ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 9, с. 1283–1296

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.1+517.922+517.911.5

О ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕЯВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2023 г. Е. С. Жуковский, И. Д. Серова

Рассматривается дифференциальное включение $F(t,x,\dot{x}) \ni 0$ с ограничением на производную искомой функции $\dot{x}(t) \in B(t)$, $t \in [a,b]$, где F, B – многозначные отображения, $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^k$ суперпозиционно измеримо, $B : [a,b] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ измеримо. В терминах свойств упорядоченного накрывания и монотонности многозначных отображений, действующих в конечномерных пространствах, для задачи Коши получены условия существования и оценки решений, условия существования решения с наименьшей производной. На основе этих результатов исследуется управляемая система вида $f(t,x,\dot{x},u) = 0$, $\dot{x}(t) \in B(t)$, $u(t) \in U(t,x,\dot{x})$, $t \in [a,b]$.

DOI: 10.31857/S0374064123090121, EDN: WPGAZA

Введение. В статье рассматривается управляемая система не разрешённых относительно производной (неявных) нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Многие классические методы исследования “явных” управляемых систем, в частности, использующие редукцию к дифференциальному включению и после аппарат многозначного анализа (подробнее см. [1, 2]), к таким “неявным” системам непосредственно применить не удаётся. Кроме того, порождающие уравнения функции в данной статье не предполагаются непрерывными, и тем более гладкими (это вполне естественно для задач управления), что не позволяет использовать для исследования рассматриваемых управляемых систем известные результаты (см. [3–5]) теории неявных дифференциальных уравнений, порождаемых гладкими функциями.

Наше исследование основано на представленных в п. 1 статьи результатах о многозначных накрывающих отображениях частично упорядоченных пространств. Понятие упорядоченного накрывания отображений (однозначных и многозначных) введено в работах [6, 7]. Оно было предложено в качестве аналога известного для метрических пространств свойства накрывания (называемого также метрической регулярностью [8]), эффективно используемого в исследованиях различных вопросов теории неявных дифференциальных уравнений (см., например, [9–11]). В статьях [12, 13] получены утверждения о точках совпадения двух отображений, одно из которых является упорядоченно накрывающим, а другое – изотонным, а также установлена связь данных утверждений с теоремами А.В. Арутюнова [14, 15] о точках совпадения накрывающего и липшицева отображений метрических пространств. В [16–18] сформулированы утверждения об анитонных возмущениях упорядоченно накрывающих отображений, и на основе этих утверждений найдены условия существования и оценки решений интегральных уравнений и краевых задач для неявных дифференциальных уравнений, аналогичные известным теоремам Чаплыгина о дифференциальном и интегральном неравенствах. В работах [19, 20] ослаблены условия теорем об анитонных возмущениях упорядоченно накрывающих отображений, и эти результаты применены к неявным дифференциальным уравнениям высших порядков. В [21] получена теорема об антитонных возмущениях упорядоченно накрывающих многозначных отображений, с использованием которой исследованы вопросы существования решений задачи Коши для дифференциального включения неявного вида.

Здесь мы продолжаем исследование [21], уточняем условия разрешимости рассмотренного в [21] включения и определяем условия существования решения с наименьшей производной, затем применяем эти результаты к управляемой системе неявных нелинейных дифференциальных уравнений. Основными результатами настоящей работы являются условия существования и оценки решений таких систем, представленные в виде аналогов теоремы Чаплыгина о дифференциальном неравенстве.

1. Многозначные отображения частично упорядоченных пространств. Пусть заданы частично упорядоченные пространства $(X,\preceq)$, $(Y,\preceq)$. Для элементов $u,v\in X$ и множества $U\subset X$ обозначим

$$[v,u]_X\stackrel{\text{def}}{=}\{x\in X: v\preceq x\preceq u\},\quad \mathcal{O}_X(u)\stackrel{\text{def}}{=}\{x\in X: x\preceq u\},\quad \mathcal{O}_X(U)\stackrel{\text{def}}{=}\bigcup_{\forall u\in U}\mathcal{O}_X(u).$$

Для элементов $u,v\in X$ таких, что $u\preceq v$ и $u\neq v$, будем писать $u\prec v$. Элементы $u,v\in\in X$, $u\neq v$, называются *сравнимыми*, если выполнено $u\prec v$ или $u\succ v$. Множество $S\subset X$, в котором любые два различных элемента сравнимы, называют *линейно упорядоченным* или *цепью*. Если для множества $U\subset X$ существует такой элемент $v\in X$, что $v\preceq x$ $(v\succeq x)$ при любом $x\in U$, то множество U называют *ограниченным снизу* (*ограниченным сверху*), а элемент v – его нижней (верхней) границей. Нижнюю (верхнюю) границу $\widetilde{v}$ множества U называют точной или *инфимумом* (*супремумом*), если $\widetilde{v}\succ v$ $(\widetilde{v}\prec v)$ для любой другой его нижней (верхней) границы v. Частично упорядоченное пространство называется *нижней полурешёткой* (*верхней полурешёткой*), если в нём любое двухэлементное подмножество имеет точную верхнюю (точную нижнюю) границу. Пространство, являющееся и нижней, и верхней полурешёткой, называют *решёткой*.

Элемент $\tilde{u}\in U$ называют *минимальным* (*максимальным*) в множестве U, если для любого элемента $u\in U$, $u\neq\tilde{u}$, сравнимого с $\tilde{u}$, выполнено $u\succ\tilde{u}$ (соответственно $u\prec\tilde{u}$). Таким образом, в U могут существовать элементы, не сравнимые с минимальным и максимальным. Элемент $\tilde{u}\in U$ называют *наименьшим* (*наибольшим*) в этом множестве, если для любого элемента $u\in U$, $u\neq\tilde{u}$, выполнено $\tilde{u}\prec u$ (соответственно $\tilde{u}\succ u$). Очевидно, что наименьший (наибольший) элемент в U является в этом множестве минимальным (максимальным). Обратное утверждение не верно, но если множество U, рассматриваемое как частично упорядоченное пространство, это нижняя (верхняя) полурешётка, то в нём минимальный (максимальный) элемент является наименьшим (наибольшим).

Рассмотрим многозначное отображение $G:X\rightrightarrows Y$, т.е. отображение, сопоставляющее каждому элементу $x\in X$ непустое множество $G(x)\subset Y$. Если для любого $x\in X$ множество $G(x)$ одноточечное, то отображение G становится “обычным однозначным” (стандартно обозначаем такое отображение соотношением $G:X\to Y$).

Определение 1. Отображение $G:X\rightrightarrows Y$ называют *изотонным* (*антитонным*) *на множестве* $U\subset X$, если для любых $x,u\in U$, таких что $x\preceq u$, и для любого $z\in G(u)$ существует $y\in G(x)$, удовлетворяющий неравенству $y\preceq z$ (соответственно $y\succeq z$). Изотонное (*антитонное*) на всём X отображение называют *изотонным* (*антитонным*).

Приведённое определение изотонности (антитонности) для однозначного отображения $G: X\to Y$ означает, что неравенство $x\preceq u$ влечёт за собой $G(x)\preceq G(u)$ (соответственно $G(x)\succeq G(u)$), т.е. для “обычных отображений” совпадает со стандартным определением этих свойств.

Определение 2. Отображение $G:X\rightrightarrows Y$ будем называть *упорядоченно накрывающим множество* $V\subset Y$, если при любом $u\in X$ справедливо вложение

$$\mathcal{O}_Y(G(u))\bigcap V\subset G(\mathcal{O}_X(u)).$$

Отметим, что в случае одноточечного множества $V=\{y_0\}$ свойство упорядоченного накрывания отображения G означает, что для произвольного $u\in X$ такого, что для некоторого $y\in G(u)$ выполнено неравенство $y_0\preceq y$, существует $x\in X$, удовлетворяющий соотношениям $x\preceq u$ и $G(x)\ni y_0$. Для того чтобы отображение G упорядоченно накрывало произвольное непустое множество $V\subset Y$, необходимо и достаточно, чтобы оно упорядоченно накрывало одноточечное множество $\{y\}$ при любом $y\in V$.

Определение свойства упорядоченного накрывания многозначных отображений введено в работах [7, 13] для случая $V=Y$.

2. Основные обозначения. Будем полагать, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ с нормой $|\cdot|_{\mathbb{R}^n}$ задан “обычный” порядок, т.е. для векторов $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $u=(u_1,\ldots,u_n)$ выполнено

$x \leqslant u$, если $x_i \leqslant u_i$, $i = \overline{1,n}$. Обозначим $\mathbb{R}^n_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n : x \geqslant 0\}$. Символом $h_{\mathbb{R}^n}$ будем обозначать расстояние по Хаусдорфу между множествами в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Обозначим через $\mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$ множества всех непустых замкнутых и, соответственно, непустых компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$. Многозначное отображение $G : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ со значениями $G(x) \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$, $x \in X$, будем обозначать через $G : X \to \mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$, а если $G(x) \in \mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$, $x \in X$, то будем писать $G : X \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$.

Пусть заданы действительные числа $a < b$ и определено измеримое многозначное отображение $B : [a, b] \to \mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$. Обозначим множество его измеримых сечений через $\mathbb{W}(B)$; множество его суммируемых сечений – через $\mathbb{L}(B)$; а символом $\mathbb{AC}(B)$ обозначим множество таких абсолютно непрерывных функций $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, что $\dot{x} \in \mathbb{L}(B)$. В случае $B(t) \equiv \mathbb{R}^n$ эти пространства будем обозначать через $\mathbb{W}^n$, $\mathbb{L}^n$ и $\mathbb{AC}^n$ соответственно. В множествах $\mathbb{W}(B)$, $\mathbb{L}(B)$ определим "привычный" порядок, полагая $x \leqslant u$ тогда и только тогда, когда $x(t) \leqslant u(t)$ при п.в. $t \in [a, b]$. Пространство непрерывных функций $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ обозначим $\mathbb{C}^n$. Считаем, что пространства $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{L}^n$ наделены стандартными нормами $\|x\|_{\mathbb{C}^n} = \max\limits_{t \in [a,b]} |x(t)|_{\mathbb{R}^n}$, $\|v\|_{\mathbb{L}^n} = \int_a^b |v(t)|_{\mathbb{R}^n}\, dt$. В обозначениях пространств индекс $n = 1$ будем опускать.

Напомним определения некоторых свойств многозначных отображений, используемых в статье (подробнее см. [22, гл. 1; 23, гл. 2]).

Многозначное отображение $B : [a, b] \to \mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$ называют *интегрально ограниченным* [22, с. 73], если функция $\beta : [a, b] \to \mathbb{R}_+$, $\beta(t) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{|y|_{\mathbb{R}^n} : y \in B(t)\}$, суммируема (измеримость этой функции прямо следует из [22, следствие 1.5.9]). Очевидно, в случае интегральной ограниченности отображения B для любого $t \in [a, b]$ выполнено $B(t) \in \mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$, кроме того, всякое измеримое сечение такого отображения является суммируемой функцией, т.е. множества $\mathbb{W}(B)$ и $\mathbb{L}(B)$ совпадают.

Многозначное отображение $G : \mathbb{R}^n \to \mathrm{C}(\mathbb{R}^k)$ называют *непрерывным* (в метрике Хаусдорфа) в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющего неравенству $|x - x_0|_{\mathbb{R}^n} < \delta$, выполнено $h_{\mathbb{R}^k}(G(x_0), G(x)) < \varepsilon$. В случае скалярного аргумента, т.е. при $n = 1$, на многозначное отображение $G : \mathbb{R} \to \mathrm{C}(\mathbb{R}^k)$ распространяются определения свойства односторонней непрерывности "обычных однозначных" отображений (см. [24]), а именно: многозначное отображение $G : \mathbb{R} \to \mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$ *непрерывно справа (слева) в точке* $x_0 \in \mathbb{R}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ (соответственно для любого $x \in (x_0 - \delta, x_0)$) выполнено $h_{\mathbb{R}^k}(G(x_0), G(x)) < \varepsilon$.

3. Неявное дифференциальное включение. Пусть заданы многозначные функции $F : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^k)$, $B : [a, b] \to \mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$ и вектор $\gamma \in \mathbb{R}^n$. Будем предполагать, что выполнены следующие условия: при любых $x, v, w \in \mathbb{R}^n$ функция $F(\,\cdot\,, x, v, w) : [a, b] \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^k)$ измерима; при п.в. $t \in [a, b]$ и любом $w \in \mathbb{R}^n$ функция $F(t, \cdot\,, \cdot\,, w) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^k)$ непрерывна справа (или при п.в. $t \in [a, b]$ и любом $w \in \mathbb{R}^n$ функция $F(t, \cdot\,, \cdot\,, w)$ непрерывна слева) по каждой компоненте $x_1, \ldots, x_n$ и $v_1, \ldots, v_n$ векторных аргументов $x, v \in \mathbb{R}^n$; при п.в. $t \in [a, b]$ и любых $x, v \in \mathbb{R}^n$ функция $F(t, x, v, \cdot\,) : \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^k)$ непрерывна; функция $B : [a, b] \to \mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$ измерима. Отметим, что из приведённых условий на многозначное отображение F следует его суперпозиционная измеримость (см. [24, теорема 2.1]), т.е. для любых измеримых функций $x(\cdot), v(\cdot), w(\cdot) \in \mathbb{W}^n$ функция $F(\,\cdot\,, x(\cdot), v(\cdot), w(\cdot))$ также измерима.

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального включения

$$F(t, x, \dot{x}, \dot{x}) \ni 0, \quad t \in [a, b], \tag{1}$$

при дополнительном ограничении на производную искомой функции

$$\dot{x}(t) \in B(t), \quad t \in [a, b], \tag{2}$$

с начальным условием

$$x(a) = \gamma. \tag{3}$$

Решением системы включений (1), (2) будем называть всякую функцию $x \in \mathbb{AC}(B)$, удовлетворяющую включению $F(t, x(t), \dot{x}(t), \dot{x}(t)) \ni 0$ при п.в. $t \in [a, b]$.

Пусть задана функция $\eta_0 \in \mathbb{AC}(B)$ такая, что

$$\eta_0(a) \geqslant \gamma \quad \text{и} \quad F(t, \eta_0(t), \dot\eta_0(t), \dot\eta_0(t)) \bigcap \mathbb{R}^n_+ \neq \varnothing \quad \text{при п.в.} \quad t \in [a, b]. \tag{4}$$

Сформулируем утверждение о существовании решения $x \in \mathbb{AC}(B)$ задачи (1)–(3), производная которого удовлетворяет неравенству $\dot x \leqslant \dot\eta_0$.

Определим многозначное отображение $\widetilde{B} : [a, b] \to \mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$ соотношением

$$\widetilde{B}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in B(t) : w \leqslant \dot\eta_0(t)\}, \quad t \in [a, b] \tag{5}$$

(при п.в. $t \in [a, b]$ множество $\widetilde{B}(t)$ не пусто, поскольку $\dot\eta_0(t) \in B(t)$). Это отображение измеримо, так как является пересечением двух измеримых отображений: $\widetilde{B}(t) = B(t) \bigcap \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}(\dot\eta_0(t))$. Теперь определим множество

$$\widetilde{D}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma + \int\limits_0^t \widetilde{B}(s)\, ds = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \gamma + \int\limits_0^t w(s)\, ds, \quad w \in \mathbb{L}(\widetilde{B}) \right\}, \quad t \in [a, b]. \tag{6}$$

Обозначим через $F|_\Omega : \Omega \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^k)$ сужение многозначного отображения F на множество

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \{(t, x, v, w) : t \in [a, b], \;\; x \in \widetilde{D}(t), \;\; v \in \widetilde{B}(t), \;\; w \in \widetilde{B}(t)\}. \tag{7}$$

Следующая теорема несколько уточняет полученные авторами в [21, теорема 4.1] достаточные условия разрешимости задачи (1)–(3). В частности, в отличие от [21, теорема 4.1] соответствующие требования к отображению F предполагаются выполненными не при всех значениях его второго аргумента $x \in \mathbb{R}^n$, а при $x \in \widetilde{D}(t)$, $t \in [a, b]$. Это уточнение существенно используется в приводимых ниже утверждениях о двусторонних неравенствах (в частности, в замечании и следствии 2).

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) многозначное отображение $\widetilde{B} : [a, b] \to \mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$ *интегрально ограничено (и поэтому* $\widetilde{B}(t) \in \mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$ *для п.в.* $t \in [a, b]$*);*

2) при п.в. $t \in [a, b]$*, любых значениях* $x \in \widetilde{D}(t)$ *и* $v \in \widetilde{B}(t)$ *многозначное отображение* $F|_\Omega(t, x, v, \cdot) : \widetilde{B}(t) \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^k)$ *упорядоченно накрывает множество* $\{0\} \subset \mathbb{R}^m$*;*

3) при п.в. $t \in [a, b]$ *и любых значениях* $w \in \widetilde{B}(t)$ *многозначное отображение* $F|_\Omega(t, \cdot, \cdot, w) : \widetilde{D}(t) \times \widetilde{B}(t) \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^k)$ *является антитонным.*

Тогда существует решение $x \in \mathbb{AC}(B)$ *задачи (1)–(3) такое, что* $\dot x \leqslant \dot\eta_0$.

Доказательство теоремы 1 по сути не отличается от доказательства теоремы 4.1 в статье [21] и поэтому здесь не приводится.

Отметим, что отображение $\widetilde{B}$, если $n \geqslant 2$, может быть интегрально ограниченным даже в случае, когда исходное отображение B имеет неограниченные значения. Например, при $n = 2$ для отображения $B : [a, b] \to \mathrm{C}(\mathbb{R}^2)$, имеющего значениями неограниченный конус $B(t) \stackrel{\text{def}}{=} \{(v_1, v_2) : -v_1 \leqslant v_2 \leqslant v_1, \;\; v_1 \geqslant 0\}$, $t \in [a, b]$, и любой функции $\eta_0 = (\eta_{01}, \eta_{02}) \in \mathbb{AC}(B)$ получаем $\widetilde{B}(t) = \{(v_1, v_2) : -\dot\eta_{01}(t) \leqslant v_2 \leqslant \dot\eta_{02}(t), \;\; v_1 = \dot\eta_{01}(t)\}$, $t \in [a, b]$. А такое отображение $\widetilde{B} : [a, b] \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^2)$, очевидно, интегрально ограничено.

Обозначим через $\mathrm{Sol}_F(B) \subset \mathbb{AC}(B)$ и $\mathrm{DSol}_F(B) \subset \mathbb{L}(B)$ множество решений задачи (1)–(3) и множество их производных соответственно. Рассмотрим вопрос о существовании минимального и наименьшего элементов в множестве $\mathrm{DSol}_F(B)$.

Теорема 2. *При выполнении условий теоремы 1 в множестве* $\mathrm{DSol}_F(B) \subset \mathbb{L}(B)$ *существует минимальный элемент* $\underline{\dot x}$ *и для него выполнено неравенство* $\underline{\dot x} \leqslant \dot\eta_0$.

Доказательство. Согласно теореме 1 множество $\mathrm{DSol}_F(B) \bigcap \mathcal{O}_{\mathbb{L}(B)}(\dot\eta_0) \subset \mathbb{L}(\widetilde{B})$ не пусто. Ввиду теоремы Хаусдорфа (см., например, [25, гл. 1]) в этом множестве существует максимальная цепь, обозначим её через S. Вследствие ограниченности и замкнутости множества $\mathbb{L}(\widetilde{B}) \subset \mathbb{L}^n$ существует $\underline{\dot x} = \inf S \in \mathbb{L}(\widetilde{B})$.

Так как порядок в $\mathbb{L}^n$ порождается правильным конусом неотрицательных функций, из цепи S может быть выбрана невозрастающая последовательность $\{\dot{x}^i\}_{i=1}^{\infty} \subset S$ такая, что (см. [12, предложение 7])

$$\underline{\dot{x}} = \inf S = \inf\{\dot{x}^i\} = \lim_{i\to\infty} \dot{x}^i.$$

Из сходимости невозрастающей последовательности $\{\dot{x}^i\}$ по норме $\mathbb{L}^n$ следует сходимость $\dot{x}^i(t) \to \underline{\dot{x}}(t)$ при п.в. $t \in [a,b]$, а также очевидное неравенство $\underline{\dot{x}} \leqslant \dot{x}^i$, $i \in \mathbb{N}$.

Поскольку $x^i \in \mathrm{Sol}_F(B)$, $i \in \mathbb{N}$, выполнено включение

$$F(t, x^i(t), \dot{x}^i(t), \dot{x}^i(t)) \ni 0, \quad t \in [a,b], \quad i \in \mathbb{N},$$

из которого в силу антитонности при п.в. t отображения $F(t,\cdot,\cdot,\dot{x}^i(t)) : \mathbb{R}^n \times B(t) \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^k)$ следует соотношение

$$F(t, \underline{x}(t), \underline{\dot{x}}(t), \dot{x}^i(t)) \bigcap \mathbb{R}^n_+ \neq \varnothing, \quad t \in [a,b], \quad i \in \mathbb{N}.$$

Так как отображение $F(t, \underline{x}(t), \underline{\dot{x}}(t), \cdot\,) : \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^k)$ непрерывно, получаем

$$F(t, \underline{x}(t), \underline{\dot{x}}(t), \underline{\dot{x}}(t)) \bigcap \mathbb{R}^n_+ \neq \varnothing, \quad t \in [a,b].$$

В силу этого соотношения из теоремы 1 следует существование решения $x \in \mathbb{AC}(\widetilde{B})$ задачи (1)–(3) такого, что $\dot{x} \leqslant \underline{\dot{x}}$. Но так как цепь S максимальная в $\mathrm{DSol}_F(B) \bigcap \mathcal{O}_{\mathbb{L}(B)}(\dot{\eta}_0)$, полученное неравенство возможно, только если $\underline{x} = x \in \mathrm{Sol}_F(B)$, и это означает, что $\underline{\dot{x}}$ – минимальный элемент в множестве $\mathrm{DSol}_F(B)$. Теорема доказана.

В теореме 2 утверждается не существование решения с наименьшей производной, а лишь существование такого решения $\underline{x}$, что для любого решения x либо $\underline{\dot{x}} \leqslant \dot{x}$, либо $\underline{\dot{x}}$ и $\dot{x}$ не сравнимы. Следующий пример показывает, что решения с наименьшей производной действительно может не существовать, причём не только для включения, но и даже для уравнения.

Пример 1. Рассмотрим при $t \in [0,1]$ задачу Коши

$$\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 0, \tag{8}$$

$$\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t) \in [-1,1], \tag{9}$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0. \tag{10}$$

Определим соответствующие данной задаче отображения $F : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ и $B : [0,1] \to \mathrm{C}(\mathbb{R}^2)$ соотношениями

$$F(t,x,v,w) \stackrel{\mathrm{def}}{=} w_1 + w_2, \quad B(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} [-1,1] \times [-1,1].$$

Покажем, что для этих отображений выполнены условия теоремы 2 (а значит, и теоремы 1).

Прежде всего, отображение $B : [0,1] \to \mathrm{C}(\mathbb{R}^2)$, очевидно, интегрально ограниченное. Далее положим $\eta_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} (t,t)$, $t \in [0,1]$. Для такой функции выполнено

$$\dot{\eta}_0(t) \equiv (1,1), \quad F(t, \eta_0(t), \dot{\eta}_0(t), \dot{\eta}_0(t)) \equiv 1 + 1 \geqslant 0,$$

$$\widetilde{B}(t) = B(t), \quad \widetilde{D}(t) = [0,t] \times [0,t], \quad t \in [0,1].$$

Рассмотрим свойства отображения F как функции второго, третьего и четвёртого аргументов. Отображение $F(t,x,v,\cdot\,) : \widetilde{B}(t) \to \mathbb{R}$ накрывает множество $\{0\}$. Действительно, для $w_1, w_2 \in [-1,1]$ из того, что $w_1 + w_2 \geqslant 0$, следует существование $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2 \in [-1,1]$ таких, что $\tilde{w}_1 \leqslant w_1$, $\tilde{w}_2 \leqslant w_2$ и $\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2 = 0$ (например, можно положить $\tilde{w}_1 = w_1$, $\tilde{w}_2 = -w_1$, тогда $\tilde{w}_2 = w_2 - (w_1 + w_2) \leqslant w_2$). Отображение $F(t,\cdot,\cdot,w) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ постоянное, следовательно, антитонное.

Итак, все условия теоремы 2 (и теоремы 1) выполнены. Множество производных решений рассматриваемой задачи Коши определяется соотношением

$$\mathrm{DSol}_F(B) = \{(z(t), -z(t)) : z \in \mathbb{L}, \|z(t)| \leqslant 1 \ \text{ при п.в. } \ t \in [0,1]\}.$$

Это множество бесконечно, и любые два его различных элемента z, $\tilde{z}$ не упорядочены. Действительно, пусть $\tilde{z} > z$, тогда $\tilde{z}_1(t) > z_1(t)$ на некотором множестве $E \subset [a,b]$ положительной меры, следовательно, $\tilde{z}_2(t) = -\tilde{z}_1(t) < -z_1(t) = z_2(t)$ на E. Итак, $\tilde{z} \not> z$, и тем самым доказано, что в множестве $\mathrm{DSol}_F(B)$ все элементы минимальные, но нет наименьшего элемента.

Получим дополнительные условия к условиям теоремы 1, при выполнении которых в множестве $\mathrm{DSol}_F(B)$ существует наименьший элемент, т.е. среди решений задачи (1)–(3) есть решение с наименьшей производной.

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения теоремы 1 и, кроме того, каждая i-я компонента F_i, $i = \overline{1,n}$, многозначного отображения F может быть записана в виде*

$$F_i(t,x,v,w) = \tilde{F}_i(t,x,v,w_i), \tag{11}$$

где $\tilde{F}_i : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathrm{K}(\mathbb{R})$ (F_i не зависит от переменных $w_1, \ \ldots, \ w_{i-1}, \ w_{i+1}, \ \ldots$ $\ldots, \ w_n$), а множество $\widetilde{B}(t) \subset \mathbb{R}^n$ при п.в. $t \in [a,b]$ является нижней полурешёткой. Тогда в множестве $\mathrm{DSol}_F(B) \subset \mathbb{L}(B)$ существует наименьший элемент.

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что в множестве $\mathrm{DSol}_F(B)$ существует минимальный элемент $\dot{\underline{x}}$. Докажем, что этот элемент будет наименьшим. Предположим, что утверждение не верно и существует также элемент $\dot{x} \in \mathrm{DSol}_F(B)$, не сравнимый с $\dot{\underline{x}}$. Определим измеримую функцию $z = (z_1, \ldots, z_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ с компонентами $z_i(t) = \min\{\dot{\underline{x}}_i(t), \dot{x}_i(t)\}$, $t \in [a,b]$, $i = \overline{1,n}$. Так как при п.в. $t \in [a,b]$ множество $B(t) \subset \mathbb{R}^n$ является нижней полурешёткой, а $z(t) = \min\{\dot{\underline{x}}(t), \dot{x}(t)\}$, где $\dot{\underline{x}}(t), \dot{x}(t) \in B(t)$, то $z(t) \in B(t)$. Очевидно, что функция z суммируема, таким образом, $z \in \mathbb{L}(B)$. Определим функцию $\varsigma = (\varsigma_1, \ldots, \varsigma_n) \in \mathbb{AC}(B)$ соотношением

$$\varsigma_i(t) \overset{\mathrm{def}}{=} \gamma_i + \int\limits_a^t z_i(s)\,ds, \quad t \in [a,b], \quad i = \overline{1,n}.$$

Для любого $i = \overline{1,n}$ обозначим

$$\underline{E}_i = \{t \in [a,b] : z_i(t) = \dot{\underline{x}}_i(t)\}, \quad E_i = [a,b] \setminus \underline{E}_i.$$

Вследствие этого определения $z_i(t) = \dot{x}_i(t)$ при п.в. $t \in E_i$.

Рассмотрим отображение $\tilde{F}_i : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathrm{K}(\mathbb{R})$. При п.в. $t \in \underline{E}_i$ выполнено равенство $\tilde{F}_i(t, \varsigma(t), z(t), z_i(t)) = \tilde{F}_i(t, \varsigma(t), z(t), \dot{\underline{x}}_i(t))$. А поскольку почти всюду на $[a,b] \supset$ $\supset \underline{E}_i$ имеет место включение $0 \in \tilde{F}_i(t, \underline{x}(t), \dot{\underline{x}}_i(t), \dot{\underline{x}}_i(t))$, то в силу антитонности отображения $\tilde{F}_i(t, \cdot, \cdot, \dot{\underline{x}}_i(t))$ при п.в. $t \in \underline{E}_i$ существует $y \geqslant 0$ такой, что $y \in \tilde{F}_i(t, \varsigma(t), z(t), \dot{\underline{x}}_i(t)) =$ $= \tilde{F}_i(t, \varsigma(t), z(t), z_i(t))$. Аналогично доказывается, что при п.в. $t \in E_i$ существует $y \geqslant 0$, удовлетворяющий включению $y \in \tilde{F}_i(t, \varsigma(t), z(t), \dot{x}_i(t)) = \tilde{F}_i(t, \varsigma(t), z(t), z_i(t)) = \tilde{F}_i(t, \varsigma(t), \dot{\varsigma}(t), \dot{\varsigma}_i(t))$. Таким образом, при любом i почти всюду на $[a,b]$ имеет место соотношение

$$F_i(t, \varsigma(t), \dot{\varsigma}(t), \dot{\varsigma}_i(t)) \bigcap \mathbb{R}_+ \neq \varnothing,$$

а значит,

$$F(t, \varsigma(t), \dot{\varsigma}(t), \dot{\varsigma}(t)) \bigcap \mathbb{R}_+^n \neq \varnothing, \quad t \in [a,b].$$

Из этого соотношения согласно теореме 1 следует существование решения $\zeta \in \mathrm{Sol}_F(B)$ задачи (1)–(3) такого, что $\dot{\zeta} \leqslant z < \dot{\underline{x}}$. Но это неравенство противоречит тому, что $\dot{\underline{x}}$ является минимальным элементом в множестве $\mathrm{DSol}_F(B)$. Теорема доказана.

Заметим, что порождаемая дифференциальным уравнением из примера 1 функция F не представима в виде (11), т.е. не удовлетворяет предположению теоремы 3, и в множестве решений задачи Коши из примера 1 нет решения с наименьшей производной. Рассмотрим некоторые классы дифференциальных включений, для которых соответствующее отображение F представимо в виде (11).

Сначала рассмотрим задачу Коши (1)–(3) в скалярном случае, т.е. будем полагать, что $n = k = 1$. Итак, пусть заданы многозначные функции $F : [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathrm{K}(\mathbb{R})$, $B : [a,b] \to \mathrm{C}(\mathbb{R})$ и число γ. Для такой скалярной многозначной функции F, очевидно, имеет место представление (11), и это позволяет вывести из теорем 1, 3 утверждение о разрешимости скалярной задачи Коши и о существовании решения с наименьшей производной.

Пусть задана функция $\eta_0 \in \mathbb{AC}(B)$ такая, что

$$\eta_0(a) \geqslant \gamma \quad \text{и} \quad F(t, \eta_0(t), \dot\eta_0(t), \dot\eta_0(t)) \bigcap \mathbb{R}_+ \neq \varnothing \quad \text{при п.в.} \quad t \in [a,b].$$

Пусть при п.в. $t \in [a,b]$ множество $B(t)$ ограничено снизу. Введём $\beta(t) = \min B(t)$, $t \in [a,b]$. Полученная функция $\beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ измерима (согласно [22, следствие 1.5.9]). Определим множества $\widetilde{B}(t), \widetilde{D}(t) \subset \mathbb{R}$, $t \in [a,b]$, и множество $\Omega \subset [a,b] \times \mathbb{R}^3$ формулами (5), (6) и (7), соответственно.

Следствие 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) функция $\beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ суммируема;

2) при п.в. $t \in [a,b]$, любых значениях $x \in \widetilde{D}(t)$ и $v \in \widetilde{B}(t)$ многозначное отображение $F_\Omega(t,x,v,\cdot\,) : \widetilde{B}(t) \to \mathrm{K}(\mathbb{R})$ упорядоченно накрывает множество $\{0\} \subset \mathbb{R}$;

3) при п.в. $t \in [a,b]$ и любых значениях $w \in \widetilde{B}(t)$ многозначное отображение $F_\Omega(t,\cdot\,,\cdot\,,w)$: $\widetilde{D}(t) \times \widetilde{B}(t) \to \mathrm{K}(\mathbb{R})$ антитонное.

Тогда существует решение $x \in \mathbb{AC}(B)$ скалярной задачи (1)–(3) такое, что $\dot x \leqslant \dot\eta_0$; кроме того, в множестве $\mathrm{DSol}_F(B) \subset \mathbb{L}(B)$ существует наименьший элемент.

Доказательство. Из предположений данного утверждения для рассматриваемой скалярной задачи следуют условия теоремы 3 (включая условия теоремы 1). В частности, многозначное отображение $\widetilde{B} : [a,b] \to \mathrm{C}(\mathbb{R})$, $\widetilde{B}(t) = B(t) \bigcap \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}(\dot\eta_0(t))$, $t \in [a,b]$, удовлетворяет соотношению $\widetilde{B}(t) \subset [\beta(t), \dot\eta_0(t)]$, $t \in [a,b]$, и поэтому интегрально ограничено. Кроме того, любое множество на прямой $\mathbb{R}$, в том числе $B(t)$, является и нижней, и верхней полурешёткой (т.е. решёткой). Таким образом, рассматриваемое утверждение следует из теоремы 3.

Замечание. При применении сформулированных утверждений к исследованию конкретных включений наибольшие трудности вызывает проверка условия упорядоченного накрывания множества $\{0\}$ соответствующим непрерывным многозначным отображением $F_\Omega(t,x,v,\cdot\,)$, определённым на множестве $\widetilde{B}(t)$, при $(t,x,v) \in [a,b] \times \widetilde{D}(t) \times \widetilde{B}(t)$. Для скалярного отображения из следствия 1 это условие выполнено, если для любой точки $\bar\omega = (t,x,v,w) \in \Omega$ её образ $F_\Omega(\bar\omega)$ – связное множество и

$$F\biggl(t, \gamma + \int\limits_0^t \beta(s)\,ds, \beta(t), \beta(t)\biggr) \bigcap \mathbb{R}_- \neq \varnothing \quad \text{при п.в.} \quad t \in [a,b].$$

Ещё одним классом дифференциальных включений, для которых соответствующее отображение F представимо в виде (11), является включение вида

$$\dot x \in G(t, x, \dot x), \quad t \in [a,b], \tag{12}$$

где многозначная функция $G : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет следующим условиям: при любых $x, v \in \mathbb{R}^n$ функция $G(\,\cdot\,, x, v) : [a,b] \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$ измерима; при п.в. $t \in [a,b]$ функция $G(t,\cdot\,,\cdot\,) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^k)$ непрерывна справа (или при п.в. $t \in [a,b]$ функция $G(t,\cdot\,,\cdot\,)$ непрерывна слева) по каждой компоненте $x_1, \ldots, x_n$ и $v_1, \ldots, v_n$ векторных аргументов

$x, v \in \mathbb{R}^n$. Включение (12) – частный случай включения (1), в котором $k = n$, а отображение $F : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$ определено формулой

$$F(t, x, v, w) = -G(t, x, v) + w, \quad t \in [a, b], \quad x, v, w \in \mathbb{R}^n. \tag{13}$$

Для компонент этого отображения, очевидно, имеет место представление (11), где

$$\tilde{F}_i(t, x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, v_n, w_i) = -G_i(t, x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, v_n) + w_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Сформулируем утверждение о разрешимости задачи Коши для включения (12). Будем здесь предполагать, что при п.в. $t \in [a, b]$ множество $B(t)$ задано соотношением

$$B(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{w \in \mathbb{R}^n : w \geqslant \beta(t)\},$$

в котором функция $\beta : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ суммируема. Далее, пусть задана функция $\eta_0 \in \mathbb{AC}(B)$ с начальным значением $\eta_0(a) \geqslant \gamma$ такая, что при п.в. $t \in [a, b]$ существует элемент $z \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий соотношениям

$$z \in G(t, \eta_0(t), \dot{\eta}_0(t)), \quad z \leqslant \dot{\eta}_0(t).$$

Определённое соотношением (5) измеримое многозначное отображение $\widetilde{B} : [a, b] \to \mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$ в данном случае принимает вид

$$\widetilde{B}(t) = [\beta(t), \dot{\eta}_0(t)]_{\mathbb{R}^n}, \quad t \in [a, b]. \tag{14}$$

Соответственно из (6) получаем $\widetilde{D}(t) = [\gamma + \int_a^t \beta(s)\, ds, \gamma - \eta_0(a) + \eta_0(t)]_{\mathbb{R}^n}$, $t \in [a, b]$. Определим сужение $G|_\Theta : \Theta \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$ многозначного отображения G на множество

$$\Theta = \{(t, x, v) : t \in [a, b], \ \ x \in \widetilde{D}(t), \ \ v \in \widetilde{B}(t)\}.$$

Следствие 2. *Пусть выполнены следующие условия:*
1) для функции $\beta : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ при п.в. $t \in [a, b]$ существует $y \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$y \in G\biggl(t, \gamma + \int\limits_a^t \beta(s)\, ds, \beta(t)\biggr), \quad y \geqslant \beta(t); \tag{15}$$

2) для любой точки $\theta = (t, x, v) \in \Theta$ её образ $G|_\Theta(\theta)$ – связное множество и при п.в. $t \in [a, b]$ многозначное отображение $G|_\Theta(t, \cdot, \cdot) : \widetilde{D}(t) \times \widetilde{B}(t) \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$ изотонное.

Тогда существует решение $x \in \mathbb{AC}(B)$ задачи Коши для включения (12) с условиями (2), (3) такое, что $\dot{x} \leqslant \dot{\eta}_0$; кроме того, в множестве $\mathrm{DSol}_F(B) \in \mathbb{L}(B)$ существует наименьший элемент.

Доказательство. Сначала заметим, что множество $\widetilde{B}(t) \subset \mathbb{R}^n$, определяемое формулой (14), это n-мерный куб, который относительно "обычного покоординатного" порядка в $\mathbb{R}^n$ является решёткой.

Покажем, что определённое формулой (13) отображение F как функция последнего аргумента $F(t, x, v, \cdot) : \widetilde{B}(t) \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$ упорядоченно накрывает множество $\{0\} \subset \mathbb{R}^n$ при п.в. $t \in [a, b]$ и любых $(x, v) \in \widetilde{D}(t) \times \widetilde{B}(t)$. Зададим произвольный вектор $w \in B(t)$, для которого существует $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$ такой, что для его компонент справедливы соотношения

$$\bar{y}_i \in -G_i(t, x, v) + w_i, \quad \bar{y}_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{16}$$

В силу (15) выполнено $\beta(t) - y \in -G(t, \gamma + \int_a^t \beta(s)\, ds, \beta(t)) + \beta(t)$, и в этом включении левая часть $\beta(t) - y \in \mathbb{R}^n_-$. Для $x \in \widetilde{D}(t)$ и $v \in \widetilde{B}(t)$ имеем $x \geqslant \gamma + \int_a^t \beta(s)\, ds$, $v \geqslant \beta(t)$. Из этих неравенств, вследствие антитонности отображения $-G(t,\cdot,\cdot)$, заключаем, что существует $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$ такой, что его компоненты удовлетворяют соотношениям

$$\underline{y}_i \in -G_i(t,x,v)+\beta_i(t), \quad \underline{y}_i \leqslant 0, \quad i=\overline{1,n}. \tag{17}$$

Вследствие связности значений отображения G, согласно [22, теорема 1.2.37], при п.в. $t \in [a,b]$ и любых $(x,v) \in \widetilde{D}(t) \times \widetilde{B}(t)$ множество

$$F_i(t,x,v,[\beta_i(t),w_i]) = \bigcup_{z\in[\beta_i(t),w_i]} (-G_i(t,x,v)+z)$$

связно в $\mathbb{R}$. Этому множеству, согласно (16), (17), принадлежат числа $\bar{y}_i \geqslant 0$, $\underline{y}_i \leqslant 0$, а следовательно, и число 0. Таким образом, при любом $i=\overline{1,n}$ для некоторого $z_i \in [\beta_i(t),w_i]$ выполнено $0 \in -G_i(t,x,v)+z_i$, и значит $F(t,x,v,\cdot\,) : \widetilde{B}(t) \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$ упорядоченно накрывает $\{0\} \subset \mathbb{R}^n$.

Таким образом, выполнены все условия теоремы 3. Утверждение доказано.

4. Задача управления. Приведённые выше результаты о дифференциальном включении (1) здесь применяются к исследованию управляемой системы не разрешённых относительно производной (неявных) нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Пусть заданы вектор $\gamma \in \mathbb{R}^n$, функция $f : [a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ и многозначное отображение $U : [a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$, удовлетворяющие следующим условиям: при п.в. $t \in [a,b]$ и любых $x,v \in \mathbb{R}^n$ функция $f(t,x,v,\cdot\,) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ непрерывна; при любом $u \in \mathbb{R}^m$ функция $f(\,\cdot\,,\cdot\,,\cdot\,,u) : [a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ суперпозиционно измерима (т.е. для любых измеримых функций $x(\cdot)$, $v(\cdot)$ функция $f(\,\cdot\,,x(\cdot),v(\cdot),u)$ измерима); многозначное отображение $U : [a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ суперпозиционно измеримо.

Рассмотрим на отрезке $[a,b]$ управляемую систему

$$f(t,x,\dot{x},u)=0 \tag{18}$$

с обратной связью

$$u(t) \in U(t,x(t),\dot{x}(t)). \tag{19}$$

Решением системы (18), (19) будем называть удовлетворяющую обоим соотношениям (18), (19) при п.в. $t \in [a,b]$ пару (x,u), в которой первая компонента, называемая *траекторией*, это абсолютно непрерывная функция $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, а вторая компонента, называемая *управлением*, – измеримая функция $u : [a,b] \to \mathbb{R}^m$. Обозначим через $\mathrm{Sol}_f^U \subset \mathbb{AC}^n \times \mathbb{W}^m$ и $\mathrm{DSol}_f^U \subset \mathbb{L}^n \times \mathbb{W}^m$ множество решений (x,u) задачи (18), (19) и, соответственно, множество пар $(\dot{x},u)$, где $\dot{x}$ – производная траектории.

Определим многозначное отображение $F : [a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^k$ формулой

$$F(t,x,v) \overset{\mathrm{def}}{=} f(t,x,v,U(t,x,v)), \quad (t,x,v) \in [a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n. \tag{20}$$

Заметим, что из непрерывности функции $f(t,x,v,\cdot\,)$ и компактности множества $U(t,x,v)$ следует, что отображение F имеет компактные значения. Кроме того, F суперпозиционно измеримо. Рассмотрим включение

$$0 \in F(t,x,\dot{x}), \quad t \in [a,b]. \tag{21}$$

Сформулируем утверждение, позволяющее “переходить” от рассматриваемой здесь “неявной” управляемой системы (18), (19) к дифференциальному включению (21). Это утверждение аналогично известной теореме (см., например, [22, теорема 3.4.1]) о равносильности управляемой дифференциальной системы, разрешённой относительно производной, соответствующему дифференциальному включению.

Лемма. *Управляемая система (18), (19) равносильна включению (21), т.е. если пара $(x,u)\in\mathbb{AC}^n\times\mathbb{W}^m$ – решение управляемой системы (18), (19), то $x\in\mathbb{AC}^n$ является решением включения (21), и обратно, если $x\in\mathbb{AC}^n$ – решение включения (21), то существует функция $u\in\mathbb{W}^m$ такая, что пара (x,u) является решением системы (18), (19).*

Доказательство. Пусть пара (x,u) является решением управляемой системы (18), (19), тогда $u(\cdot)\in\mathbb{W}^m$ – измеримое сечение измеримого многозначного отображения $U(\,\cdot\,,x(\cdot),\dot x(\cdot))$, а $x(\cdot)\in\mathbb{AC}^n$ – соответствующее решение уравнения (18). Имеем

$$0=f(t,x(t),\dot x(t),u(t))\in f(t,x(t),\dot x(t),U(t,x(t),\dot x(t)))\quad \text{при п.в.}\quad t\in[a,b],$$

следовательно, $x(\cdot)\in\mathbb{AC}^n$ – решение включения (21).

Обратно, пусть функция $x(\cdot)\in\mathbb{AC}^n$ является решением включения (21). Определим функцию $g:[a,b]\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k$ формулой $g(t,u)=f(t,x(t),\dot x(t),u)$ для всех $t\in[a,b]$ и $u\in\mathbb{R}^m$. Так как функция $f(\,\cdot\,,\cdot\,,\cdot\,,u):[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ суперпозиционно измерима, то при любом $u\in\mathbb{R}^m$ функция $g(\,\cdot\,,u):[a,b]\to\mathbb{R}^k$ измерима, а в силу непрерывности $f(t,x,v,\cdot\,):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k$ при п.в. $t\in[a,b]$ функция $g(t,\cdot\,):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k$ непрерывна. Обозначим через $V:[a,b]\to\mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ многозначную функцию, определяемую формулой $V(t)=U(t,x(t),\dot x(t))$, $t\in[a,b]$. Так как отображение $U:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ суперпозиционно измеримо, то функция V измерима. Включение (21) записывается в виде $0\in g(t,V(t))$. По лемме Филиппова об измеримом выборе (см., например, [22, теорема 1.5.15]) существует измеримое сечение u отображения V, для которого при п.в. $t\in[a,b]$ выполнено равенство $0=g(t,u(t))$ или, что то же самое, $0=f(t,x(t),\dot x(t),u(t))$. Лемма доказана.

Для произведения $\mathbb{V}=\mathbb{AC}^n\times\mathbb{W}^m$ определим операторы проектирования $\pi_1:\mathbb{V}\to\mathbb{AC}^n$, $\pi_2:\mathbb{V}\to\mathbb{W}^m$ для любой пары $v=(x,u)\in\mathbb{V}$ соотношениями

$$\pi_1 v=x,\quad \pi_2 v=u.$$

Сформулированная выше лемма означает, что для управляемой системы (18), (19) выполнено $\pi_1(\mathrm{Sol}_f^U)=\mathrm{Sol}_F$, где отображение F задано формулой (20).

Далее с использованием этой леммы исследуем управляемую систему (18), (19), которую для удобства формулировок условий разрешимости запишем в несколько ином виде.

Пусть заданы вектор $\gamma\in\mathbb{R}^n$, функция $f:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k$ и многозначные отображения $U:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$, $B:[a,b]\to\mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющие следующим условиям: при любых $x,v,w\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}^m$ функция $f(\,\cdot\,,x,v,w,u):[a,b]\to\mathbb{R}^k$ измерима; при п.в. $t\in[a,b]$ и любых $x,v\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}^m$ функция $f(t,x,v,\cdot\,,u):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ непрерывна; при п.в. $t\in[a,b]$ и любых $w\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}^m$ функция $f(t,\cdot\,,\cdot\,,w,u):\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ непрерывна справа (или при п.в. $t\in[a,b]$ и любых $w\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}^m$ функция $f(t,\cdot,\cdot,w,u)$ непрерывна слева) по каждой компоненте $x_1,\ \ldots,\ x_n$ и $v_1,\ \ldots,\ v_n$ векторных аргументов $x,v\in\mathbb{R}^n$; при п.в. $t\in[a,b]$ и любых $x,v,w\in\mathbb{R}^n$ функция $f(t,x,v,w,\cdot\,):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k$ непрерывна; при любых $x,v\in\mathbb{R}^n$ отображение $U(\,\cdot\,,x,v):[a,b]\to\mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ измеримо; при п.в. $t\in[a,b]$ отображение $U(t,\cdot\,,\cdot\,):\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ непрерывно справа (или при п.в. $t\in[a,b]$ отображение $U(t,\cdot\,,\cdot\,)$ непрерывно слева) по каждой компоненте $x_1,\ \ldots,\ x_n$ и $v_1,\ \ldots,\ v_n$ векторных аргументов $x,v\in\mathbb{R}^n$; функция $B:[a,b]\to\mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$ измерима.

Рассмотрим на $[a,b]$ задачу Коши с начальным условием (3) для управляемой системы

$$f(t,x,\dot x,\dot x,u)=0 \tag{22}$$

с обратной связью, определяемой включением (19) и ограничением (2). Множество решений этой задачи обозначим через $\mathrm{Sol}_f^U(B)\subset\mathbb{AC}(B)\times\mathbb{W}^m$. Будем рассматривать также множество $\mathrm{DSol}_f^U(B)\subset\mathbb{L}(B)\times\mathbb{W}^m$ пар $(\dot x,u)$ таких, что $(x,u)\in\mathrm{Sol}_f^U(B)$.

Пусть задана функция $\eta_0\in\mathbb{AC}(B)$. Определим многозначное отображение

$$U_0:[a,b]\to\mathrm{K}(\mathbb{R}^m),\quad U_0(t)=U(t,\eta_0(t),\dot\eta_0(t)),\quad t\in[a,b].$$

Согласно [24, теорема 2.1] отображение U_0 измеримо. Пусть $u_0 \in \mathbb{W}(U_0)$ – его измеримое сечение. Будем предполагать, что справедливы неравенства

$$\eta_0(a) \geqslant \gamma \quad \text{и} \quad f(t, \eta_0(t), \dot{\eta}_0(t), \dot{\eta}_0(t), u_0(t)) \geqslant 0 \quad \text{при п.в.} \quad t \in [a, b]. \tag{23}$$

Определим измеримое многозначное отображение $\widetilde{B} : [a, b] \to \mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$ соотношением (5), затем для каждого $t \in [a, b]$ определим множество $\widetilde{D}(t) \subset \mathbb{R}^n$ соотношением (6) и множество $\widetilde{U}(t) = U(t, \widetilde{D}(t), \widetilde{B}(t)) \subset \mathbb{R}^m$.

Через $f|_\Xi : \Xi \to \mathbb{R}^k$ обозначим сужение функции f на множество

$$\Xi \stackrel{\text{def}}{=} \{(t, x, v, w, u) : t \in [a, b], \quad x \in \widetilde{D}(t), \quad v \in \widetilde{B}(t), \quad w \in \widetilde{B}(t), \quad u \in \widetilde{U}(t)\},$$

а через $U|_\Theta : \Theta \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ – сужение многозначного отображения U на множество

$$\Theta \stackrel{\text{def}}{=} \{(t, x, v) : t \in [a, b], \quad x \in \widetilde{D}(t), \quad v \in \widetilde{B}(t)\}.$$

Теорема 4. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) многозначное отображение $\widetilde{B} : [a, b] \to \mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$ интегрально ограничено (и поэтому $\widetilde{B}(t) \in \mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$ для п.в. $t \in [a, b]$);

2) функция $f|_\Xi(t, x, v, \cdot, u) : \widetilde{B}(t) \to \mathbb{R}^k$ при п.в. $t \in [a, b]$ и любых $x \in \widetilde{D}(t)$, $v \in \widetilde{B}(t)$, $u \in \widetilde{U}(t)$ упорядоченно накрывает множество $\{0\} \subset \mathbb{R}^k$;

3) функция $f|_\Xi(t, \cdot, \cdot, w, \cdot) : \widetilde{D}(t) \times \widetilde{B}(t) \times \widetilde{U}(t) \to \mathbb{R}^k$ при п.в. $t \in [a, b]$ и любых $w \in \widetilde{B}(t)$ по каждой компоненте $x_1, \ldots, x_n$, $v_1, \ldots, v_n$ и $u_1, \ldots, u_n$ соответствующих векторных аргументов x, v, u убывает (не строго);

4) отображение $U|_\Theta(t, \cdot, \cdot) : \widetilde{D}(t) \times \widetilde{B}(t) \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ при п.в. $t \in [a, b]$ изотонно.

Тогда существует решение (x, u) задачи Коши с начальным условием (3) для управляемой системы (22) с обратной связью (19) и ограничением (2) такое, что $\dot{x} \leqslant \dot{\eta}_0$ и $u \leqslant u_0$. Кроме того, в множестве $\mathrm{DSol}_f^U(B)$ существует пара $(\underline{\dot{x}}, \underline{u})$ такая, что $\underline{\dot{x}}$ – минимальный элемент в $\pi_1(\mathrm{DSol}_f^U(B))$ и выполнено $\underline{\dot{x}} \leqslant \dot{\eta}_0$ и $\underline{u} \leqslant u_0$.

Доказательство. Введём многозначное отображение $F : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^k$ по формуле

$$F(t, x, v, w) \stackrel{\text{def}}{=} f(t, x, v, w, U(t, x, v)), \quad (t, x, v, w) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m. \tag{24}$$

Рассмотрим включение (1) с отображением F, определённым формулой (24). В силу принятых здесь предположений это отображение удовлетворяет условиям теоремы 1 (соответственно теоремы 2). В частности, из неравенств (23) следует, что для функции $\eta_0 \in \mathbb{AC}(B)$ выполнены соотношения (4). Согласно теоремам 1, 2 множество $\mathrm{Sol}_F(B)$ решений задачи Коши (1)–(3) не пусто, а в множестве $\mathrm{DSol}_F(B)$ производных решений есть минимальный элемент $\underline{\dot{x}}$ и для него выполнено неравенство $\underline{\dot{x}} \leqslant \dot{\eta}_0$.

Согласно лемме 1 рассматриваемая задача управления также разрешима и для её множества решений $\mathrm{Sol}_f^U(B)$ выполнено равенство $\pi_1(\mathrm{Sol}_f^U(B)) = \mathrm{Sol}_F(B)$, а следовательно, и равенство $\pi_1(\mathrm{DSol}_f^U(B)) = \mathrm{DSol}_F(B)$. Поэтому элемент $\underline{\dot{x}}$ является минимальным в множестве $\pi_1(\mathrm{DSol}_f^U(B))$.

Управление, соответствующее траектории $\underline{x}$, удовлетворяет при п.в. $t \in [a, b]$ включению $u(t) \in U(t, \underline{x}(t), \underline{\dot{x}}(t))$. Вследствие изотонности отображения $U|_\Theta(t, \cdot, \cdot) : \widetilde{D}(t) \times \widetilde{B}(t) \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ при п.в. $t \in [a, b]$ множество $\underline{U}(t) = U(t, \underline{x}(t), \underline{\dot{x}}(t)) \bigcap \mathcal{O}_{\mathbb{R}^m}(u_0(t))$ не пусто, соответствующее многозначное отображение $\underline{U} : [a, b] \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ является пересечением измеримых отображений, поэтому само измеримо. Для любого измеримого сечения $\underline{u}$ отображения $\underline{U}$ пара $(\underline{x}, \underline{u})$ – решение рассматриваемой задачи управления и $\underline{u} \leqslant u_0$. Теорема доказана.

Отметим, что в условиях теоремы 4 в множестве $\pi_1(\mathrm{DSol}_f^U(B))$ производных от траекторий управляемой системы есть минимальный элемент, но в множестве $\pi_2(\mathrm{Sol}_f^U(B))$ управлений этой системы минимального элемента может не быть. Приведём соответствующий пример.

Пример 2. Рассмотрим уравнение (8) из примера 1 как тривиальную управляемую систему вида (22), в которой функция f не зависит от последнего аргумента – управления (т.е. $f(t,x,v,w,\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – постоянная функция). Начальное условие и ограничение на производную траектории зададим теми же соотношениями (9), (10), что и в примере 1.

Для рассматриваемой функции $f:[0,1]\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(t,x,v,w,u)=w_1+$ $+w_2$, и отображения $B:[0,1]\to\mathrm{C}(\mathbb{R}^2)$, $B(t)=[-1,1]\times[-1,1]$, справедливы предположения теоремы 1 (см. пример 1), где $\eta_0:[0,1]\to\mathbb{R}^2$, $\eta_0=(t,t)$, $t\in[0,1]$.

Функцию обратной связи U будем здесь полагать однозначной, зададим её следующим образом. Разобьем плоскость $\mathbb{R}^2$ на два непересекающихся множества

$$V=\{v=(v_1,v_2):v_2<1\},\quad \overline{V}=\mathbb{R}^2\setminus V=\{v=(v_1,v_2):v_2\geqslant 1\}$$

и положим $U:[-1,1]\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$U(t,x,v)\overset{\mathrm{def}}{=}\begin{cases}v_1, & \text{если } v\in V,\\ 1, & \text{если } v\in\overline{V}.\end{cases}$$

Функция $U(\cdot,\cdot,\cdot)$ постоянна по первым двум аргументам t, x, а как функция третьего аргумента $v=(v_1,v_2)$ непрерывна по компоненте v_1 этого аргумента и терпит разрывы по компоненте v_2 только в точках прямой $v_2=1$, причём непрерывна в этих точках справа (кроме одной точки $(1,1)$, в которой непрерывна по v_2). В силу определения функции U, так как $\dot\eta_0(t)\equiv(1,1)\in\overline{V}$, имеем $u_0(t)=U(t,\eta_0(t),\dot\eta_0(t))=1$.

Из определений множеств $\widetilde{B}(t)$, $\widetilde{D}(t)$ и Θ получаем

$$\widetilde{B}(t)=B(t)=[-1,1]\times[-1,1],\quad \widetilde{D}(t)=[0,t]\times[0,t],\quad t\in[0,1],$$

$$\Theta=\{(t,x,v):t\in[0,1],\ \ x\in[0,t]\times[0,t],\ \ v\in[-1,1]\times[-1,1]\}.$$

Сужение $U|_\Theta:\Theta\to\mathbb{R}$ функции U на множество Θ постоянно по первым двум аргументам t, x и возрастает (не строго) по каждой компоненте v_1, v_2 последнего аргумента v.

Итак, выполнены все предположения теоремы 4. Для рассматриваемой задачи управления множество $\mathrm{DSol}_f^U(B)$ содержит все пары $(\dot x,u)$ функций вида

$$\dot x(t)=(z(t),-z(t)),\quad u(t)=\begin{cases}z(t), & -1<z(t)\leqslant 1,\\ 1, & z(t)=-1,\end{cases}\quad t\in[0,1],$$

где $z\in\mathbb{L}$ – произвольная функция, удовлетворяющая почти всюду на $[0,1]$ неравенству $|z(t)|\leqslant 1$. Любой элемент в множестве $\pi_1(\mathrm{DSol}_f^U(B))=\{(z,-z):z\in\mathbb{L},\ \|z(t)|\leqslant 1$, при п.в. $t\in[0,1]\}$ является минимальным. Множество $\pi_2(\mathrm{DSol}_f^U(B))$ состоит из всевозможных функций $z\in\mathbb{L}$ таких, что $-1<z(t)\leqslant 1$, $t\in[0,1]$, и в этом множестве нет минимального элемента.

С использованием теоремы 4 получим условия существования наименьшей траектории и наименьшего допустимого управления.

Теорема 5. *Пусть выполнены предположения теоремы 4 и, кроме того, каждая i-я компонента f_i, $i=\overline{1,n}$, функции f может быть записана в виде*

$$f_i(t,x,v,w,u)=\tilde f_i(t,x,v,w_i,u),\tag{25}$$

где $\tilde f_i:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ (f_i не зависит от переменных w_1, $\ldots$, w_{i-1}, w_{i+1}, $\ldots$ $\ldots$, w_n), а множество $\widetilde{B}(t)\subset\mathbb{R}^n$ при п.в. $t\in[a,b]$ является нижней полурешёткой.

Тогда среди траекторий управляемой системы (22), (2), отвечающих условиям (3), (19), существует траектория с наименьшей производной.

Если кроме перечисленных условий при п.в. $t \in [a,b]$ *и любых* $x \in \widetilde{D}(t)$, $v \in \widetilde{B}(t)$ *множество* $U(t,x,v) \subset \mathbb{R}^k$ *является нижней полурешёткой, то в множестве* $\mathrm{DSol}_f^U(B)$ *существует наименьший элемент, т.е. такая пара* $(\underline{\dot{x}}, \underline{u})$, *что её первая компонента* $\underline{\dot{x}}$ *– это наименьший элемент в множестве* $\pi_1(\mathrm{DSol}_f^U(B))$, *а вторая компонента* $\underline{u}$ *– наименьший элемент в* $\pi_2(\mathrm{DSol}_f^U(B))$.

Доказательство. При выполнении условия (25) дифференциальное включение, равносильное рассматриваемой управляемой системе, порождается многозначным отображением (24), компоненты которого могут быть представлены в виде (11). А так как ещё и $\widetilde{B}(t) \subset \mathbb{R}^n$ при п.в. t является нижней полурешёткой и выполняются условия теоремы 4, то справедливы все предположения теоремы 3. Согласно теореме 3 среди решений этого включения (т.е. траекторий управляемой системы) имеется функция $\underline{x} \in \mathbb{AC}(B)$ с наименьшей производной.

Пусть теперь в дополнение к рассмотренным условиям при п.в. $t \in [a,b]$ и любых $x \in \widetilde{D}(t)$, $v \in \widetilde{B}(t)$ множество $U(t,x,v) \subset \mathbb{R}^k$ является нижней полурешёткой. Тогда при п.в. $t \in [a,b]$ в компактном непустом множестве $\underline{U}(t) = U(t, \underline{x}(t), \underline{\dot{x}}(t)) \bigcap \mathcal{O}_{\mathbb{R}^m}(u_0(t))$ имеется наименьший элемент $\underline{u}(t)$. Согласно [22, следствие 1.5.9] функция $\underline{u}(\cdot)$ измерима. Для произвольной траектории x выполнены неравенства $\underline{\dot{x}} \leqslant \dot{x}$ и $\underline{x} \leqslant x$, из которых вследствие антитонности отображения $U(t,\cdot,\cdot)$ для любого измеримого сечения u многозначного отображения $U(\,\cdot\,, x(\cdot), \dot{x}(\cdot))$ справедливо неравенство $\underline{u}(t) \leqslant u(t)$, $t \in [a,b]$. Таким образом, пара $(\underline{\dot{x}}, \underline{u})$ является наименьшей в множестве $\mathrm{DSol}_f^U(B)$. Теорема доказана.

Отметим, что представление компонент f_i, $i = \overline{1,n}$, функции f в виде (25) имеет место для управляемой системы в скалярном случае, т.е. при $n = k = 1$, а также для управляемой системы

$$\dot{x} = g(t, x, \dot{x}, u), \quad t \in [a,b],$$

с функцией $g : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Для таких управляемых систем из теоремы 5 несложно вывести условия существования траектории с наименьшей производной и наименьшего управления.

Результаты пп. 1 и 3 получены первым автором при поддержке Российского научного фонда (проект № 20-11-20131, https://rscf.ru/project/23-11-45014/). Результаты пп. 2 и 4 получены вторым автором при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-11-20020, https://rscf.ru/project/23-11-20020/).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арутюнов А.В., Асеев С.М., Благодатских В.И.* Необходимые условия первого порядка в задаче оптимального управления дифференциальным включением с фазовыми ограничениями // Мат. сб. 1993. Т. 184. № 6. С. 3–23.
2. *Mordukhovich B.S.* Varitional Analysis and Generalized Differentiation II. Application. Berlin, 2006.
3. *Давыдов А.А.* Нормальная форма дифференциального уравнения, не разрешённого относительно производной в окрестности его особой точки // Функц. анализ и его прил. 1985. Т. 19. № 2. С. 1–10.
4. *Davydov A., Ishikawa G., Izumiya S., Sun W.-Z.* Generic singularities of implicit systems of first order differential equations on the plane // Japanese J. of Math. 2008. V. 3. № 1. P. 93–120.
5. *Ремизов А.О.* Неявные дифференциальные уравнения и векторные поля с неизолированными особыми точками // Мат. сб. 2002. Т. 193. № 11. С. 105–124.
6. *Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* О точках совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах // Докл. РАН. 2013. Т. 453. № 5. С. 475–478.
7. *Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* Точки совпадения многозначных отображений в частично упорядоченных пространствах // Докл. РАН. 2013. Т. 453. № 6. С. 595–598.
8. *Иоффе А.Д.* Метрическая регулярность и субдифференциальное исчисление // Успехи мат. наук. 2000. Т. 55. № 3. С. 103–162.
9. *Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С.* Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешённым относительно производной // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613–634.

10. *Жуковский Е.С., Мерчела В.* О накрывающих отображениях в обобщённых метрических пространствах в исследовании неявных дифференциальных уравнений // Уфимский мат. журн. 2020. Т. 12. № 4. С. 42–55.
11. *Арутюнов А.В., Жуковская З.Т., Жуковский С.Е.* Антипериодическая краевая задача для неявного обыкновенного дифференциального уравнения // Вестн. рос. ун-тов. Математика. 2022. Т. 27. № 139. С. 205–213.
12. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology and its Appl. 2015. V. 179. № 1. P. 13–33.
13. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Coincidence points principle for set-valued mappings in partially ordered spaces // Topology and its Appl. 2016. V. 201. P. 330–343.
14. *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Докл. РАН. 2007. Т. 416. № 2. С. 151–155.
15. *Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* Точки совпадения и обобщённые точки совпадения двух многозначных отображений // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 2020. Т. 308. С. 42–49.
16. *Жуковский Е.С.* Об упорядоченно накрывающих отображениях и неявных дифференциальных неравенствах // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 12. С. 1610–1627.
17. *Жуковский Е.С.* Об упорядоченно накрывающих отображениях и интегральных неравенствах типа Чаплыгина // Алгебра и анализ. 2018. Т. 30. № 1. С. 96–127.
18. *Бенараб С., Жуковская З.Т., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* О функциональных и дифференциальных неравенствах и их приложениях к задачам управления // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1471–1482.
19. *Бенараб С.* Двусторонние оценки решений краевых задач для неявных дифференциальных уравнений // Вестн. рос. ун-тов. Математика. 2021. Т. 26. № 134. С. 216–220.
20. *Бенараб С.* О теореме Чаплыгина для неявного дифференциального уравнения n-го порядка // Вестн. рос. ун-тов. Математика. 2021. Т. 26. № 135. С. 225–233.
21. *Zhukovskiy E.S., Serova I.D., Panasenko E.A., Burlakov E.O.* On order covering set-valued mappings and their applications to the investigation of implicit differential inclusions and dynamic models of economic processes // Adv. in Systems Sci. and Appl. 2022. V. 22. № 1. P. 176–191.
22. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М., 2016.
23. *Арутюнов А.В.* Лекции по выпуклому и многозначному анализу. М., 2014.
24. *Серова И.Д.* Суперпозиционная измеримость многозначной функции при обобщённых условиях Каратеодори // Вестн. рос. ун-тов. Математика. 2021. Т. 26. № 135. С. 305–314.
25. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1981.

Тамбовский государственный университет
имени Г.Р. Державина,
Институт проблем управления
имени В.А. Трапезникова РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 18.05.2023 г.
После доработки 18.05.2023 г.
Принята к публикации 20.07.2023 г.