-A(c-0)/((c-a)(b-c))}]_{x=c-0} = [(c-a)^{-1/(c-a)}(b-c)^{-1/(b-c)}]^{A(c-0)/(b-a)}c_1. \tag{36}$$

Интегральное представление (33) и свойство (36) дают возможность для интегрального уравнения (27) ставить и решать следующую задачу.

Задача *N*₁. Требуется найти решение интегрального уравнения (27) из класса $C(\Gamma_1)$ при $A(c-0) > 0$, удовлетворяющее граничному условию
$$[\varphi(x)(c-x)^{-A(c-0)/((c-a)(b-c))}]_{x=c-0} = E_3, \tag{37}$$
где E_3 – заданная постоянная.

Решение задачи *N*₁. Пусть выполнены условия теоремы 5. Используя интегральное представление (33), свойство (36) и условие (37), находим
$$[(c-a)^{-1/(c-a)}(b-c)^{-1/(b-c)}]^{A(c-0)/(b-a)}c_1 = E_3.$$
Отсюда
$$c_1 = [(c-a)^{1/(c-a)}(b-c)^{1/(b-c)}]^{A(c-0)/(b-a)}E_3.$$
Подставив последнее выражение в интегральное представление (33), получим решение задачи N_1 в виде
$$\varphi(x) = \Omega_1(x)[(c-a)^{1/(c-a)}(b-c)^{1/(b-c)}]^{A(c-0)/(b-a)}E_3 + M_1[f(x)]. \tag{38}$$

Итак, доказана

Теорема 7. *Пусть выполнены все условия теоремы 5. Тогда задача N_1 имеет единственное решение, которое определяется равенством (38).*

Теперь найдём решение интегрального уравнения (28). Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что функция вида
$$\Omega_3(x) = \exp[-W_A^+(x)]\left[\left(\frac{x-c}{x-a}\right)^{1/(c-a)}\left(\frac{x-c}{b-x}\right)^{1/(b-c)}\right]^{|A(c+0)|/(b-a)}, \tag{39}$$
где
$$W_A^+(x) = \int\limits_c^x \frac{A(t) - A(c+0)}{(t-a)(b-t)(t-c)}\,dt,$$
при $A(c+0) < 0$ будет решением однородного интегрального уравнения (28). Действительно, имеем
$$\exp[-W_A^+(x)]\left[-\frac{A(x)-A(c+0)}{(x-a)(b-x)(x-c)}\right]\left[\left(\frac{x-c}{x-a}\right)^{1/(c-a)}\left(\frac{x-c}{b-x}\right)^{1/(b-c)}\right]^{|A(c+0)|/(b-a)} +$$
$$+\exp[-W_A^+(x)]\frac{|A(c+0)|}{(x-a)(b-x)(x-c)}\left[\left(\frac{x-c}{x-a}\right)^{1/(c-a)}\left(\frac{x-c}{b-x}\right)^{1/(b-c)}\right]^{|A(c+0)|/(b-a)} =$$
$$= \frac{A(x)\exp[-W_A^+(x)]}{(x-a)(b-x)(x-c)}\left[\left(\frac{x-c}{x-a}\right)^{1/(c-a)}\left(\frac{x-c}{b-x}\right)^{1/(b-c)}\right]^{|A(c+0)|/(b-a)} = \frac{A(x)}{(x-a)(b-x)(x-c)}\Omega_3(x).$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\frac{d\Omega_3(x)}{dx}=\frac{A(x)}{(x-a)(b-x)(x-c)}\Omega_3(x). \tag{40}$$

Подставив значение функции $\Omega_3(x)$ из формулы (39) в однородное уравнение (28), с учётом (40) получим

$$\Omega_2(x)+\int_x^c\frac{d\Omega_2(t)}{dt}=0$$

или

$$\Omega_2(x)+\Omega_2(c)-\Omega_2(x)=0.$$

Из равенства (39) следует, что $\Omega_3(c)=0$.

Далее докажем, что функция

$$\Omega_4(x)=f(x)+\int_c^x\left\{\left[\left(\frac{x-c}{x-a}\right)\left(\frac{t-a}{t-c}\right)\right]^{1/(c-a)}\left[\left(\frac{x-c}{b-x}\right)\left(\frac{b-t}{t-c}\right)\right]^{1/(b-c)}\right\}^{|A(c+0)|/(b-a)}\times$$

$$\times\exp[W_A^+(t)-W_A^+(x)]\frac{A(t)f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(t-c)}\equiv M_1^+[f(x)]$$

будет частным решением неоднородного уравнения (28). Для этого представим её в виде

$$\Omega_4(x)=f(x)+\int_c^x\frac{\Omega_3(x)}{\Omega_3(t)}\,\frac{A(t)f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(c-t)}$$

и подставим в неоднородное интегральное уравнение (28). После некоторых преобразований получим

$$\int_c^x\frac{\Omega_2(x)}{\Omega_2(t)}\,\frac{A(t)f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(t-c)}-\int_c^x\frac{A(t)f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(t-c)}-\int_c^x\frac{A(\tau)f(\tau)\,d\tau}{\Omega_2(\tau)(\tau-a)(b-\tau)(\tau-c)}\times$$

$$\times\int_\tau^x\frac{\Omega_2(t)A(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(t-c)}=0. \tag{41}$$

На основании соотношения (40) будем иметь равенство

$$\int_\tau^x\frac{\Omega_2(t)A(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(t-c)}=\int_\tau^x\frac{d\Omega_2(t)}{dt}=\Omega_2(x)-\Omega_2(\tau),$$

подстановка которого в (41) даёт

$$\int_c^x\frac{\Omega_2(x)}{\Omega_2(t)}\,\frac{A(t)f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(t-c)}-\int_c^x\frac{A(t)f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(t-c)}-$$

$$-\int_c^x[\Omega_2(x)-\Omega_2(t)]\,\frac{A(t)f(t)\,dt}{\Omega_2(t)(t-a)(b-t)(t-c)}\equiv 0.$$

Следовательно, функция $\Omega_4(x)$ является частным решением неоднородного интегрального уравнения (28).

Тогда общее решение неоднородного уравнения (28) выражается формулой

$$\varphi(x) = c_2\Omega_3(x) + M_1^+(f(x)). \tag{42}$$

В случае $A(c+0) < 0$ решение вида (42) интегрального уравнения (28) существует при выполнении следующих условий:

a) $A(x) \in C(\overline{\Gamma_2})$ и удовлетворяет неравенству

$$|A(x) - A(c+0)| \leqslant H_2|x-c|^\varepsilon(b-x)^\varepsilon, \quad \varepsilon > 0; \tag{43}$$

b) $f(x) \in C(\overline{\Gamma_2})$, $f(c+0) = 0$ с асимптотическим поведением

$$f(x) = o[(x-c)^{\gamma_5}], \quad \gamma_5 > \frac{|A(c+0)|}{(c-a)(b-c)} \quad \text{при} \quad x \to c+0.$$

На основе приведённых выше рассуждений справедлива

Теорема 8. *Пусть в интегральном уравнении (35) функция $A(x) \in C(\overline{\Gamma_2})$ удовлетворяет условию $A(c+0) < 0$, имеет в точке $x = c$ разрыв первого рода, удовлетворяет в её правой полуокрестности условию (43). Тогда интегральное уравнение (28) всегда разрешимо в классе $C(\Gamma_2)$, а его общее решение задаётся равенством (42), где c_2 – произвольная постоянная.*

Из интегрального представления (42) следует, что при $A(c+0) > 0$ решение уравнения (28) существует при $c_2 = 0$ и выражается равенством

$$\varphi(x) = M_1^+(f(x)),$$

если выполнены условия $f(x) \in C(\overline{\Gamma_2})$ и $f(c+0) = 0$ с асимптотическим поведением

$$f(x) = o[(x-c)^\varepsilon], \quad \varepsilon > 0, \quad \text{при} \quad x \to c+0. \tag{44}$$

Следовательно, справедлива

Теорема 9. *Пусть в интегральном уравнении (28) функция $A(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 8, кроме условия $A(c+0) < 0$. Пусть $A(c+0) > 0$, а функция $f(x) \in$ $\in C(\overline{\Gamma_2})$ удовлетворяет условию $f(c+0) = 0$ с асимптотическим поведением (44). Тогда единственное решение интегрального уравнения (28) выражается равенством*

$$\varphi(x) = f(x) + \int\limits_c^x \left\{\left[\left(\frac{x-a}{x-c}\right)\left(\frac{t-c}{t-a}\right)\right]^{1/(c-a)}\left[\left(\frac{b-x}{x-c}\right)\left(\frac{t-c}{b-t}\right)\right]^{1/(b-c)}\right\}^{A(c+0)/(b-a)} \times$$
$$\times \exp[W_A^+(t) - W_A^+(x)]\frac{A(t)f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(t-c)} \equiv M_1^+[f(x)]. \tag{45}$$

Замечание 6. Решение вида (42) в точке $x = c+0$ обращается в нуль с асимптотическим поведением

$$\varphi(x) = o[(x-c)^{|A(c+0)|/((c-a)(b-c))}] \quad \text{при} \quad x \to c+0.$$

Замечание 7. Умножив обе части равенства (42) на функцию $[(x-c)^{A(c+0)/((c-a)(b-c))}]$, после перейдя к пределу при $x = c+0$, получим

$$[\varphi(x)(x-c)^{A(c+0)/((c-a)(b-c))}]_{x\to c+0} = [(c-a)^{1/(c-a)}(b-c)^{1/(b-c)}]^{A(c+0)/(b-a)}c_2. \tag{46}$$

Интегральное представление (42) и свойство (46) дают возможность для интегрального уравнения (28) ставить и исследовать граничную задачу типа Коши.

Задача N_2. Требуется найти решение интегрального уравнения (28) из класса $C(\Gamma_2)$ при $A(c+0)<0$, удовлетворяющее граничному условию

$$[\varphi(x)(x-c)^{A(c+0)/((c-a)(b-c))}]_{x=c+0}=E_4, \tag{47}$$

где E_4 – заданная постоянная.

Решение задачи N_2. Пусть выполнены условия теоремы 8. Использовав интегральное представление (42), свойство (46) и условие (47), получим

$$[(c-a)^{1/(c-a)}(b-c)^{1/(b-c)}]^{A(c+0)/(b-a)}c_2=E_4.$$

Следовательно,

$$c_2=[(c-a)^{1/(c-a)}(b-c)^{1/(b-c)}]^{-A(c+0)/(b-a)}E_4.$$

Подставив полученное значение c_2 в интегральное представление (42), найдём решение задачи N_2 в виде

$$\varphi(x)=\Omega_2(x)[(c-a)^{1/(c-a)}(b-c)^{1/(b-c)}]^{-A(c+0)/(b-a)}E_4+M_1[f(x)]. \tag{48}$$

Теорема 10. *Пусть в интегральном уравнении (28) функции $A(x)$ и $f(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 8. Тогда задача N_2 имеет единственное решение, выражающееся равенством (48).*

Пусть в интегральном уравнении (27) выполняются условия $A(x)\in C(\overline{\Gamma})$ и $A(c-0)=A(c+0)=A(c)$, $A(c)>0$. Тогда, согласно теореме 5, решение уравнения (4) выражается формулой (33) при $x\in\Gamma_1$. Если $x\in\Gamma_2$, то решение уравнения (26) выражается равенством (45). Из приведённых выше рассуждений следует, что решение интегрального уравнения (26) при $A(c)>0$ имеет вид

$$\varphi(x)=\begin{cases}\Omega_1(x)c_1+M_1^-(f(x)) & \text{при } x\in\Gamma_1,\\ M_1^+(f(x)) & \text{при } x\in\Gamma_2.\end{cases} \tag{49}$$

Таким образом, справедливы следующие утверждения.

Теорема 11. *Пусть в интегральном уравнении (26) функции $A(x)$ и $f(x)$ удовлетворяют условиям теорем 5 и 9 и условию*

$$A(c-0)=A(c+0)=A(c),\quad A(c)>0.$$

Тогда любое решение уравнения (26) из класса $C(\Gamma)$ выражается равенством (49).

В случае когда $A(c-0)=A(c+0)=A(c)$, $A(c)<0$, из теоремы 8 следует, что при $x\in\Gamma_2$ решение интегрального уравнения (28) определяется формулой $\varphi(x)=\Omega_3(x)c_2+M_1^+(f(x))$, а при $x\in\Gamma_1$ – равенством $\varphi(x)=M_1^-(f(x))$. Следовательно, при $A(c)<0$ решение интегрального уравнения (26)

$$\varphi(x)=\begin{cases}M_1^-(f(x)) & \text{при } x\in\Gamma_1,\\ \Omega_3(x)c_2+M_1^+(f(x)) & \text{при } x\in\Gamma_2.\end{cases} \tag{50}$$

Теорема 12. *Пусть в интегральном уравнении (26) функции $A(x)$ и $f(x)$ удовлетворяют условиям теорем 6 и 8, а также*

$$A(c-0)=A(c+0)=A(c),\quad A(c)<0.$$

Тогда любое решение интегрального уравнения (26) из класса $C(\Gamma)$ выражается равенством (50), где c_2 – произвольная постоянная.

Авторы выражают благодарность проф. И.В. Асташовой за ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Довгий С.А., Лифанов И.К., Черний Д.И.* Метод сингулярных интегральных уравнений и вычислительные технологии. Киев, 2016.
2. *Солдатов А.П., Урбанович Т.М.* Характеристическое сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши в исключительном случае // Науч. ведомости. Сер. Математика. Физика. 2011. № 17 (112). С. 165–171.
3. *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М., 2018.
4. *Расолько Г.А.* Численное решение некоторых сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши методом ортогональных многочленов. Ч. 1. Алгоритмы в MarhCad. Минск, 2017.
5. *Плещинский Н.Б.* Сингулярные интегральные уравнения со сложной особенностью в ядре. Казань, 2018.
6. *Раджабов Н.* Об одном интегральном уравнении вольтерровского типа // Докл. РАН. 2002. Т. 383. № 3. С. 314–317.
7. *Rajabov N., Ronto M., Rajabova L.N.* On some two dimensional Volterra type linear integral equation with super-singularity // Math. Not. Miscolc. 2003. V. 4. № 1. P. 65–76.
8. *Раджабов Н., Раджабова Л.Н.* Исследование одного класса двумерного интегрального уравнения с фиксированными сингулярными ядрами, связанное с гиперболическим уравнением // Докл. РАН. 2003. Т. 391. № 1. С. 20–22.
9. *Раджабов Н.* Интегральные уравнения типов Вольтерры с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверхсингулярными ядрами и их приложения. Душанбе, 2007.
10. *Rajabov N.* Volterra Type Integral Equation with Boundary and Interior Fixed Singularity and Super-Singularity Kernels and Their Application. Dushanbe, 2010.
11. *Раджабов Н.* Переопределённая линейная система интегральных уравнений и сингулярные, сверхсингулярные интегральные уравнения типа Вольтерры третьего рода с логарифмическими и сверхсингулярными ядрами и их приложения. Душанбе, 2021.
12. *Rajabov N., Saidov S.* About new class of Volterra type integral equation with two boundary singularity in kernels // Proc. Intern. Conf. on Pure Mathematics – Applied Mathematics. March 15–17. Venice, 2014. P. 214–217.
13. *Саидов С.А.* К теории одного класса интегральных уравнений с двумя граничными сингулярными точками // Вестн. Таджикского нац. ун-та. Сер. естеств. наук. 2017. № 8. С. 31–34.
14. *Раджабов Н., Раджабова Л.Н., Саидов С. А.* Интегральные представления и граничные задачи для одного класса интегральных уравнений типа Вольтерры с двумя граничными сингулярными точками // Матер. Междунар. науч.-теор. конф. “Современные задачи математики и их приложения”, посвящ. 70-летию образования Таджикского нац. ун-та, 80-летию акад. Н. Раджабова. 25–26 сентября 2018 г. Душанбе, 2018. С. 176–181.

Таджикский национальный университет

Поступила в редакцию 08.06.2023 г.
После доработки 08.06.2023 г.
Принята к публикации 21.08.2023 г.