

УДК 517.968.21+517.956.22

## ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ФРЕДГОЛЬМА ДЛЯ ЗАДАЧ АКУСТИЧЕСКОГО РАССЕЙЯНИЯ НА ТРЁХМЕРНЫХ ПРОЗРАЧНЫХ СТРУКТУРАХ

© 2023 г. А. Б. Самохин, А. С. Самохина, И. А. Юрченков

Рассмотрены дифференциальные и интегральные постановки задач акустического рассеяния на трёхмерных ограниченных прозрачных структурах, описываемых интегральным уравнением. Приведены результаты численного решения интегрального уравнения, описывающего рассматриваемый класс задач. Доказана теорема существования и единственности решения.

DOI: 10.31857/S0374064123090108, EDN: WSGPTN

**Введение.** Решаются задачи акустического рассеяния на трёхмерных ограниченных прозрачных структурах. Исходная дифференциальная постановка задачи сводится к объёмному интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Доказывается теорема существования и единственности решения, в том числе для “сред без потерь”. Используя метод коллокации на тетраэдральной сетке, интегральное уравнение аппроксимируется системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Для решения СЛАУ применяются итерационные методы. Приводятся и анализируются численные результаты решения.

**1. Интегральное уравнение.** Рассмотрим следующий класс задач акустики. В ограниченной трёхмерной области  $Q$ , окружённой свободным пространством, материальная среда характеризуется индексом рефракции  $n(x)$ ,  $x \in Q$ , который является кусочно-дифференцируемой функцией координат, причём вне  $Q$  индекс рефракции равен единице. Требуется определить акустическое поле в евклидовом пространстве  $E_3$ , порождаемое внешним источником  $f_0(x)$  с временной зависимостью в виде множителя  $\exp(-i\omega t)$ ,  $\omega$  – частота акустического поля. В такой постановке соответствующая математическая задача формулируется следующим образом: найти функцию акустического поля  $U(x)$ , удовлетворяющую уравнению

$$\Delta U(x) + k^2 n(x)U(x) = f_0(x), \quad k = \omega/c, \quad (1)$$

где  $c$  – скорость звука в свободном пространстве, и  $U(x)$  должна удовлетворять условию излучения на бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[ r \left( \frac{\partial U}{\partial r} - ikU \right) \right] = 0, \quad r := |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \quad (2)$$

Кроме того, функция  $U(x)$  на границах раздела параметров среды должна быть непрерывной. Пусть  $f(x)$  – финитная функция в  $E_3$  относительно  $x$ . Тогда интегральное представление

$$V(x) = - \int f(y)G(R) dy \quad (3)$$

удовлетворяет в пространстве  $E_3$  уравнению Гельмгольца

$$\Delta V(x) + k^2 V(x) = f(x) \quad (4)$$

и условию излучения на бесконечности вида (2). В (3)  $G(R)$  – функция Грина уравнения Гельмгольца, которая в декартовой системе координат имеет вид

$$G(R) = \exp(ikR)/(4\pi R), \quad R = |x - y|, \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3). \quad (5)$$

Запишем уравнение (1) в виде

$$\Delta U + k^2 U = f_0 - k^2(n-1)U. \quad (6)$$

Из (1)–(6) следует, что неизвестное поле  $U(x)$  имеет следующее интегральное представление:

$$U(x) = - \int f_0(y)G(R) dy + k^2 \int_Q (n(y) - 1)U(y)G(R) dy, \quad x \in E_3. \quad (7)$$

Первый интеграл в правой части (7) описывает поле  $U_0(x)$ , создаваемое источником  $f_0(x)$  в свободном пространстве. Далее, поскольку  $n(x) = 1$  вне  $Q$ , из (7) следует уравнение Фредгольма второго рода относительно неизвестного поля  $U(x)$  в области  $Q$  [1, с. 116]

$$U(x) - k^2 \int_Q (n(y) - 1)U(y)G(R) dy = U_0(x), \quad x \in Q. \quad (8)$$

Из выражения (7), зная поле  $U(x)$  в области  $Q$ , можно найти поле в любой точке пространства.

**2. Теорема существования и единственности.** Рассмотрим сначала дифференциальную постановку задачи. Однородное уравнение (1) запишем в виде

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U(x) + k^2 n(x)U(x) = 0. \quad (9)$$

Справедливо следующее тождество:

$$\operatorname{div} (U^* \operatorname{grad} U) = U^* \operatorname{div} \operatorname{grad} U + \operatorname{grad} U^* \cdot \operatorname{grad} U, \quad (10)$$

где символ  $*$  обозначает комплексное сопряжение, а  $\cdot$  – скалярное умножение.

Проинтегрировав (10) по всему пространству и используя формулу Грина и уравнение (9), получим равенство

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} U^* \frac{\partial U}{\partial r} dS = -k^2 \int n|U|^2 d\nu + \int |\operatorname{grad} U|^2 d\nu, \quad (11)$$

где  $S_r$  – сфера радиуса  $r$  с центром в точке  $x \in Q$ .

Выбрав мнимую часть от выражения (11), с учётом условия излучения (2) будем иметь

$$k \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} |U|^2 dS + k^2 \int_Q \operatorname{Im} n |U|^2 d\nu = 0. \quad (12)$$

Ниже будем полагать, что  $\operatorname{Im} n \geq 0$  в области  $Q$ , а значит, каждое слагаемое в (12) равно нулю. Тогда в сферической системе координат

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |U|^2 r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 0. \quad (13)$$

Обозначим через  $\Omega_R$  шар радиусом  $R$ , содержащий область  $Q$ , причём граничные точки  $Q$  находятся вне поверхности шара. Вне области  $\Omega_R$  поле удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta U(x) + k^2 U(x) = 0 \quad (14)$$

и условию излучения (2). Общее решение задачи (14), (2) описывается рядом собственных функций уравнения Гельмгольца, которые представляются в виде произведения функций Ганкеля, зависящих от  $r \geq R$ , и ортогональных сферических функций (см. [2, с. 375]). При больших значениях  $r$  функции Ганкеля пропорциональны, с точностью членов большего порядка малости,  $\exp(ikr)/r$ . Поэтому из (13), учитывая ортогональность сферических функций на сфере, получаем, что коэффициенты ряда по собственным функциям уравнения Гельмгольца (14) равны нулю. Значит, акустическое поле для задачи (14), (2) в области  $E_3 \setminus \Omega_R$  равно нулю.

Уравнение (14) является эллиптическим в области  $E_3 \setminus Q$ , и все коэффициенты уравнения являются дифференцируемыми функциями. Тогда можно воспользоваться принципом продолжения решения по непрерывности [3, с. 291] из области  $E_3 \setminus \Omega_R$  в область  $\Omega_R \setminus Q$ . Поэтому, поскольку поле равно нулю и в области  $E_3 \setminus \Omega_R$ , оно равно нулю в области  $E_3 \setminus Q$ . Если  $\text{Im } n(x) > 0$  в  $Q$ , то из (12) следует, что в области  $Q$ , а значит и во всем пространстве, поле равно нулю.

Далее, пусть  $n(x)$  является всюду дифференцируемой функцией, в том числе на границе  $Q$ . Тогда аналогично изложенному выше получим, что поле тождественно равно нулю во всем пространстве.

Рассмотрим следующий случай. Пусть  $n(x)$  – дифференцируемая функция координат в области  $Q$ , а на границе функция терпит скачок. В области  $Q$  находится сколь угодно малая область  $Q_1$ , в которой  $\text{Im } n(x) > 0$ , а в области  $Q \setminus Q_1$   $\text{Im } n(x) = 0$ . Из равенства (12) следует, что поле равно нулю в области  $Q_1$ . Используя принцип продолжения решения по непрерывности из области  $Q_1$  в область  $Q \setminus Q_1$ , получаем, что во всей области  $Q$  поле равно нулю.

Любое решение однородного уравнения (8) из гильбертова пространства интегрируемых с квадратом функций удовлетворяет однородной задаче (1), (2). Следовательно, однородное интегральное уравнение (8) будет иметь только нулевое решение в пространстве  $L_2(Q)$ , если однородная дифференциальная задача (1), (2) имеет только нулевое решение. Поскольку оператор уравнения (8) является фредгольмовым, то решение уравнения (8) существует, если оно единственно. Если правая часть уравнения (8) выражается через (7), то решение интегрального уравнения будет являться решением исходной задачи (1), (2). Таким образом, доказана следующая

**Теорема.** Пусть в ограниченной области  $Q$  определена функция индекса рефракции  $n(x)$ , а вне  $Q$   $n(x) = 1$ . Тогда решение интегрального уравнения (8) существует и единственно в гильбертовом пространстве  $L_2(Q)$ , если выполняется одно из следующих условий:

- 1)  $\text{Im } n(x) > 0$  в области  $Q$ ;
- 2)  $n(x)$  является дифференцируемой функцией координат в  $Q$ , а на границе  $Q$  терпит разрыв; в области  $Q$  находится сколь угодно малая область  $Q_1$ , в которой  $\text{Im } n(x) > 0$ , а в области  $Q \setminus Q_1$   $\text{Im } n(x) = 0$ ;
- 3)  $n(x)$  является всюду, в том числе и на границе  $Q$ , дифференцируемой функцией координат и  $\text{Im } n(x) = 0$  в области  $Q$ .

Если правая часть (8) представима через функцию источника  $f_0(x)$ , то решение уравнения (8) будет являться единственным решением задачи (1), (2).

**3. Метод решения.** Для аппроксимации интегрального уравнения (8) будем использовать метод коллокации на неравномерной сетке. Представим область  $Q$  в виде объединения  $N_Q$  ячеек  $\Omega_n$ ,  $n = \overline{1, N_Q}$ . Узловые точки в этих ячейках будем выбирать в их центрах  $x^{cn} = (x_1^{cn}, x_2^{cn}, x_3^{cn})$ ,  $n = \overline{1, N_Q}$ , которые определяются формулами

$$x_i^c = \frac{1}{\text{mes } \Omega} \int_{\Omega} x_i dx_1 dx_2 dx_3, \quad i = 1, 2, 3,$$

где  $\text{mes } \Omega$  – объём ячейки  $\Omega_n$ . Если в качестве ячеек рассматриваются тетраэдры произвольной формы, то можно достаточно точно описать многие сложные конфигурации области  $Q$  и

среды. Центр тетраэдра определяется простой формулой  $x_i^{cn} = (x_i^{(1)n} + x_i^{(2)n} + x_i^{(3)n} + x_i^{(4)n})/4$ ,  $i = 1, 2, 3$ , в которой  $(x_1^{(k)n}, x_2^{(k)n}, x_3^{(k)n})$  – декартовы координаты  $k$ -й вершины тетраэдра.

Будем аппроксимировать интегральное уравнение (8) системой линейных алгебраических уравнений размерности  $N_Q$  относительно значений неизвестного поля в узловых точках области  $Q$ , находящихся в центрах ячеек  $\Omega_n$  [4]:

$$u_n + \sum_{m=1}^{N_Q} A(n, m)\eta_m u_m = u_n^0, \quad n = \overline{1, N_Q}, \quad A(n, m) = k^2 \int_{\Omega_m} \frac{\exp(ik|x^{cn} - y|)}{4\pi|x^{cn} - y|} dy,$$

$$u_n = U(x^{cn}), \quad u_n^0 = U_0(x^{cn}), \quad \eta_n = n(x^{cn}) - 1. \tag{15}$$

Отметим, что поскольку узловые точки находятся в центре ячеек, точность аппроксимации интегральных операторов порядка  $h^2$ , где  $h$  – максимальный диаметр ячеек (*диаметром* называем максимальное расстояние между точками границы). В работе [5] доказано, что при сгущении сетки в методе коллокации, т.е. при увеличении числа ячеек  $N_Q$ , приближённые решения на основе СЛАУ стремятся к точному решению интегрального уравнения.

Опишем основные проблемы, которые возникают при численном решении СЛАУ (15). В силу трёхмерности уравнения (8) после дискретизации возникают СЛАУ большой размерности  $N \gg 1000$ . Очевидно, что использование прямых методов практически невозможно, поскольку в памяти компьютера необходимо хранить  $M \sim N^2$  чисел, а для решения СЛАУ нужно выполнить  $T \sim N^3$  арифметических операций. Поэтому возможно использование только итерационных методов. В этом случае параметры  $M$  и  $T$  оцениваются формулами

$$M \sim M_A, \quad T \sim LT_A. \tag{16}$$

В (16)  $M_A$  – количество элементов массива чисел, которые необходимы для алгоритма умножения матрицы СЛАУ на вектор;  $L$  – количество итераций для получения решения с заданной точностью;  $T_A$  – число арифметических операций для умножения матрицы СЛАУ на вектор. Для плотных матриц произвольного вида  $M_A \sim N^2$ ,  $T_A \sim N^2$ .

В настоящей работе для численного решения СЛАУ (15) будем использовать двухшаговый метод градиентного спуска [6]:

$$z_1 = z_0 - \frac{\|H^*r_0\|^2}{\|HH^*r_0\|^2}H^*r_0, \quad r_0 = Hz_0 - f,$$

$$z_{k+1} = z_k - t_k(z_k - z_{k-1}) - h_kH^*r_k, \quad r_k = Hz_k - f, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$t_k\|r_k - r_{k-1}\|^2 + h_k\|H^*r_k\|^2 = 0,$$

$$t_k\|H^*r_k\|^2 + h_k\|HH^*r_k\|^2 = \|H^*r_k\|^2,$$

где  $H$  – комплексная матрица системы уравнений  $H z = f$ , а символ  $*$  обозначает сопряжённую матрицу, т.е. транспонированную матрицу с комплексно-сопряжёнными элементами. Отметим, что, в отличие от других итерационных методов, приведённый метод сходится только при одном условии – если матрица СЛАУ невырожденная.

Помимо двухшагового метода градиентного спуска для численного решения СЛАУ (15), также рассматриваются итерационные методы бисопряжённых градиентов [7] и минимальных невязок [8, с. 130].

**4. Численные результаты.** Проведём численное моделирование на области  $Q$ , которая задана кубом с центром в точке  $x_Q^c = (0, 0, 0)$  и длиной стороны  $L_Q = 2.4$ , коэффициент рефракции области  $n_Q(x) = 2$ . Внутри куба находится сфера  $S$  единичного радиуса  $R_S = 1$  с центром в точке  $(0, 0, 0)$ , коэффициент рефракции сферы  $n_S(x) = 3$ . Триангуляционную сетку для поставленной задачи построим в системе построения сеток gmsh: количество разбиений  $N_Q \approx 10\,000$ , максимальный диаметр разбиения  $h = 0.430$ .

Внешний источник излучения задан амплитудой колебаний  $A = 1$ , вектором направления  $d = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ , а также волновым числом  $k$ , который будет варьироваться в ходе сравнения.

Решать задачу будем с помощью двухшагового метода градиентного спуска (MSGD), стабилизированного метода бисопряжённых градиентов (BICGStab) и метода минимальных невязок (MRES). Критерий остановки метода будем определять исходя из относительной разности приближений на соседних шагах метода:

$$\frac{\|u_n - u_{n-1}\|}{\|f\|} < \varepsilon. \quad (17)$$

Таким образом, при достижении заданной точности изменения приближаемого вектора итерационный метод окончательно определит приближённое численное решение  $u_l$  исходной задачи.

В таблице представлены результаты работы итерационных методов на задаче (15). Варьируя значения волнового числа  $k$  при фиксированном  $\varepsilon = 10^{-7}$ , для каждого итерационного метода определены число  $mv$  умножений матрицы на вектор  $m$  для достижения цели сходимости и конечная норма невязки

$$\|r_L\| = \|Au_L - f\|$$

на последнем шаге  $L$ .

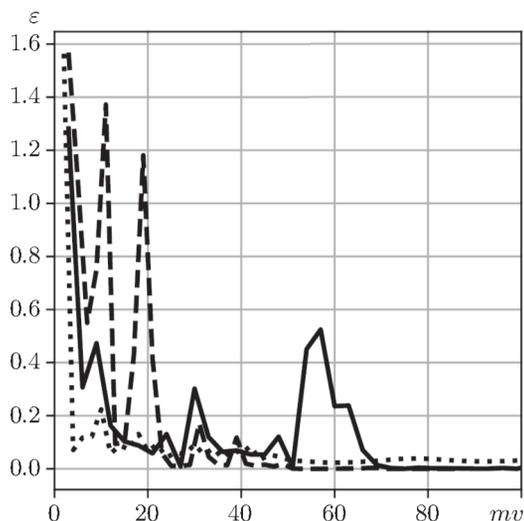
Видно, что при увеличении  $k$  решения на основе итерационных методов расходятся по конечной норме невязки и числу итераций, а норма невязки  $\|r_L\|$  на последнем шаге для каждого метода при адекватных значениях волнового числа в методах различается не сильно. По точности сходимости на конкретной задаче лучшим является двухшаговый метод градиентного спуска. При достижении  $k \geq 4$  решение в заданных условиях становится нестабильным и количество итераций для методов достигает максимального заранее заданного значения. При переходе через критическое значение волнового числа для данной задачи сравнение методов не является репрезентативным.

**Таблица.** Сравнительная таблица методов MSGD, BICGStab, MRES при различных значениях  $k$  и  $\varepsilon = 10^{-7}$ ,  $N_Q = 10\,000$

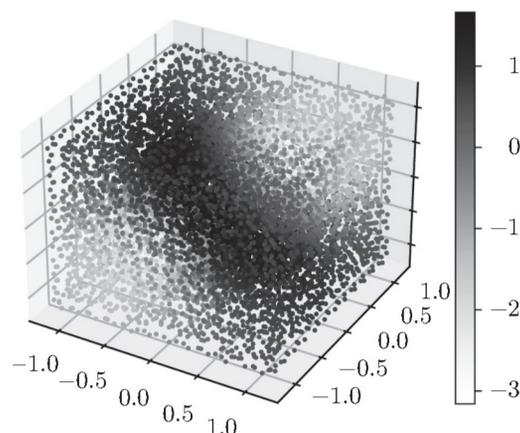
$k$	MSGD		BICGStab		MRES	
	$mv$	$\ r_L\ $	$mv$	$\ r_L\ $	$mv$	$\ r_L\ $
0.1	12	3.75E-08	7	1.67E-13	8	1.13E-07
0.5	21	3.23E-06	9	1.13E-08	18	9.75E-06
1	42	8.28E-06	17	1.40E-06	82	0.000107
2	201	0.001906	87	4.02E-06	2000	0.028508
3	276	0.000209	255	4.83E-05	68	19.9611
4	2226	0.022816	2001	1.070618	70	12.56881
5	3003	0.006033	2001	45.78722	112	10.29263
6	3003	0.035198	2001	106.9764	80	7.641037
7	3003	0.055716	2001	0.814367	110	6.08206
8	3003	0.071086	2001	0.437052	108	4.956859

На рис. 1 показана динамика (17) на итерациях при  $k = 2$ .

Для каждого итерационного метода конечный результат распределения значений  $U(x^{cn})$  в области  $Q$  в центрах разбиений  $x^{cn}$  на основе трёхмерного графика разброса визуально представлен на рис. 2. Значения функции в точке центра каждого тетраэдра соответствуют значению на цветовой шкале напряжённости. Трёхмерная визуализация потенциального поля  $U(x)$  в области  $Q$  при значениях  $k = 2$  справедлива для всех рассматриваемых итерационных методов с точностью до значения конечной нормы невязки на последней итерации.



**Рис. 1.** Сравнение по относительной норме разницы приближения итерационных методов BICGStab (штриховая линия), MRES ( $m = 1$ ) (пунктирная) и MSGD (сплошная).



**Рис. 2.** Распределение значений приближённого решения для неизвестной функции  $U(x)$  в центрах тетраэдров  $\Omega_n$ .

**Заключение.** В статье рассмотрено объёмное интегральное уравнение Фредгольма второго рода, описывающее задачи акустического рассеяния на ограниченных прозрачных структурах. При выполнении ряда условий доказана теорема существования и единственности решений рассматриваемых задач. Описан численный метод решения интегрального уравнения на основе метода коллокации и итерационных методов. Приведены результаты численного решения конкретных задач.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М., 1990.
2. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М., 1970.
3. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных уравнений с частичными производными. М., 1986.
4. Самохин А.Б. Методы и эффективные алгоритмы решения многомерных интегральных уравнений // Russ. Technological J. 2022. V. 10. № 6. P. 70–77.
5. Vainikko G. Multidimensional Weakly Singular Integral Equations. Heidelberg, 1993.
6. Самохин А.Б., Самохина А.С., Скляр А.С., Шестопалов Ю.В. Итерационные методы градиентного спуска для решения линейных уравнений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2019. Т. 59. № 8. С. 1331–1339.
7. Henk A., van der Vorst. Iterative Krylov Methods for Large Linear System. Cambridge, 2003.
8. Самохин А.Б. Объёмные сингулярные интегральные уравнения электродинамики М., 2021.

МИРЭА – Российский технологический университет,  
г. Москва,  
Институт проблем управления  
имени В.А. Трапезникова РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 29.03.2023 г.  
После доработки 29.03.2023 г.  
Принята к публикации 20.07.2023 г.