ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 9, с. 1266–1282

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.5

ОБ УСЛОВИЯХ ОПТИМАЛЬНОСТИ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ ВЕСА ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ ПРИ ЗАДАННОЙ ЧАСТОТЕ КОЛЕБАНИЙ

© 2023 г. М. О. Арабян

Рассматриваются пологие упругие оболочки с заданной круговой границей. Ищется осесимметричная форма оболочки, которая минимизирует вес при заданной основной частоте колебаний оболочки. С помощью полученной формулы для линейной части приращения частотного функционала оценивается кратность минимальной собственной частоты колебаний оболочки. Устанавливается также дифференцируемость по Фреше частотного функционала и получаются условия оптимальности минимизации веса оболочки при заданной основной частоте колебаний.

DOI: 10.31857/S037406412309011X, EDN: WPFGKJ

Введение. Проблемы оптимизации конструкции в последнее время привлекают большое внимание, их решению посвящено значительное число работ. Существенное развитие теория оптимального проектирования получила в связи с исследованиями задачи отыскания форм сжатого стержня (колонны), обладающего минимальным весом и выдерживающего без потери устойчивости заданную нагрузку. Эта задача была поставлена Ж. Лагранжем [1].

Выбор функционалов, рассмотренных при оптимальном проектировании, является частью постановок задач оптимизации. На этот выбор влияют многие обстоятельства: основное назначение конструкции, условия эксплуатации, свойства модели.

Вес – одна из основных характеристик конструкции, и поэтому в большинстве работ по оптимальному проектированию этот функционал либо рассматривается в качестве оптимизируемого критерия качества, либо фигурирует среди других принимаемых ограничений.

Наиболее типичными в теории оптимального проектирования сжатых конструкций являются задачи максимизации критического значения ω_0 (ω_0 – минимальное из собственных значений) при заданном весе конструкции и задачи минимизации веса при ограничении $\omega_0 \geqslant \mu$, где μ – заданное число. Заметим, что в отличие от динамических задач оптимального проектирования, в которых ставятся ограничения не только на фундаментальную частоту, но и на высшие частоты, учёт в задачах оптимального проектирования ограничений по устойчивости основан на рассмотрении только минимальных собственных значений.

В данной работе рассматриваются пологие упругие оболочки с заданной круговой границей. Наша цель – определить форму осесимметричной оболочки, которая имеет минимальный общий вес для заданной основной частоты пологой оболочки.

Рассматривается задача оптимального управления, описываемая задачей на собственные значения для системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, некоторые из них неинтегрируемы вблизи нуля. Для решения этой проблемы в статье [2] были введены специальные весовые пространства, затем были установлены теоремы вложения и свойства функций весовых пространств, а также существование решений краевой задачи и задачи на собственные значения.

В настоящей работе изучена дифференцируемость по Фреше частотного функционала и получены необходимые условия в оптимизационной задаче, поэтому сначала определена кратность собственного значения. В дальнейшем, получив липшицеву непрерывность задачи на собственные значения и формулу градиента частотного функционала, методом Лагранжа найдены необходимые условия оптимальности.

В таких задачах оптимального управления кратность собственного значения не определяется, а рассматривается только как гипотеза [3–5]. Отметим также, что подобные задачи изучаются в работах [6–17].

1. Основные обозначения и постановка задачи. Рассмотрим задачу оптимизации из теории тонких оболочек в полярных координатах. При определённых предположениях поперечные колебания оболочки вращения описываются системой двух дифференциальных уравнений [18–20].

Обозначим $W = W(r)$, $\varphi = \varphi(r)$. Переменная $r \in [0, b]$ указывает текущий радиус; $W(r)$ – амплитуда перемещения точек серединной поверхности в осевом направлении; $\varphi(r)$ – функция напряжения, характеризующая тангенциальное перемещение.

Строгая постановка задачи: найти все пары (λ, u), где $\lambda \in \mathbb{R}$ и $u = (W, \varphi)$, такие, что

$$(Lu)_1 \equiv (rDW'')'' + \left(\left(\nu D' - \frac{D}{r}\right)W'\right)' + (f'\varphi)' = \lambda r h \rho W, \tag{1}$$

$$(Lu)_2 \equiv (ar\varphi')' - \left(\frac{a}{r} + \nu a'\right)\varphi - f'W' = 0. \tag{2}$$

Здесь величина $f(r)$ определяет форму серединной поверхности оболочки вращения; $\rho(r) > 0$ – удельный вес материала оболочки; $h(r)$ – заданная толщина оболочки, удовлетворяющая условию

$$0 < h_0 \leqslant h(r) \leqslant h_1. \tag{3}$$

Наконец, $D(r)$ – жёсткость на изгиб, $D(r) \geqslant D_0 > 0$, определяемая как

$$D(r) = \frac{Eh^3(r)}{12(1-\nu^2)}, \quad a(r) = \frac{1}{Eh(r)}, \tag{4}$$

где $E > 0$ – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, $-1 < \nu < 0.5$.

Задача на собственные значения представляет собой систему двух уравнений (1) и (2), дополненную следующими граничными условиями:

$$W'|_{r=0} = \left((rDW'')' + \left(\nu D' - \frac{D}{r}\right)\frac{W'}{r}\right)\bigg|_{r=0} = 0, \tag{5}$$

$$W|_{r=b} = W'|_{r=b} = 0, \tag{6}$$

$$a(\nu\varphi - r\varphi')|_{r=0} = a(\nu\varphi - r\varphi')|_{r=b} = 0, \tag{7}$$

где $b > 0$ – константа.

Обозначим через $\lambda_1 = w^2(f')$ минимальное собственное значение задачи (1)–(7), где $w(f')$ – минимальная частота колебаний оболочки. Отметим, что граничные условия (5)–(7) взяты для случая закреплённого края при $r = b$. Далее для шарнирно-опертого края условия (6) имеют вид

$$W|_{r=b} = -D\left(W'' + \nu\frac{W'}{r}\right)\bigg|_{r=b} = 0. \tag{8}$$

Таким образом, у нас есть две задачи на собственные значения: (1)–(7) и (1)–(5), (7), (8). Мы исследуем первую, вторая задача рассматривается аналогично.

Рассмотрим стандартную задачу минимизации веса оболочки

$$J(f') = \int\limits_0^b 2\pi r h \rho \sqrt{1 + (f'(r))^2}\, dr \to \inf \tag{9}$$

при условии

$$\lambda_1(f') = \omega^2(f') = \omega_0^2. \tag{10}$$

Пусть $p(r) = f'(r)$ – фиксированный элемент управления. Чтобы изучить проблему собственных значений, нам нужно в первую очередь изучить краевую задачу

$$(Lu)_1 = s_1, \tag{11}$$

$$(Lu)_2 = s_2 \tag{12}$$

с граничными условиями (5)–(7).

Первый вопрос, который возникает при изучении задачи (1)–(7), (9), (10), как решить задачу (1)–(7) для фиксированного управления $p(r)$. На самом деле некоторые коэффициенты системы не интегрируемы на отрезке $[0,b]$, поэтому в п. 2 вводятся конкретные весовые пространства (см. [2]).

2. Весовые пространства, обобщённое решение и некоторые вспомогательные результаты. Введём весовые гильбертовы пространства $\widetilde{H}^1[0,b]$, $\widetilde{H}^2[0,b]$ со следующими, соответственно, скалярными произведениями:

$$\langle u,v\rangle_{\widetilde{H}^1}=\int\limits_0^b\left(ru'v'+\frac{uv}{r}\right)dr,\quad \langle u,v\rangle_{\widetilde{H}^2}=\int\limits_0^b\left(ru''v''+\frac{u'v'}{r}+uv\right)dr,$$

где $u,v,u',v',u'',v''\in L_{1,\mathrm{loc}}(0,b)$. Соответствующие нормы определяются как обычно.

Приведём следующий результат о теореме вложений.

Теорема 1 [2]. *Любая функция $u\in\widetilde{H}^1[0,b]$ может быть отождествлена с непрерывной на отрезке $[0,b]$ функцией и любая функция $v\in\widetilde{H}^2[0,b]$ с непрерывно дифференцируемой на $[0,b]$ функцией, удовлетворяющими следующим оценкам и условиям:*

$$\max_{[0,b]}|u|\leqslant c_1\|u\|_{\widetilde{H}^1[0,b]},\quad u(0)=0,\quad \max_{[0,b]}(|v'|+|v|)\leqslant c_2\|v\|_{\widetilde{H}^2[0,b]},\quad v'(0)=0. \tag{13}$$

Теперь мы можем приступить к исследованию задачи на собственные значения (1)–(7). Пусть V – следующее линейное подпространство пространства $\widetilde{H}^1\times\widetilde{H}^2$:

$$V=\{v:v=(v_1,v_2)\in\widetilde{H}^1\times\widetilde{H}^2,\ \ v_2(b)=v_2'(b)=0\}.$$

Тип механических граничных условий, включённых в определение V, заключается в том, что оболочка зажата по всей границе.

На пространстве $V\times V$ рассмотрим билинейную форму

$$B(u,v)=\int\limits_0^b\left[rDu_2''v_2''+(D-\nu D'r)\frac{u_2'v_2'}{r}-pu_1v_2'+aru_1'v_1'+(a+\nu a'r)\frac{u_1v_1}{r}+pu_2'v_1\right]dr-a\nu u_1v_1|_0^b,$$

порождённую дифференциальным оператором и граничными условиями задачи (5)–(7).

В дальнейшем нам понадобится следующее

Определение. Для любой $s=(s_1,s_2)$, $s_1,s_2\in L_2[0,b]$, функцию $u\in V$ назовём *обобщённым решением* задачи (5)–(7), (11), (12), если выполняется соотношение

$$B(u,v)=\langle s_1,v_2\rangle_{L_2}+\langle s_2,v_1\rangle_{L_2},\quad v=(v_1,v_2)\in V. \tag{14}$$

Как показано в [2, теорема 5], билинейная форма $B(u,v)$ положительно определена и ограничена, если два из указанных ниже условий 1)–3) выполнены:

1) $D(r),D(r)-\nu D'(r)r$, $a'(r)\in L_\infty[0,b]$, $p\in L_1[0,b]$;
2) $D(r)\geqslant D_0>0$, $D(r)-\nu D'(r)r\geqslant D_{10}>0$, $a(r)\geqslant a_0>0$;
3) $t(r)=h(r)\rho(r)\in L_\infty[0,b]$, $t(r)\geqslant t_0$.

Далее представим результат о существовании и единственности решения краевой задачи (14).

Теорема 2 [2]. *Предположим, что два из указанных выше условий 1)–3) выполнены. Тогда для любой $s=(s_1,s_2)^{\mathrm{т}}$, $s_1,s_2\in L_2[0,b]$, задача (14) имеет единственное решение $u\in V$.*

Кроме того, для решения u справедлива оценка

$$\|u\|_V\leqslant c_1(\|s_1\|_{L_2}^2+\|s_2\|_{L_2}^2)^{1/2}.$$

Возьмём любую функцию $\psi \in L_2[0,b]$. Тогда условие

$$B(u,v) = \langle \sqrt{rt}\,\psi, v_2\rangle_{L_2}, \quad v \in V,$$

получаемое из (14) для $s = (\sqrt{rt}\,\psi, 0)^{\text{т}}$, определяет функцию $u \in V$. Таким образом определён оператор $G : \psi \in L_2[0,b] \to u = G\psi \in V$ и верна оценка

$$\|u\|_{\widetilde{H}^1\times\widetilde{H}^2} = \|G\psi\|_{\widetilde{H}^1\times\widetilde{H}^2} \leqslant c_1\|\sqrt{rt}\,\psi\|_{L_2}. \tag{15}$$

Далее показано, что оператор $F_1\psi = \sqrt{rt}\,(G\psi)_2$, отображающий $L_2[0,b]$ на $L_2[0,b]$, компактный и самосопряжённый [2].

Легко видеть, что если μ является собственным числом оператора F_1, а ψ – соответствующая собственная функция, т.е. $F_1\psi = \mu\psi$, то $\lambda = 1/\mu$ и $u = G\psi$ – собственное значение и собственная функция, соответственно, задачи

$$B(u,v) = \lambda\langle rtu_2, v_2\rangle_{L_2}, \quad v \in V. \tag{16}$$

Действительно,

$$B(u,v) = B(G\psi, v) = \langle\sqrt{rt}\,\psi, v_2\rangle_{L_2} = \frac{1}{\mu}\langle rt(G\psi)_2, v_2\rangle_{L_2} = \lambda\langle rtu_2, v_2\rangle_{L_2}, \quad v \in V.$$

Таким же образом можно доказать, что если λ – собственное число, а u – соответствующая собственная функция задачи (16), то $\mu = 1/\lambda$ и $\psi = \sqrt{rt}\,u_2$ являются собственным числом и собственной функцией оператора F_1 соответственно.

Как показано в работе [2, теорема 6], если выполняются все условия 1)–3), то:

а) существует последовательность положительных собственных значений λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_k, $\ldots$ задачи (16) с $\lambda_k \to +\infty$ при $k \to \infty$;

б) каждому собственному значению λ_k соответствует только конечное число линейных независимых собственных функций из пространства V.

3. О некоторых свойствах решений задачи на собственные значения. Теперь изучим некоторые свойства решений следующей задачи:

$$B(u,v;p) = \lambda\langle rtu_2, v_2\rangle_{L_2}, \quad v \in V. \tag{17}$$

Для нашего исследования важна следующая лемма. Она будет использована для получения однократности минимального собственного значения $\lambda_1(p)$.

Лемма 1. *Допустим, что функции $D(r)$, $a(r)$, $t(r)$ удовлетворяют условиям 1)–3) и $p(r), \delta p(r) \in L_1[0,b]$. Далее пусть $u(p)$, $\widetilde{u}(p)$ – две линейно независимые собственные функции, соответствующие собственному значению $\lambda_1(p)$ задачи (17). Тогда верно следующее равенство:*

$$(u_2'(p)\widetilde{u}_1(p) - \widetilde{u}_2'(p)u_1(p))|_r = 0, \quad r \in (0,b). \tag{18}$$

Доказательство. Из соотношения (17) при $v = (v_1, 0)^{\text{т}}$ имеем

$$\int\limits_0^b \left[aru_1'v_1' + (a + \nu a'r)\frac{u_1v_1}{r} + pu_2'v_1\right]dr - a\nu u_1v_1|_0^b = 0, \quad v \in V. \tag{19}$$

Теперь докажем, что п.в. на $(0,b)$ выполняется соотношение

$$(pu_2'(p)\widetilde{u}_1(p) - p\widetilde{u}_2'(p)u_1(p))|_r = 0. \tag{20}$$

Пусть $\overline{r}$ – произвольная точка из интервала $(0,b)$.

Шаг 1. Начнём со случая, когда $\widetilde{u}_1(p)|_{\overline{r}}=0, u_1(p)|_{\overline{r}}=0$. Рассмотрим следующие функции:

$$x=\begin{cases}\widetilde{u}_1(p)|_r, & r\in[0,\overline{r}],\\ 0, & r\in(\overline{r},b],\end{cases}\qquad y=\begin{cases}u_1(p)|_r, & r\in[0,\overline{r}],\\ 0, & r\in(\overline{r},b].\end{cases}$$

Заметим, что эти функции непрерывные, так как $u_1(p)$ и $\widetilde{u}_1(p)$ непрерывные.

Теперь вычтем соотношение (19) при $u=\widetilde{u}(p)$, $v_1=y$ из того же соотношения с $u=u(p)$, $v_1=x$ и получим

$$\int\limits_0^{\overline{r}}[pu_2'(p)\widetilde{u}_1(p)-p\widetilde{u}_2'(p)u_1(p)]\,dr=0,\quad \overline{r}\in(0,b]. \tag{21}$$

Соотношение (20) доказано в [21, с. 331].

Шаг 2. Теперь рассмотрим общий случай. Без ограничения общности можно считать, что одна из функций $u_1(p)$, $\widetilde{u}_1(p)$ обращается в нуль при $\overline{r}$, т.е. $\widetilde{u}_1(p)|_{\overline{r}}=0$, $u_1(p)|_{\overline{r}}\neq 0$. Действительно, для этого мы можем заменить $\widetilde{u}(p)$ нетривиальной линейной комбинацией $c_1\widetilde{u}(p)+{}$ $+\,c_2u(p)$. Проделаем указанную выше операцию с функцией y, заменив её на функцию

$$z=\begin{cases}u_1(p)|_r, & r\in[0,\overline{r}],\\ u_1(p)|_{\overline{r}}(\overline{r}+\delta-r)/\delta, & r\in(\overline{r},\overline{r}+\delta],\\ 0, & r\in(\overline{r}+\delta,b].\end{cases}$$

Тогда получим

$$\int\limits_0^{\overline{r}}[pu_2'(p)\widetilde{u}_1(p)-p\widetilde{u}_2'(p)u_1(p)]\,dr-$$

$$-\int\limits_{\overline{r}}^{\overline{r}+\delta}\bigg[-\frac{ar}{\delta}\widetilde{u}_1'(p)u_1(p)\Big|_{\overline{r}}+(a+\nu a'r)\frac{\overline{r}+\delta-r}{\delta}\frac{\widetilde{u}_1(p)}{r}u_1(p)\Big|_{\overline{r}}+p\widetilde{u}_2'(p)\frac{\overline{r}+\delta-r}{\delta}u_1(p)\Big|_{\overline{r}}\bigg]\,dr=0.$$

Оценим в этом соотношении три слагаемых второго интеграла, начиная со второго и третьего.

Ввиду абсолютной непрерывности интеграла Лебега получаем, что

$$\int\limits_{\overline{r}}^{\overline{r}+\delta}(a+\nu a'r)\frac{\overline{r}+\delta-r}{\delta}\frac{\widetilde{u}_1(p)}{r}u_1(p)\Big|_{\overline{r}}\,dr\to 0,\qquad \int\limits_{\overline{r}}^{\overline{r}+\delta}p\widetilde{u}_2'(p)\frac{\overline{r}+\delta-r}{\delta}u_1(p)\Big|_{\overline{r}}\,dr\to 0$$

при $\delta\to 0$.

Действительно, подынтегральные выражения здесь интегрируемы по Лебегу, поскольку $0\leqslant(\overline{r}+\delta-r)/\delta\leqslant 1$ для любого $r\in(\overline{r},\overline{r}+\delta)$, $\overline{r}>0$, а остальные функции непрерывны.

Далее оценим первое слагаемое во втором интеграле данного соотношения. С учётом неравенства Коши–Буняковского имеем, что

$$I(p,\overline{r},\delta):=\bigg|\frac{1}{\delta}\int\limits_{\overline{r}}^{\overline{r}+\delta}ar\widetilde{u}_1'(p)u_1(p)|_{\overline{r}}\,dr\bigg|=\bigg|\frac{1}{\delta}(z|_{\overline{r}}-z|_{\overline{r}+\delta})\int\limits_{\overline{r}}^{\overline{r}+\delta}ar\widetilde{u}_1'(p)\,dr\bigg|\leqslant$$

$$\leqslant\bigg(\int\limits_{\overline{r}}^{\overline{r}+\delta}(z')^2\,dr\bigg)^{1/2}\bigg(\int\limits_{\overline{r}}^{\overline{r}+\delta}(ar\widetilde{u}_1'(p))^2\,dr\bigg)^{1/2}.$$

Отсюда в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега, заключаем, что $I(p,\overline{r},\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Таким образом, мы снова получили соотношение (21), а это означает, что равенство (20) доказано.

Далее докажем соотношение (18). Предположим противное, т.е. что для некоторой точки $r_0 \in (0,b)$ имеем $(u_2'(p)\widetilde{u}_1(p) - \widetilde{u}_2'(p)u_1(p))|_{r_0} \neq 0$. Поскольку функция непрерывна, существует интервал $(r_0-\alpha, r_0+\alpha)$ такой, что

$$(u_2'(p)\widetilde{u}_1(p) - \widetilde{u}_2'(p)u_1(p))|_r \neq 0, \quad r \in (r_0-\alpha, r_0+\alpha). \tag{22}$$

Отсюда и из (20) получаем, что п.в.

$$p(r) = 0, \quad r \in (r_0-\alpha, r_0). \tag{23}$$

Далее, заменив v на z в (19) и устремив δ к нулю, имеем

$$\int\limits_0^{\overline{r}} \left[ar(u_1'(p))^2 + (a+\nu a'r)\frac{(u_1(p))^2}{r} + pu_2'(p)u_1(p)\right] dr = 0, \quad \overline{r} \in (0,b]. \tag{24}$$

Но тогда, вычитая соотношение (24) при $\overline{r} = r_0-\alpha$ из того же самого соотношения при $\overline{r} = r_0$, находим

$$\int\limits_{r_0-\alpha}^{r_0} \left(ar(u_1'(p))^2 + (a+\nu a'r)\frac{(u_1(p))^2}{r}\right) dr = -\int\limits_{r_0-\alpha}^{r_0} pu_2'(p)u_1(p)\,dr. \tag{25}$$

Теперь проинтегрируем по частям:

$$\int\limits_{r_0-\alpha}^{r_0} \nu a'(u_1(p))^2\,dr = \nu a(u_1)^2|_{r_0-\alpha}^{r_0} - 2\int\limits_{r_0-\alpha}^{r_0} \nu a u_1'(p)u_1(p)\,dr.$$

Далее без ограничения общности можно считать, что $u_1(p)|_{r_0-\alpha} = 0$. Тогда с учётом соотношений (23), (25) и $a(r) \geqslant a_0 \geqslant 0$ получаем, что

$$(1-\nu)a_0 \int\limits_{r_0-\alpha}^{r_0} \left(r(u_1'(p))^2 + \frac{(u_1(p))^2}{r}\right) dr \leqslant \int\limits_{r_0-\alpha}^{r_0} pu_2'(p)u_1(p)\,dr = 0. \tag{26}$$

Отсюда имеем

$$u_1(p)|_r = 0, \quad r \in (r_0-\alpha, r_0). \tag{27}$$

Таким же образом можно доказать, что $\widetilde{u}_1(p)|_r = 0$ для любого $r \in (r_0-\alpha, r_0)$.

Но тогда с учётом равенства (27) $(u_2'(p)\widetilde{u}_1(p) - \widetilde{u}_2'(p)u_1(p))|_r = 0$ для любого $r \in (r_0-\alpha, r_0)$, что противоречит (22).

Следовательно, соотношение (18) доказано. Лемма доказана.

Теперь докажем следующие две леммы и следствие.

Имеем, что $u(p) = (u_1(p), u_2(p))$ удовлетворяет соотношению (17). Далее пусть $r_i \in [0,b)$, $i \in \mathbb{N}$, – нули функции $u_1(p)$. Так как $u(p) \in V$, то $u_1(p)|_{r=0} = 0$, а это означает, что $r_1 = 0$. Обозначим $b = r_{N+1}$.

Лемма 2. *Пусть $u(p)$ – собственная функция, соответствующая собственному значению $\lambda_1(p)$ задачи (17). Пусть для некоторых $i \in \mathbb{N}$ выполняется условие*

$$u_1(p)|_r \neq 0, \quad r \in (r_i, r_{i+1}).$$

Тогда для этих же i имеем

$$u_2'(p)|_r \neq 0, \quad r \in (r_i, r_{i+1}). \tag{28}$$

Доказательство. Докажем от противного. Допустим, что соотношение (28) не выполняется. Тогда существует число $\widetilde{r} \in (r_1, r_2)$ такое, что $u_2'(p)|_{\widetilde{r}} = 0$.

Далее аналогично (26) можно доказать, что верно неравенство

$$(1-\nu)a_0 \int\limits_{\widetilde{r}-\delta}^{\widetilde{r}+\delta} \left(r(u_1'(p))^2 + \frac{(u_1(p))^2}{r} \right) dr \leqslant - \int\limits_{\widetilde{r}-\delta}^{\widetilde{r}+\delta} p u_2'(p) u_1(p)\, dr.$$

Разделив это соотношение на 2δ и устремив δ к нулю, получим

$$(1-\nu)a_0 \frac{(u_1(p))^2|_{\widetilde{r}}}{\widetilde{r}} \leqslant \frac{a(u_1(p))^2|_{\widetilde{r}}}{\widetilde{r}} \leqslant -pu_2'(p)u_1(p)|_{\widetilde{r}} = 0.$$

Отсюда имеем $u_1(p)|_{\widetilde{r}} = 0$, что противоречит нашему предположению. Таким образом, соотношение (28) справедливо. Лемма доказана.

Лемма 3. *Предположим, что выполнены условия леммы 2. Тогда существуют одновременно не равные нулю константы d_i, $i \in \mathbb{N}$, такие, что справедливы соотношения*

$$p\widetilde{u}_2'(p)|_r = d_i p u_2'(p)|_r, \quad \widetilde{u}_1(p)|_r = d_i u_1(p)|_r, \quad r \in [r_i, r_{i+1}].$$

Доказательство. Рассмотрим случай $i = 1$. Допустим, что $u_1(p)|_r \neq 0$ для любого $r \in (r_1, r_2)$. На основании леммы 2 также получаем, что $u_2'(p)|_r \neq 0$ для любого $r \in (r_1, r_2)$. Далее из равенства (18) имеем

$$\left.\frac{\widetilde{u}_2'(p)}{u_2'(p)}\right|_r = \left.\frac{\widetilde{u}_1(p)}{u_1(p)}\right|_r =: d_1|_r, \quad r \in (r_1, r_2). \tag{29}$$

Заменив u и v_1 в (19) на $\widetilde{u}(p)$ и v_2^0 соответственно, где

$$v_2^0 = \begin{cases} 0, & r \in (r_1, r_2), \\ d_1 u_1(p)|_r, & r \notin (r_1, r_2), \end{cases}$$

с учётом (29) получим

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \left[ar(d_1 u_1(p))'^2 + (a + \nu a' r) \frac{(d_1 u_1(p))^2}{r} + d_1^2 p u_2'(p) u_1(p) \right] dr = 0. \tag{30}$$

Теперь в соотношении (19) заменим v_2 на v_2^1, где

$$v_2^1 = \begin{cases} 0, & r \in [r_1, r_2], \\ d_1^2 u_1(p)|_r, & r \notin [r_1, r_2], \end{cases}$$

и вычтем полученное равенство из соотношения (30). В результате будем иметь

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} ar(d_1' u_1(p))^2\, dr = 0.$$

Поскольку $u_1(p) \neq 0$ при $r \in (r_1, r_2)$, заключаем, что $(d_1)' = 0$ для $r \in (r_1, r_2)$. Отсюда $d_1(r) \equiv d_1$ для $r \in (r_1, r_2]$. Аналогично можно доказать, что $d_2(r) \equiv d_2$ для любого $r \in (r_2, r_3]$.

Таким образом, для любого $r \in (r_i, r_{i+1})$, $i = 1, 2$, выполняются следующие соотношения:

$$\widetilde{u}_2'(p)|_r = d_i u_2'(p)|_r, \quad \widetilde{u}_1 p|_r = d_i u_1(p)|_r. \tag{31}$$

Теперь докажем это для $r = r_i$, $i = 1, 2$. В силу непрерывности функций $u_1(p)$, $u_2'(p)$ верно следующее:

$$\widetilde{u}_1(p)\Big|_{r_i} = \lim_{r\to r_i} \frac{\widetilde{u}_1(p)}{u_1(p)}\Big|_r \lim_{r\to r_i} u_1(p))\Big|_r = d_i u_1(p)|_{r_i}, \tag{32}$$

$$\widetilde{u}_2'(p)\Big|_{r_i} = \lim_{r\to r_i} \frac{\widetilde{u}_2'(p)}{u_2'(p)}\Big|_r \lim_{r\to r_i} u_2'(p)\Big|_r = d_i u_2'(p)|_{r_i}. \tag{33}$$

Из соотношений (31)–(33) получаем, что при $i = 1, 2$ верны равенства

$$\widetilde{u}_2'(p)|_r = d_i u_2'(p)|_r, \quad \widetilde{u}_1(p)|_r = d_i u_1(p)|_r$$

для любого $r \in (r_i, r_{i+1}]$. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть $u(p)$, $\widetilde{u}(p)$ – функции из формулировки леммы 1. Тогда существуют константы c_1, c_2 такие, что $|c_1| + |c_2| \neq 0$ и*

$$\hat{u}_1(p)|_{r_i} = 0, \quad \hat{u}_2(p)|_{r_i} = 0, \quad \hat{u}_2'(p)|_{r_i} = 0, \quad i \in \mathbb{N},$$

$\hat{u}(p) = c_1 u(p) + c_2 \widetilde{u}(p)$. *Кроме того, число нулей N функции $u_1(p)$ на отрезке $[0, b]$ не превосходит кратности m собственного значения $\lambda_1(p)$, т.е. $N \leqslant m$.*

Доказательство. Из соотношения (17) при $v = (0, v_2)^{\mathrm{т}}$ имеем

$$\int\limits_0^b \left[rDu_2''v_2'' + (D - \nu D'r)\frac{u_2'v_2'}{r} - pu_1v_2'\right]dr = \lambda_1(p)\int\limits_0^b rtu_2v_2\,dr, \quad v \in V. \tag{34}$$

Пусть $\overline{r}$ – любая точка из интервала $(0, b)$. Построим функцию

$$\overline{z} = \begin{cases} u_2(p)|_r, & r \in [0, \overline{r}],\\ [(2(r-\overline{r})/\delta + 1)u_2(p)|_{\overline{r}} + (r-\overline{r})u_2'(p)|_{\overline{r}}]((\overline{r}+\delta-r)/\delta)^2, & r \in (\overline{r}, \overline{r}+\delta],\\ 0, & r \in (\overline{r}+\delta, b]. \end{cases}$$

Заметим, что она непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, b]$ и $\overline{z}|_b = \overline{z}'|_b = 0$.

Далее в соотношении (34) заменим v на $\overline{z}$ и u на $u(p)$. Устремив δ к нулю в полученном соотношении, получим

$$\int\limits_0^{\overline{r}} \left[rD(u_2''(p))^2 + (D - \nu D'r)\frac{(u_2'(p))^2}{r} - pu_2'(p)u_1(p)\right]dr = \lambda_1(p)\int\limits_0^{\overline{r}} rt(u_2(p))^2\,dr, \quad \overline{r} \in (0, b].$$

Теперь зафиксируем произвольное $i = i_0 \in \mathbb{N}$. Можно найти константы c_1, c_2 такие, что $|c_1| + |c_2| \neq 0$ и $\hat{u}_2(p)|_{r_{i_0}} = (c_1u_2(p) + c_2\widetilde{u}_2(p))|_{r_{i_0}} = 0$. У нас также $\hat{u}_1(p)|_{r_{i_0}} = c_1u_1(p)|_{r_{i_0}} + c_2\widetilde{u}_1(p)|_{r_{i_0}} = 0$.

Далее, вычитая соотношение (34) при $\overline{r} = r_{i_0} - \delta$ из того же самого соотношения при $\overline{r} = r_{i_0} + \delta$ и заменяя $u(p)$ на $\hat{u}(p)$, получаем

$$\int\limits_{r_{i_0}-\delta}^{r_{i_0}+\delta} \left[rD(\hat{u}_2''(p))^2 + (D - \nu D'r)\frac{(\hat{u}_2'(p))^2}{r} - p\hat{u}_1(p)\hat{u}_2'(p)\right]dr = \lambda_1(p)\int\limits_{r_{i_0}-\delta}^{r_{i_0}+\delta} rt(\hat{u}_2(p))^2\,dr.$$

Разделив это равенство на 2δ и устремив δ к нулю, будем иметь

$$r_{i_0}D(\hat{u}_2''(p))^2|_{r_{i_0}} + D_{10}\frac{(\hat{u}_2'(p))^2|_{r_{i_0}}}{r_{i_0}} = p\hat{u}_1(p)\hat{u}_2'(p)|_{r_{i_0}} + \lambda_1(p)(\hat{u}_2(p))^2|_{r_{i_0}}. \tag{35}$$

Отсюда в силу $\hat{u}_1(p)|_{r_{i_0}} = \hat{u}_2(p)|_{r_{i_0}} = 0$ заключаем, что $\hat{u}_2'(p)|_{r_{i_0}} = 0$. Таким образом, имеем $\hat{u}_1(p)|_{r_i} = \hat{u}_2(p)|_{r_i} = \hat{u}_2'(p)|_{r_i} = 0$, $i \in \mathbb{N}$.

Покажем, что $N \leqslant m$. Сделаем это для $m = 2$. Докажем от противного, предположив, что $N = 3$. Тогда можно построить три собственные функции $u^i(p)$, $i = 1, 2, 3$, соответствующие собственному значению $\lambda_1(p)$:

$$u^i(p) = \begin{cases} \hat{u}(p), & r \in (r_i, r_{i+1}), \\ 0, & r \notin (r_i, r_{i+1}), \end{cases}$$

причём по доказанному выше функции $u_1^i(p)$, $i = 1, 2, 3$, непрерывны, а функции $u_2^i(p)$, $i = 1, 2, 3$, непрерывно дифференцируемы. А это противоречит нашему предположению. Отсюда заключаем, что $N \leqslant 2$.

В общем случае таким же образом можно доказать, что число нулей функции $u_1(p)$ не превосходит кратности $\lambda_1(p)$, т.е. m. Следствие доказано.

4. Некоторые известные и вспомогательные результаты. Теперь изучим дифференциальные свойства функционала $\lambda_1(p)$ – минимального собственного значения задачи

$$B(u, v; p) = \lambda \langle rtu_2, v_2 \rangle_{L_2}, \quad v \in V.$$

Далее нам понадобятся следующие две леммы из статьи [22].

Лемма 4. *Пусть $\mu = \mu(p)$ – собственное число оператора $F_1(p)$ кратности m, а Γ – окружность с центром в точке μ, причём окружность принадлежит множеству регулярных точек и не содержит других точек спектра оператора $F_1(p)$.*

Для каждого $0 < \|\delta p\|_{L_2} \leqslant 1$ пусть $\mu_1(p + \delta p)$, $\ldots$, $\mu_m(p + \delta p)$, $\ldots$ представляет собой последовательность собственных значений оператора $F_1(p + \delta p)$. Тогда существует такое число $h_0 > 0$, что для каждого $0 < \|\delta p\|_{L_2} \leqslant h_0$ определены операторы

$$E(\mu(p)) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} R_z(F_1(p))\, dz, \quad E(\mu(p + \delta p)) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} R_z(F_1(p + \delta p))\, dz, \tag{36}$$

где $R_z(F_1) = (F_1 - zE)^{-1}$ – проекторы. Областью значений $E(\mu(p))$ и $R(E(\mu(p)))$ является пространство собственных функций $F_1(p)$, соответствующих числу $\mu(p)$, а $R(E(\mu(p+\delta p)))$ есть прямая сумма пространств собственных функций оператора $F_1(p+\delta p)$, соответствующих собственным значениям $\mu_1(p + \delta p)$, $\mu_2(p + \delta p)$, $\ldots$, $\mu_m(p + \delta p)$. Более того,

$$\dim R(E(\mu(p))) = \dim R(E(\mu(p + \delta p))) = m.$$

В дальнейшем мы будем использовать непрерывную зависимость оператора $G(p)$ от $p(r)$. Пусть $G(p)$ – оператор G, а $G(\psi; p)$ – это $G\psi$, соответствующий управлению $p(r)$, т.е.

$$B(G(\psi; p), v; p) = \langle \sqrt{rt}\, \psi, v_2 \rangle_{L_2}, \quad v \in V. \tag{37}$$

Ниже приведён результат из работы [23], показывающий, что при определённых условиях на коэффициенты имеем липшицеву непрерывность операторов $G(p)$, $F_1(p)$.

Лемма 5. *Пусть $\mu_1(p+\delta p)$, $\ldots$, $\mu_m(p+\delta p)$ такие же, как в лемме 4. Тогда существуют положительные константы M_2 и h_0 такие, что для любых $\|\delta p\|_{L_2} \leqslant h_0$ выполняются следующие условия:*

1) у оператора $F_1(p + \delta p)$ имеются ровно m собственных значений $\mu_1(p + \delta p)$, $\ldots$ $\ldots$, $\mu_m(p + \delta p)$, лежащих внутри круга $\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - \mu_1(p)| = h_0\}$;

2) для любого базиса $\{\varphi_i(p)\}_{i=1}^m$ из $R(E(\mu(p)))$ существует базис $\{\chi_i(p + \delta p)\}_{i=1}^m$ из области $R(E(\mu(p + \delta p)))$ такой, что

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant m} \|\varphi_j(p) - \chi_j(p + \delta p)\|_{L_2} \leqslant M_2 \|E(\mu(p)) - E(\mu(p + \delta p))\|_{L_2}.$$

Как показано в [23, лемма 6.1], справедливо следующее неравенство:

$$\|[E(\mu(p)) - E(\mu(p+\delta p))]\psi\|_{L_2} \leqslant M\|F_1(p) - F_1(p+\delta p)\|_{L_2,L_2}\|\psi\|_{L_2}.$$

Из леммы 5 следует, что кратность n собственного значения $\mu_1(p+\delta p)$ не превосходит кратности $\mu_1(p)$, т.е. m.

Лемма 6. *Допустим, что функции* $D(r)$, $a(r)$, $t(r)$ *удовлетворяют условиям 1)–3). Пусть* $\delta p(r) \in S = \{p : p \in L_1[0,b]\}$. *Тогда существуют такие положительные константы* M_1, M_2, *что для любых* δp *выполняется следующее неравенство:*

$$\|G(\psi; p+\delta p) - G(\psi; p)\|_{\widetilde{H}^2\times\widetilde{H}^1} \leqslant M_1\|\delta p\|_{L_1}\|\psi\|_{L_1}.$$

Таким образом, получаем

$$\|G(p+\delta p) - G(p)\|_{L_2,\widetilde{H}^2\times\widetilde{H}^1} \leqslant M_1\|\delta p\|_{L_1} \tag{38}$$

и

$$\|F_1(p+\delta p) - F_1(p)\|_{L_2,L_2} \leqslant M_1\|\sqrt{rt}\|_{L_\infty}\|\delta p\|_{L_1} = M_2\|\delta p\|_{L_2}.$$

Отметим, что в [23] мы доказываем липшицеву непрерывность решений задачи на собственные значения (17).

Следующая теорема имеет решающее значение для нашего исследования. Ею будем пользоваться для обоснования дифференцируемости по Фреше функционала $\lambda_1(p)$ и его градиентной формулы.

Теорема 3. *Допустим, что функции* $D(r)$, $a(r)$, $t(r)$ *удовлетворяют условиям 1)–3) и* $p \in L_2[0,b]$. *Пусть* $\lambda_1(p)$ *– минимальное собственное значение задачи (17), а* S_1 *является подпространством собственных функций, соответствующих собственному значению* $\lambda_1(p)$. *Тогда* $\dim S_1 = 1$.

Доказательство. От противного предположим, что $\dim S_1 = 2$, а $u(p)$ и $\widetilde{u}(p)$ – две линейно независимые собственные функции, соответствующие собственному значению $\lambda_1(p)$ задачи (17). Рассмотрим функцию $p_0(r) \in C^1[0,b]$ такую, что

$$p_0(r) > 0, \quad r \in (0,b]. \tag{39}$$

Далее пусть $w(p_0) = (w_1(p_0), w_2(p_0))$ – собственная функция, соответствующая собственному значению $\lambda_1(p_0)$ задачи (17) при p_0. Докажем, что $w_1(p_0)|_r$ тождественно не равняется нулю. От противного предположим, что $w_1(p_0)|_r \equiv 0$. Тогда из соотношения (20) с $u = w(p_0)$ и $p = p_0$ имеем

$$\int\limits_0^b p_0 w_2'(p_0)v_1\,dr = 0, \quad v \in V.$$

Поскольку $p_0 w_2'(p_0) \in \widetilde{H}^1$, то, подставив $v_1 = p_0 w_2'(p_0)$, получаем $p_0 w_2'(p_0) \equiv 0$. А это с учётом условия (39) равносильно следующему: $w_2'(p_0) \equiv 0$.

Но тогда в силу краевого условия $w_2(p_0)|_b = 0$ заключаем, что $w_2(p_0) \equiv 0$. Таким образом, $w(p_0) = (w_1(p_0), w_2(p_0)) \equiv 0$. Полученное противоречие доказывает, что $w_2(p_0)$ тождественно не равняется нулю.

Построим собственную функцию

$$z(p) := (\widetilde{u}(p) - d_1 u(p))/(d_2 - d_1).$$

Согласно лемме 3 она имеет следующий вид:

$$z(p) = \begin{cases} 0, & r \in [r_1, r_2], \\ u(p), & r \in [r_2, r_3]. \end{cases}$$

Отсюда, в частности, вытекает, что $u(p)|_r \neq 0$ для любого $r \in (r_2, r_3)$. В противном случае существовала бы точка $\overline{r} \in (r_2, r_3)$ такая, что $u(p_0)|_{\overline{r}} = 0$. Но тогда можно построить три собственные функции $u(p)$, $\widetilde{z}(p)$, $\overline{z}(p)$, соответствующие собственному значению $\lambda_1(p)$, где

$$\widetilde{z}(p) = \begin{cases} u(p), & r \in [r_2, \overline{r}], \\ 0, & r \notin [r_2, \overline{r}], \end{cases} \quad \overline{z}(p) = \begin{cases} u(p), & r \in [\overline{r}, r_3], \\ 0, & r \notin [\overline{r}, r_3], \end{cases}$$

а это противоречит нашему предположению.

Далее, в силу непрерывности функции $w_1(p_0)$ существуют числа $\delta > 0$ и $r_1 + \delta < r_2$ такие, что

$$w_1(p_0)|_r \neq 0, \quad r \in (r_2, r_2 + \delta). \tag{40}$$

Аналогично равенству (20) можно доказать, что п.в. на $(0, b)$ выполняется соотношение

$$[p_0 w_2'(p_0) u_1(p) - p u_2'(p) w_1(p_0)]|_r = 0.$$

Тогда с учётом (40) получим

$$\left.\frac{p_0 w_2'(p_0)}{w_1(p_0)}\right|_r = \left.\frac{p u_2'(p)}{u_1(p)}\right|_r, \quad r \in (r_2, r_2 + \delta).$$

Обозначив $p_0 w_2'(p_0)/w_1(p_0)|_r =: c|_r$, отсюда имеем

$$p u_2'(p)|_r = c u_1(p)|_r, \quad r \in [r_2, r_2 + \delta). \tag{41}$$

Далее, вычитая соотношение (24) при $\overline{r} = r_2$ из того же соотношения при $\overline{r} = r_2 + \delta$, с учётом (41) получаем равенство

$$\int\limits_{r_2}^{r_2+\delta} \left[ar(u_1(p))'^2 + (a + \nu a' r)\frac{(u_1(p))^2}{r} \right] dr = -\int\limits_{r_2}^{r_2+\delta} c(u_1(p))^2\, dr.$$

Интегрируя его по частям, имеем

$$\int\limits_{r_2}^{r_2+\delta} \left[ar(u_1'(p))^2 + a\frac{(u_1(p))^2}{r} - 2a\nu u_1'(p) u_1(p) \right] dr + \nu a (u_1(p))^2|_{r_2}^{r_2+\delta} = -\int\limits_{r_2}^{r_2+\delta} c(u_1(p))^2\, dr. \tag{42}$$

Оценим правую часть этого соотношения. Так как

$$u_1(p)|_r = \int\limits_{r_2}^{r} u_1'(p)|_\xi\, d\xi,$$

то заключаем, что

$$(u_1(p))^2|_r \leqslant \frac{\delta}{r_2} \int\limits_{r_2}^{r_2+\delta} r(u_1'(p))^2|_r\, dr$$

для любого $r \in [r_2, r_2 + \delta]$.

Но тогда в силу непрерывности функции $c|_r$, равенства (42) и условий $a(r) \geqslant a_0$, $\nu \leqslant 1$ получим

$$\int\limits_{r_2}^{r_2+\delta} \left[r u_1'(p)^2 + \frac{(u_1(p))^2}{r} \right] dr \leqslant M\delta^2 \int\limits_{r_2}^{r_2+\delta} r(u_1'(p))^2\, dr, \tag{43}$$

где

$$M = \frac{M_1}{(1-\nu)a_0 r_2}, \quad M_1 = \max_{[r_2, r_2+\delta]} |c|.$$

Выберем δ_0 такое, что $M\delta_0^2 < 1/2$. Тогда из (43) следует неравенство

$$\int\limits_{r_2}^{r_2+\delta} \left[r(u_1'(p))^2 + \frac{(u_1(p))^2}{r} \right] dr \leqslant 0.$$

Отсюда заключаем, что $u_1(p)|_r \equiv 0$ для любого $r \in [r_2, r_2+\delta_0]$.

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

5. Дифференцируемость по Фреше частотного функционала. Теперь мы можем сформулировать и доказать дифференцируемость по Фреше функционала $\lambda_1(p)$.

Теорема 4. *Пусть $\lambda_1(p)$ – минимальное собственное значение задачи (17). Тогда его производная по Фреше существует в гильбертовом пространстве $L_2[0,b]$ и равна*

$$\frac{d\lambda_1(p)}{dp} = \frac{-2u_2'(p)u_1(p)}{\langle rtu_2(p), u_2(p)\rangle_{L_2}},$$

где $u(p) = (u_1(p), u_2(p))$ – любая ненулевая функция из подпространства S_1 (см. формулировку теоремы 3).

Доказательство. С учётом свойств собственных значений компактных самосопряжённых операторов и в силу однократности $\mu_1(p)$ [21, с. 248] получаем

$$\mu_1(p) = \max_{\substack{\psi\neq 0\\ \psi\in L_2}} \frac{\langle F_1(p)\psi, \psi\rangle_{L_2}}{\langle \psi, \psi\rangle_{L_2}} = \frac{\langle F_1(p)\varphi(p), \varphi(p)\rangle_{L_2}}{\langle \varphi(p), \varphi(p)\rangle_{L_2}},$$

где $\varphi(p)$ – единственная собственная функция, соответствующая собственному числу $\mu_1(p)$.

Следовательно, учитывая это соотношение, имеем

$$\mu_1(p+\delta p) - \mu_1(p) =$$

$$= \max_{\substack{\psi\neq 0\\ \psi\in L_2}} \frac{\langle F_1(p+\delta p)\psi, \psi\rangle_{L_2}}{\langle \psi, \psi\rangle_{L_2}} - \frac{\langle F_1(p)\varphi(p), \varphi(p)\rangle_{L_2}}{\langle \varphi(p), \varphi(p)\rangle_{L_2}} \geqslant \frac{\langle (F_1(p+\delta p) - F_1(p))\varphi(p), \varphi(p)\rangle_{L_2}}{\langle \varphi(p), \varphi(p)\rangle_{L_2}} \tag{44}$$

для всех δp, для которых $\|\delta p\|_{L_1} < +\infty$. Подставим $v = (0, v_2)^{\mathrm{т}}$ и $v = (-v_1, 0)^{\mathrm{т}}$ в (37). Сложив полученные равенства, получим

$$K(G\psi, v; p) = (\sqrt{rt}\,\psi, v_2)_{L_2}, \quad v \in V, \tag{45}$$

где

$$K(u, v; p) = \int\limits_0^b \left[rDu_2''v_2'' + (D - \nu D'r)\frac{u_2'v_2'}{r} - pu_1v_2' - \right.$$

$$\left. - aru_1'v_1' - (a + \nu a'r)\frac{u_1v_1}{r} - pu_2'v_1 \right] dr + a\nu u_1v_1|_0^b, \quad u, v \in V,$$

является симметричной билинейной формой. Далее имеем

$$K((G(p+\delta p) - G(p))\varphi(p), v; p) = K(G(p+\delta p)\varphi(p), v; p) - K(G(p+\delta p)\varphi(p), v; p+\delta p) =$$

$$= \delta p[(G(p+\delta p)\varphi(p))_1 v_2' + (G(p+\delta p)\varphi(p))_2' v_1]\, dr, \quad v \in V.$$

Отсюда и из соотношения (45) при $v = G(p)\varphi(p)$ находим

$$\int\limits_0^b \delta p[(G(p+\delta p)\varphi(p))_1(G(p)\varphi(p))_2' + (G(p+\delta p)\varphi(p))_2'(G(p)\varphi(p))_1]\,dr =$$

$$= \langle (F_1(p+\delta p) - F_1(p))\varphi(p), \varphi(p)\rangle_{L_2}. \tag{46}$$

Тогда, преобразовав левую часть равенства (46) с помощью оценок (13), (15) и (38) для всех δp, $\|\delta p\|_{L_1} < h_1$, получим

$$\langle (F_1(p+\delta p) - F_1(p))\varphi(p), \varphi(p)\rangle_{L_2} \geqslant 2\int\limits_0^b \delta p (G(p)\varphi(p))_2'(G(p)\varphi(p))_1\,dr - M_3\|\delta p\|_{L_1}^2\|\varphi(p)\|_{L_2}^2, \tag{47}$$

где $M_3 = 2M_1c_1c_2c_3\|\sqrt{rt}\|_{L_\infty}$.

Наша следующая цель – получить верхнюю оценку, аналогичную (47). В связи с этим для всех δp, $\|\delta p\|_{L_1} < h_1$, имеем

$$\mu_1(p+\delta p) - \mu_1(p) = \frac{\langle F_1(p+\delta p)\psi(p+\delta p), \psi(p+\delta p)\rangle_{L_2}}{\langle \psi(p+\delta p), \psi(p+\delta p)\rangle_{L_2}} - \frac{\langle F_1(p)\varphi(p), \varphi(p)\rangle_{L_2}}{\langle \varphi(p), \varphi(p)\rangle_{L_2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\langle \psi(p+\delta p), \psi(p+\delta p)\rangle_{L_2}} \int\limits_0^b \delta p (G(p)\psi(p+\delta p))_2'(G(p)\psi(p+\delta p))_1\,dr + M_3\|\delta p\|_{L_1}^2, \tag{48}$$

где $\psi(p+\delta p)$ – единственная собственная функция оператора $F_1(p+\delta p)$, соответствующая собственному числу $\mu_1(p+\delta p)$.

Напомним, что согласно лемме 5 (см. п. 2) при $m = 1$ для собственной функции $\varphi(p)$ оператора $F_1(p)$ существует собственная функция $\psi(p+\delta p)$ оператора $F_1(p+\delta p)$ такая, что

$$\|\varphi(p) - \psi(p+\delta p)\|_{L_2} \leqslant M_2\|F_1(p+\delta p) - F_1(p)\|_{L_2,L_2}$$

для всех $\delta p \in L_2[0,b]$, $\|\delta p\|_{L_2} \leqslant h_1$. Далее с помощью этой оценки и соотношения (48) при $\psi = \psi(p+\delta p) - \varphi(p)$ имеем

$$\frac{2}{\langle \psi(p+\delta p), \psi(p+\delta p)\rangle_{L_2}} \int\limits_0^b \delta p (G(p)\psi(p+\delta p))_2'(G(p)\psi(p+\delta p))_1\,dr -$$

$$- \frac{2}{\langle \varphi(p), \varphi(p)\rangle_{L_2}} \int\limits_0^b \delta p (G(p)\varphi(p))_2'(G(p)\varphi(p))_1\,dr \leqslant M_4\|\delta p\|_{L_1}^2$$

для любого δp, $\|\delta p\|_{L_1} < h_1$, где $M_4 = 2MM_2M_1c_1^2c_2c_3\|(rt)^{3/2}\|_{L_\infty}$.

Следовательно, с учётом соотношений (44), (47) и (48) получаем неравенства

$$\frac{1}{\langle \varphi(p), \varphi(p)\rangle_{L_2}} \int\limits_0^b 2\delta p (G(p)\varphi(p))_2'(G(p)\varphi(p))_1\,dr - M_3\|\delta p\|_{L_1}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \mu_1(p+\delta p) - \mu_1(p) \leqslant \frac{1}{\langle \varphi(p), \varphi(p)\rangle_{L_2}} \int\limits_0^b 2\delta p (G(p)\varphi(p))_2'(G(p)\varphi(p))_1\,dr + (M_3 + M_4)\|\delta p\|_{L_1}^2$$

для всех δp, для которых $\|\delta p\|_{L_1} < h_1$.

Как непосредственное следствие этого, запишем представление

$$\left\langle \frac{d\mu_1(p)}{dp}, \delta p \right\rangle_{L_2} = \frac{1}{\langle \varphi(p), \varphi(p)\rangle_{L_2}} \int\limits_0^b 2\delta p (G(p)\varphi(p))_2' (G(p)\varphi(p))_1 \, dr. \tag{49}$$

Далее с помощью соотношения

$$\left\langle \frac{d\lambda_1(p)}{dp}, \delta p \right\rangle_{L_2} = -\frac{1}{(\mu_1(p))^2} \left\langle \frac{d\mu_1(p)}{dp}, \delta p \right\rangle_{L_2}$$

с учётом (49) получим формулу градиента функционала $\lambda_1(p)$ в гильбертовом пространстве $L_2[0,b]$:

$$\left\langle \frac{d\lambda_1(p)}{dp}, \delta p \right\rangle_{L_2} = -\frac{2}{\langle rtu_2(p), u_2(p)\rangle_{L_2}} \int\limits_0^b \delta p u_2'(p) u_1(p) \, dr.$$

Это завершает доказательство теоремы.

6. Условия оптимальности. Приведём условия оптимальности для задачи оптимизации (1)–(7), (9), (10). Рассмотрим следующую оптимальную задачу с переменной p в банаховом пространстве $X = L_2[0,b]$:

$$\mathcal{B}_0(p(\cdot)) = J(p) = \int\limits_0^b 2\pi r t \sqrt{1+p^2}\, dr \to \inf, \tag{50}$$

$$F(p(\cdot)) = \lambda_1(p) = \omega^2(f') = \omega_0^2, \tag{51}$$

где ω_0^2 является фиксированным числом, а $\lambda_1(p)$ – минимальное собственное значение следующей задачи:

$$B(u,v;p) = \lambda \langle rtu_2, v_2\rangle_{L_2}, \quad v \in V. \tag{52}$$

Построим функцию Лагранжа для задачи (50)–(52):

$$\mathcal{L}(p(\cdot), \alpha_0, \alpha_1) = \alpha_0 J(p) + \alpha_1 F(p).$$

Справедлива следующая

Теорема 5. *Предположим, что функции $D(r)$, $a(r)$, $t(r)$ удовлетворяют условиям 1)–3) и $p_*(r)$ является точкой локального минимума в задаче (50)–(52). Пусть $\lambda_1(p_*)$ – минимальное собственное значение задачи (52), а $u(p_*)$ – соответствующая собственная функция. Тогда существует константа α такая, что*

$$\frac{\pi r t p_*}{\sqrt{1+p_*^2}} - \alpha \frac{u_2'(p_*) u_1(p_*)}{\langle rtu_2(p_*), u_2(p_*)\rangle_{L_2}} = 0.$$

Доказательство. Ранее мы установили, что функционал $F(p)$ имеет градиент

$$F'(p) = -\frac{2u_2'(p)u_1(p)}{\langle rtu_2(p), u_2(p)\rangle_{L_2}}, \quad p \in L_2[0,b].$$

Нетрудно установить, что функционал $\mathcal{B}_0(p)$ тоже имеет градиент

$$\mathcal{B}_0'(p) = \frac{2\pi r t p}{\sqrt{1+p^2}}, \quad p \in L_2[0,b].$$

Докажем, что образ $\operatorname{Im} F'(p)$ является замкнутым множеством, более того,

$$\operatorname{Im} F'(p_*)X = \mathbb{R}.$$

Возможны два случая:
(i) $u_2'(p_*)u_1(p_*) \equiv 0$ для любого $r \in [0, b]$;
(ii) существует точка $c \in (0, b]$ такая, что

$$\int\limits_0^c 2u_2'(p_*)u_1(p_*)\,dr \neq 0.$$

В случае (i) докажем, что $u(p_*) \equiv 0$. Действительно, из соотношения (19) с $p = p_*$, $u = u(p_*)$ получим равенство

$$\int\limits_0^b \left[aru_1'(p_*)v_1' + (a + \nu a'r)\frac{u_1(p_*)v_1}{r} + p_*u_2'(p_*)v_1\right] dr - a\nu u_1(p_*)v_1|_0^b = 0, \quad v \in V. \tag{53}$$

Далее подставим в (53) $v_1 = u_1(p_*)$. Используя соотношение (i) и положительную определённость билинейной формы $B(u, v)$, получаем $u_1(p_*) \equiv 0$. Теперь из соотношения (53) имеем

$$\int\limits_0^b p_*u_2'(p_*)v_1\,dr = 0, \quad v \in V. \tag{54}$$

Пусть $\overline{r} \in (0, b)$ – произвольная точка. Возьмём любую функцию $z = (z_1, z_2) \in \widetilde{H}^1 \times \widetilde{H}^2$ и построим функцию

$$v_1 = \begin{cases} z_1|_r, & r \in [0, \overline{r}],\\ z_1|_{\overline{r}}(\overline{r} + \delta - r)/\delta, & r \in (\overline{r}, \overline{r} + \delta],\\ 0, & r \in (\overline{r} + \delta, b]. \end{cases}$$

Подставив её в (54), разделив полученное соотношение на 2δ и устремив δ к нулю, получим $\int_0^{\overline{r}} p_*u_2'(p_*)z_1\,dr = 0$. Отсюда при $z_1 = u_2'(p_*) \in \widetilde{H}^1$ получим $\int_0^{\overline{r}} p_*(u_2'(p_*))^2\,dr = 0$ для любого $\overline{r} \in (0, b)$. Но тогда п.в. на $[0, b]$ будем иметь $p_*u_2'(p_*)|_r = 0$. Поскольку $p_*(r)$ тождественно не равняется нулю, то существует точка $\widetilde{r} \in (0, b)$ такая, что

$$u_2'(p_*)|_{\widetilde{r}} = 0. \tag{55}$$

Далее в силу того, что $u(p_*) \in V$, запишем равенство

$$\int\limits_0^b u_2''(p_*)v_2\,dr = -\int\limits_0^b u_2'(p_*)v_2'\,dr, \quad v_2 \in H^1.$$

Теперь выполним указанную выше операцию с заменой v_1 на функцию

$$v_2 = \begin{cases} u_2(p_*)|_r, & r \in [0, \overline{r}],\\ u_2(p_*)|_{\overline{r}}(\overline{r} + \delta - r)/\delta, & r \in (\overline{r}, \overline{r} + \delta],\\ 0, & r \in (\overline{r} + \delta, b]. \end{cases}$$

В результате получим

$$\int\limits_0^{\overline{r}} u_2''(p_*)u_2(p_*)\,dr = -\int\limits_0^{\overline{r}} (u_2'(p_*))^2\,dr, \quad \overline{r} \in [0, b].$$

Это равносильно следующему: $u_2''(p_*)u_2(p_*)|_{\overline{r}} = (u_2'(p_*))^2|_{\overline{r}}$ для любого $\overline{r} \in (0,b)$. Отсюда и в силу (55) заключаем, что

$$u_2''(p_*)u(p_*)|_{\widetilde{r}} = (u_2'(p_*))^2|_{\widetilde{r}} = 0.$$

Тогда в силу соотношения (35) при $r_{i_0} = \widetilde{r}$, $\hat{u}(p_*) = u(p)$ имеют место равенства

$$u_2(p_*)|_{\widetilde{r}} = u_2'(p_*)|_{\widetilde{r}} = 0.$$

Но это невозможно, иначе можно построить две собственные функции

$$u^1(p_*) = \begin{cases} u(p_*)|_r, & r \in (0,\widetilde{r}), \\ 0, & r \notin (0,\widetilde{r}), \end{cases} \quad u^2(p_*) = \begin{cases} 0, & r \in (0,\widetilde{r}), \\ u(p_*), & r \notin (0,\widetilde{r}), \end{cases}$$

соответствующие собственному значению $\lambda_1(p_*)$, а это противоречит однократности $\lambda_1(p_*)$, полученной нами в теореме 3.

Теперь докажем, что во втором случае следующее уравнение

$$\int\limits_0^b \frac{-2u_1'(p_*)u_2(p_*)}{\langle rtu_1(p_*), u_1(p_*)\rangle_{L_2}}\, x\, dr = q \tag{56}$$

имеет решение $x = x(r)$ для любого $q \in \mathbb{R}$.

Действительно, легко проверить, что

$$x(r) = \begin{cases} q\left(\int\limits_0^c \dfrac{-2u_1'(p_*)u_2(p_*)|_\tau}{\langle rtu_1(p_*), u_1(p_*)\rangle_{L_2}}\, d\tau\right)^{-1}, & 0 \leqslant r \leqslant c, \\ 0, & c < r \leqslant b. \end{cases}$$

Следовательно, согласно (56) имеем

$$\operatorname{Im} F'(p_*)X = \mathbb{R}.$$

Получили, что образ $\operatorname{Im} F'(p_*)$ совпадает с $\mathbb{R}$. Тем самым выполнено условие регулярности отображения F. Отсюда вытекает, что $\alpha_0 = 1$.

С учётом правила множителей Лагранжа [24] доказательство теоремы завершено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lagrange J.L.* Sur la figure des colonnes // Miscellanea Taurinensia. 1770–1773. V. 5.
2. *Arabyan M.H.* Boundary-value problems and associated eigen-value problems for systems describing vibrations of a rotation shell // New York J. of Math. 2019. V. 25. P. 1350–1367.
3. *Plaut R.H., Johnson L.W., Parbery R.* Optimal forms of shallow shells with circular boundary. Part 1. Maximum fundamental frequency // ASME J. of Appl. Mech. 1984. V. 51. № 3. P. 526–530.
4. *Plaut R.H., Johnson L.W.* Optimal forms of shallow shells with circular boundary. Part 2. Maximum buckling load // ASME J. of Appl. Mech. 1984. V. 51. № 3. P. 531–535.
5. *Plaut R.H., Johnson L.W.* Optimal forms of shallow shells with circular boundary. Part 3. Maximum enclosed volume // ASME J. of Appl. Mech. 1984. V. 51. № 3. P. 536–539.
6. *Abdulla U.G., Cosgrove E., Goldfarb J.* On the Frechet differentiability in optimal control of coeffients in parabolic free boundary problems // Evolution Equat. and Control Theory. 2017. V. 6. № 3. P. 319–344.
7. *Bucur D., Buttazzo G.* Variational Methods in Shape Optimization Problems. Boston, 2005.
8. *He Y., Guo B.Z.* The existence of optimal solution for a shape optimization problem on starlike domain // J. Optim. Theory and Appl. 2012. V. 152. P. 21–30.
9. *Hinton E., Sienz J., Ozakca M.* Analysis and Optimization of Shells of Revolution and Prismatic Shells. London, 2003.

10. *Krivoshapko S.* Optimal shells of revolution and main optimization // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 3. С. 201–209.
11. *Lellep J., Hein H.* Optimization of clamped plastic shallow shells subjected to initial impulsive loading // Eng. Optim. 2002. V. 34. № 5. P. 545–556.
12. *Neittaanmaki P., Sprekels J., Tiba D.* Optimization of Elliptic Systems. New York, 2006.
13. *Olhoff N., Plaut R.H.* Bimodal optimization of vibrating shallow arches // Int. J. of Solids and Struct. 1983. V. 19. № 6. P. 553–570.
14. *Stupishin L.Yu., Kolesnikov A.G., Nikitin K.E.* Optimal design of flexible shallow shells on elastic foundation // J. of Appl. Eng. Sci. 2017. V. 15. № 3. P. 345–349.
15. *Velichkov B.* Existence and Regularity Results for Some Shape Optimization Problems. Springer, 2015.
16. *Wang G., Wang L., Yang D.* Shape optimization of an elliptic equation in an exterior domain // SIAM J. Control Optim. 2006. V. 45. № 2. P. 532–547.
17. *Ozakca M., Gogus M.T.* Structural analysis and optimization of bells using finite elements // J. New Music Res. 2004. V. 33. № 1. P. 61–69.
18. *Григолюк Э.И.* Нелинейные колебания и устойчивость пологих стержней и оболочек // Изв. АН СССР. Отдел техн. наук. 1955. № 3. С. 33–68.
19. *Timoshenko S., Woinorowsky-Krieger. S.* Theory of Plates and Shells. New York, 1959.
20. *Timoshenko S.* Strength of Materials. Part 2. Advanced Theory and Problems. New York, 1976.
21. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1976.
22. *Bramble J.H., Osborn J.E.* Rate of convergence estimates for nonselfadjoint approximations // Math. Comput. 1973. V. 27. P. 525–549.
23. *Arabyan M.H.* On the existence of solutions of two optimization problems // J. of Optim. Theory and Appl. 2018. V. 177. P. 291–315.
24. *Алекеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М., 1979.

Ереванский государственный университет,
Армения

Поступила в редакцию 26.01.2023 г.
После доработки 01.08.2023 г.
Принята к публикации 21.08.2023 г.