

УДК 544.652

ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ ПРИ ВРАЩЕНИИ ВНУТРЕННЕГО ЦИЛИНДРА

© 2019 г. Дж. Ньюмен*

Калифорнийский Университет, Беркли, Калифорния, 94720-1462 США

*e-mail: newman@newman.cchem.berkeley.edu

Поступила в редакцию 14.06.2018 г.

После доработки 13.07.2018 г.

Принята к публикации 27.08.2018 г.

Диссипационная теорема дает прекрасный способ описания турбулентного массопереноса в системе с вращающимся цилиндром, хотя все же остается необходимость определения параметров путем фитинга с экспериментальными данными. К сожалению, имеющиеся экспериментальные данные содержат расхождения, которые мешают развитию теории. Настоящая работа – часть долгосрочной программы приложения предсказаний диссипационной теоремы к системам, варьирющимся от потока в трубе и вращающихся цилиндров до развитых потоков на вращающемся диске или на плоской пластинке в месте падения потока, для которых имеется широкий круг экспериментальных данных. Оказывается, что значения вихревой вязкости должны накладываться друг на друга, если разделить их на параметр напряжения K^+ для того, чтобы получить когерентное поведение при очень больших числах Рейнольдса. Новый подход здесь – использовать данные по массопереносу в качестве замены при отсутствии данных о величине крутящего момента. Показано, что данные Айзенберга и Мора не составляют когерентного единства данных, несмотря на то, что они были получены на одном и том же приборе и в одной и той химической системе. Для снятия этих противоречий требуются новые экспериментальные данные. Диссипационная теорема, как предполагается, улучшит наше понимание турбулентности и позволит предсказывать ее поведение в различных системах. Следующая стадия – ее применение к развитым потокам на плоской пластинке и на вращающемся диске.

Ключевые слова: механика жидкостей, турбулентность, рассеяние, массоперенос, вращающийся цилиндр

DOI: 10.1134/S0424857019010110

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] вводится понятие диссипационной теоремы и дается ее приложение к данным о массопереносе в системе вращающегося цилиндра, а именно к данным Айзенберга и данным Мора. В работе [2] эти концепции распространены на турбулентный поток в трубе. Еще больше информации о турбулентном потоке в трубе дается в работе [3]. В настоящей работе мы вновь обращаемся к системе вращающегося цилиндра, будучи обогащены опытом рассмотрения турбулентного потока в трубе. Показатель степени, используемый в расходимости, пусть остается равным 1, поскольку он подходит к цилиндрической геометрии, а не 5, как для вращающихся цилиндров или -1 для потока в трубе. Результаты для вихревой вязкости должны накладываться друг на друга для различных значений уровня напряжения (по крайней мере, при больших числах Рейнольдса), и в довершение в член затухания вводятся члены с экспонентами p и q для радиаль-

ного положения и для уровня напряжения. Мы также получили информацию о том, как в вычислениях могут возникать отрицательные значения вихревой вязкости и как их можно избежать. Предполагается ввести аналогичные изменения в подход к вращающимся цилиндрам и, в особенности, получить лучшее согласие между теорией и экспериментальными данными работы [1], в которых как наклон графика зависимости числа Стантона от числа Рейнольдса, так и разброс различных значений k , отношения внутреннего радиуса к внешнему, слишком малы.

Тонкие зазоры. Радиус R_i – это искусственный параметр для тонких зазоров; сюда относятся только толщины зазоров $R_o - R_i$. Поэтому (как в работе [1]) используется модифицированное число Рейнольдса $Re_m = k Re_g = (1 - k) Re_i$, и таким образом охватывается вся область k . По аналогичной причине используется параметр напряжения (параметр, определяющий характер протека-

ния процесса в зависимости от механического воздействия):

$$R_m^+ = \text{Re}_m \sqrt{\frac{f}{2}} = (1 - \kappa) R_i^+ = (1 - \kappa) \frac{R_i}{v} \sqrt{\frac{\tau_i}{\rho}}, \quad (1)$$

где τ_i – напряжение $\tau_{r\theta}$ на внутреннем, вращающемся цилиндре.

Отдельный вращающийся цилиндр. Другой экстремальный случай наблюдается, когда внешний цилиндр отстоит очень далеко от внутреннего. В работе [4] выведена формула для крутящего момента на единственном вращающемся цилиндре:

$$\frac{1}{\sqrt{C_D}} = -0.6 + 4.07 \lg(\text{Re}_i \sqrt{C_D}). \quad (2)$$

Закон универсального сопротивления. Соотношения, связывающие коэффициент трения, вихревую вязкость, объемное рассеяние, число Рейнольдса и параметр напряжения, определены и развиты в работах [1–3]. Коэффициент трения f можно получить, интегрируя вихревую вязкость $v^{(t)}$. Как показали Никурадзе [5] и его предшественники, если отложить зависимость обратной величины корня квадратного из коэффициента трения от логарифма числа Рейнольдса, помноженного на корень квадратный из коэффициента трения, то получится прямая линия. Запишем это, как

$$\sqrt{\frac{2}{f}} = A + B \ln(R_m^+). \quad (3)$$

Такая форма идентична уравнению (2), но записана иначе. Этот результат, действительно, применим к большим значениям числа Рейнольдса или параметра напряжения, но Никурадзе применил его к своим экспериментальным данным, касающимся течения в трубе, вплоть до $R^+ = 112$. Согласно работе [4], прямая линия простирается до значения R_i^+ около 100. Вышеприведенная формула широко обсуждается в работе [3]. Для случая вращающихся цилиндров параметры A и B могут зависеть от отношения радиусов κ .

Исходная точка – это интеграл для системы вращающихся цилиндров,

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{f}} &= R_i^+ \int_1^{1/\kappa} \frac{d\xi}{\xi^3 (1 + v^{(t)}/v)} = \\ &= \frac{R_m^+}{1 - \kappa} \int_1^{1/\kappa} \frac{d\xi}{\xi^3 (1 + MR_m^+)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Для течения в трубе ξ^3 оказывается в числителе подынтегрального выражения вместо того, чтобы быть в его знаменателе; пределы интегрирования таковы: от $\xi = 0$ до $\xi = 1$. Величина M определена, как $v^{(t)}/vR_m^+$. При значительном уровне турбулентности единицей в знаменателе подынте-

грального выражения можно пренебречь, и коэффициент трения оказывается не зависящим от числа Рейнольдса. Однако M падает до нуля на обеих твердых стенках, и интеграл становится сингулярным. Эта трудность разрешается в формуле однородного сопротивления (3) (см. работу [3]).

Определяющие уравнения. Примем

$M = v^{(t)}/vR_m^+$, $D = \mu \mathcal{D}_V / \tau_i^2$, $\xi = r/R_i$, а $\phi = \ln(D)$. В безразмерной форме соотношение между рассеянием и вихревой вязкостью для вращающихся цилиндров таково:

$$D = \frac{1}{(1 + MR_m^+) \xi^4}. \quad (5)$$

Предлагаемое дифференциальное уравнение, определяющее объемное рассеяние, таково:

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\xi^3} \frac{\partial \ln D}{\partial \xi} \right) = \Lambda \frac{D^n}{\xi^p (R_m^+)^q} + \frac{16}{\xi^6}. \quad (6)$$

$\Lambda = \text{Coef}(R_m^+)^{2n-2}$ – это безразмерная константа скорости для затухания рассеяния, $\phi = 0$ при $\xi = 1$, $\phi = 4 \ln(\kappa)$ при $\xi = 1/\kappa$. Распределение полного напряжения по радиальному расстоянию r для течения в трубе можно записать, как

$$\bar{\tau}_{rz} = \tau_0 r / R. \quad (7)$$

Для вращающихся цилиндров оно обратно пропорционально r^2 :

$$\bar{\tau}_{r\theta} = \tau_i R_i^2 / r^2. \quad (8)$$

Это различие есть причина различия в определяющих уравнениях (5) и (6), а также уравнении (4). Легко показать на основе уравнения (8), что $R_o^+ = (R_o/v) \sqrt{\tau_o/\rho} = R_i^+$ и что поэтому его можно сократить до R^+ . Однако по причинам, приведенным выше, R_m^+ здесь на своем месте. В работе [3] дано твердое свидетельство того, что показатель степени равняется $n = 2$, и предполагается, что член затухания также может содержать член, линейный по D , как в замене D^n величиной $D^n + \epsilon D$, где $\epsilon = 0.33/R_m^+$.

Для ламинарного течения $D = \xi^2$ в течении в трубе, а для вращающихся цилиндров $D = 1/\xi^4$. Последний член в уравнении (6) добавлен для того, чтобы результат для ламинарного течения был бы решением этого уравнения, а p и q добавлены для того, чтобы обеспечить гибкость. Согласно урокам работы [2], их предпочтительные значения таковы: $n = p = q = 2$. Вспомним, что Λ уже содержит зависимость от R_m^+ . Добавленный в уравнение (6) член, может быть, не имеет сколько-нибудь большого практического значения, в особенности для коэффициента трения при больших числах Рейнольдса.

Данные Никурадзе [5] для течения в трубе предполагают, что вихревая вязкость в потоке в трубе может быть аппроксимирована, как $\nu^{(i)}/\nu R_m^+ = 0.32\xi(1 - \xi)$. Аналогично, для вращающихся цилиндров можно предположить, что $\nu^{(i)}/\nu R_m^+ = C(\xi - 1)(1/\kappa - \xi)$, таким образом, сходя к нулю на двух твердых поверхностях. Здесь C может зависеть от κ .

Из работы [2] известно, что для течения в трубе величина p должна равняться $2(n - 1)$, с тем чтобы поддержать существование зависимости от r вблизи центральной линии, а величина q должна равняться $3n - 4$ для того, чтобы поддержать конгруэнтность кривых вихревой вязкости, деленной на R^+ . Необходимо узнать, какие закономерности применимы к вращающимся цилиндрам. Ясно, что нам нужны кривые зависимости f от Re , гладкие и сохраняющие хорошее поведение при больших значениях Re и таким образом демонстрирующие предельное поведение, которое не зависит от вязкости, как это установил Никурадзе для течения в трубе. Мы видим, что основное различие между вращающимися цилиндрами и течением в трубе заключается в радиальной зависимости общего напряжения.

[До тех пор, пока мы имеем дело лишь с величиной κ , т.е. отношением радиусов, различие между R_i^+ и R_m^+ не существенно. Однако, данное исследование сфокусировано на определении, как турбулентность зависит от κ . В конце концов, нам нужна ясность в вопросе о том, где появляется κ , но иногда используют величину R_i^+ , потому что она присутствует в компьютерной программе и *a priori* имеет ясное определение.]

Рисунок 1 показывает, до какой стадии мы дошли в данном исследовании.

РАЗВИТИЕ

С тех пор, когда Никурадзе показал, что для течения в трубе зависимость обратной величины корня квадратного из коэффициента трения от логарифма числа Рейнольдса, помноженного на корень квадратный из коэффициента трения, выражается прямой линией, и этот метод был использован в работе [4] для представления данных по вращающему моменту для единичного вращающегося цилиндра [см. уравнение (2)], его следует также применять и к системе вращающихся цилиндров. Как Айзенберг, так и Мор не измеряли вращающий момент в системе вращающихся цилиндров и не дали значений коэффициента трения. Однако, в пределе больших чисел Шмидта число Стантона связано с коэффициентом трения следующим уравнением:

$$StSc^{2/3} = \left[(B^+)^{1/3} / 1.2092 \right] (f/2)^{1/2}. \quad (9)$$

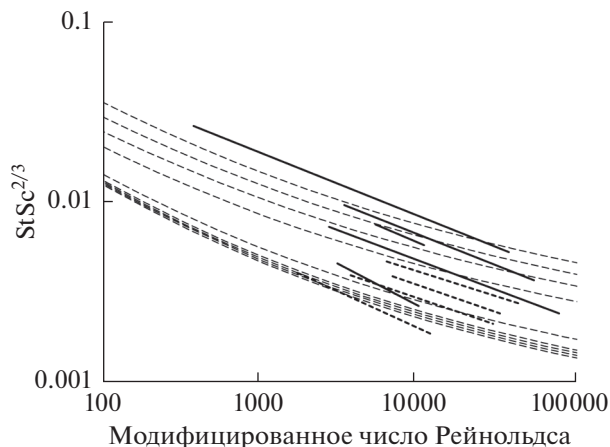


Рис. 1. Число Стантона как функция модифицированного числа Рейнольдса, как это использовано в работе [1]. Сплошные линии представляют пять наборов экспериментальных данных Мора, длина линии представляет область охваченных чисел Рейнольдса. Пунктирные кривые вычислены по диссипационной теореме с использованием одного набора параметров: $n = q = 2, p = -4, Coef = 0.01$ и $B^+ = 0.003$. Значения $(1 - \kappa)$ (сверху вниз): 0.871, 0.7487, 0.633, 0.491, 0.1723, 0.0839, 0.606, 0.0393 и 0.0172, в этом порядке, за исключением 0.1723, которому соответствует нижняя сплошная линия.

Это означает, что прямая линия получится, если отложить $1/StSc^{2/3}$ против логарифма числа Рейнольдса Re_m , помноженного на $StSc^{2/3}$. Это продемонстрировано на примере оригинальных экспериментальных данных на рис. 2.

Существует естественное предположение, что коэффициент турбулентной диффузии равен турбулентной кинематической вязкости, $D^{(i)} = \nu^{(i)}$. Теоретические результаты, имеющиеся в литературе, говорят о том, что это предположение может выполняться лишь приближенно. В лучшем случае одна величина может быть пропорциональна другой, но даже их отношение может меняться с положением в пространстве. Редко удается найти данные для этих двух величин, измеренные одновременно. При больших числах Шмидта выражение, подобное уравнению (9), можно использовать для того, чтобы сделать вывод о величине коэффициента турбулентной диффузии. Этими соображениями можно объяснить наблюдение, сделанное ниже в настоящей работе, о том, что значение B^+ , найденное из измерений массопереноса, существенно отличается от полученного из измерений вращающегося момента (см. раздел "Расхождения").

Значения наименьших квадратов наклонов этих кривых и отрезков, отсекаемых ими на оси, b и a , даны в табл. 1 вместе с характеристикой качества фитинга σ и значениями $Coef$ и B^+ , использованными при расчете близких аппроксимаций

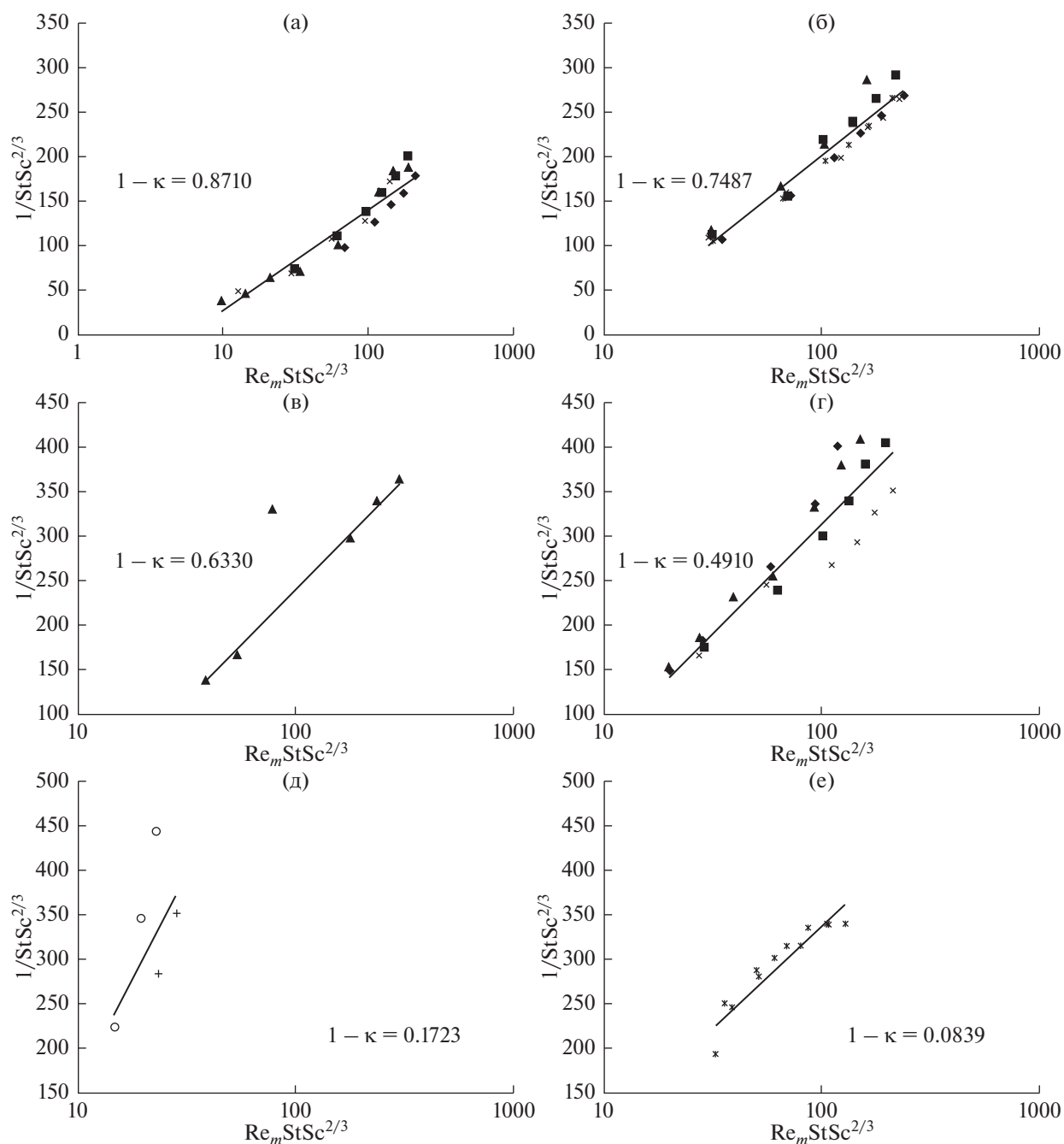


Рис. 2. Экспериментальные данные Айзенберга (от а до е) и Мора (от ж до и), представленные в форме графика $1/StSc^{2/3} = a + b \ln(Re_m StSc^{2/3})$; наилучшие параметры фитинга даны в табл. 1 вместе со значениями $Coef$ и B^+ , которые дают наилучшее согласие для индивидуальных значений κ .

прямых на рис. 2 на основе диссипационной теоремы. Дополнительный член в уравнении (6) сохранен, хотя бы он и не имел какого-либо значения. Область чисел Рейнольдса, охваченная в этих экспериментах, в действительности не очень широка. Никуда не приложил много усилий для того, чтобы довести число Рейнольдса в своих экспериментах с течениями в трубе до 3×10^6 , с тем чтобы исследовать их поведение при действи-

тельно больших числах Рейнольдса. В данных, представленных рис. 2, не видно явных искривлений, за исключением может быть одного при $1 - \kappa = 0.871$.

На рис. 3 показаны профили вихревой вязкости, вычисленные с помощью диссипационной теоремы. Видно, что они накладываются друг на друга при больших значениях R_i^+ , а при меньших

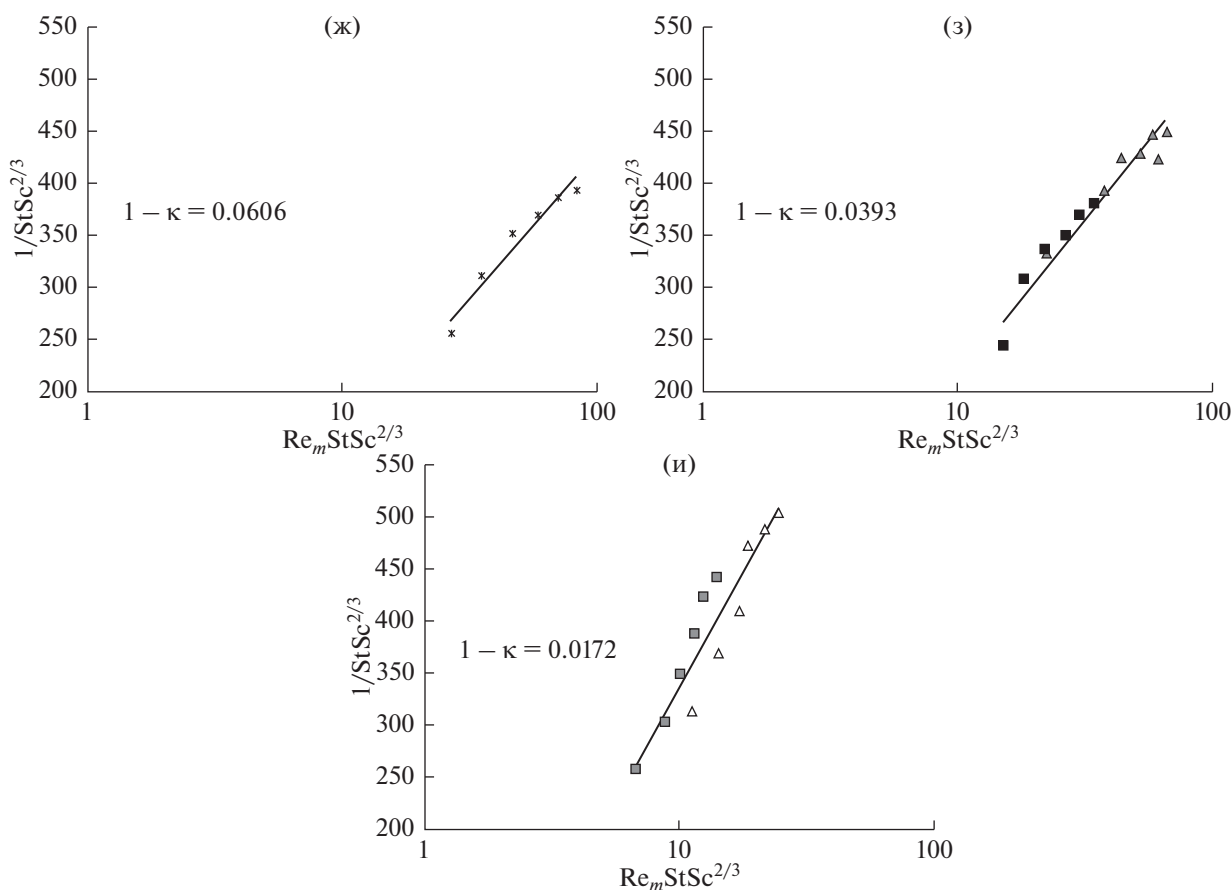


Рис. 2. Окончание.

значениях они сдвигаются вниз. Напротив, экспериментальные данные Никурадзе для более низких значений R^+ ложатся выше предельной кривой при больших R^+ для течений в трубе.

На рис. 4 показаны профили объемного рассеяния, умноженного на ξ^4 для того, чтобы привести их к единице на внешнем цилиндре. Логарифмическая шкала показывает, что кривые похожи друг на друга по форме, за исключением области вблизи цилиндра, где установлены граничные условия. Таким образом, в общем случае рассеяние обратно пропорционально R^+ . Как установлено в работе [1], в турбулентном потоке рассеяние наблюдается главным образом вблизи внутреннего цилиндра, как в течении в трубе. Другими словами, рассеяние устанавливается на стенках, но вращающий момент велик, если при этих больших числах Рейнольдса может превалировать ламинарное распределение.

Рисунок 5 показывает вычисленный параметр B_1^+ на внутреннем и внешнем цилиндрах. Это наклон профилей вихревой вязкости на твердой стенке, если не принимать в расчет вязкий подслои. Как и в работе [1], кривые поднимаются с

ростом уровня напряжения, а затем выравниваются. В отличие от работы [1], здесь эти значения остаются на том же уровне даже при больших зна-

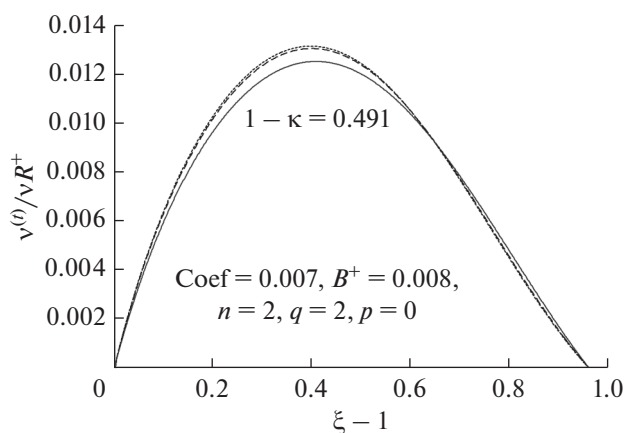


Рис. 3. Профили $v^{(t)}/vR^+$ как функция $(\xi - 1)$ для нескольких значений R_i^+ и для $(1 - \kappa) = 0.491$. Верхняя точечная кривая: $R_i^+ = 16399$, пунктирная кривая: $R_i^+ = 3049$, сплошная кривая: $R_i^+ = 567$.

Таблица 1. Значения параметров для рис. 2; $(1 - \kappa)$ – размер зазора, a – отрезок, отсекаемый кривыми на оси, b – наклон фитинга $1/StSc^{2/3} = a + b \ln(Re_m StSc^{2/3})$, σ – характеристика качества фитинга, а $Coef$ и B^+ – параметры, использованные в компьютерной программе на основе диссипационной теоремы. Эта таблица есть дополнение к табл. I в работе [1]; в обеих таблицах используются одни и те же экспериментальные данные, но их фитинг проведен разными способами

$1 - \kappa$	a	b	σ	$Coef$	B^+
0.8710	-88.7	49.6	0.0920	0.030	0.004
0.7487	-184.5	83.9	0.0256	0.010	0.007
0.6330	-261.4	109.0	0.0010	0.007	0.0085
0.4910	-179.8	107.4	0.0485	0.007	0.008
0.1723	-307.9	203.7	0.0561	0.003	0.009
0.0839	-122.4	100.0	0.0140	0.012	0.0125
0.0606	-141.5	124.6	0.0027	0.008	0.011
0.0393	-70.7	126.5	0.0079	0.010	0.0059
0.0172	-106.2	193.8	0.0184	0.0065	0.0032

чениях R^+ . Это имеет отношение к наложению профилей вихревой вязкости, измеренных Никурадзе для течений в трубе. Таково одно из усовершенствований по сравнению с течением в трубе, необходимое для вращающихся цилиндров.

На рис. 6 показан наилучший фитинг для всех значений отношения радиусов κ , с параметрами $Coef$ и B^+ , подобранными для каждого отношения и приведенных в табл. 1. Он аналогичен показанному на рис. 1, но здесь график построен согласно формуле универсального сопротивления, а не в билогарифмической системе.

Остальные рисунки (не показанные здесь) дают некоторую идею насчет того, что можно полу-

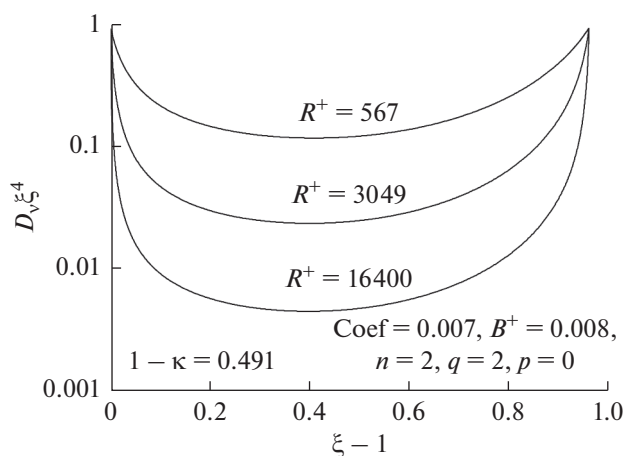


Рис. 4. Значения D , помноженные на ξ^4 для того, чтобы привести их вновь к единице на внешнем цилиндре.

чить, меняя параметры, но поддерживая их единообразными при всех значениях κ . Это не дало удовлетворительного согласия для всех кривых, но это также не дало сколько-нибудь значительного дополнительного проникновения в суть проблемы. Рисунок 7 предлагает хороший компромисс для параметров, но держит их единообразными при всех значениях κ . Разброс для всех значений κ почти правильный, и кривые для всех зазоров (данные Айзенберга, согласно которым $(1 - \kappa)$ превышает 0.17) пересекают экспериментальные кривые, даже если они имеют отличающийся наклон. Однако, разброс кривых для узких зазоров (данные Мора) сильно отличается от экспериментальных кривых, и они даже накладываются на них при $(1 - \kappa) = 0.1723$. При увеличении $Coef$ наклон рассчитанных кривых, в общем, уменьшается, в то время как увеличение B^+ снижает всю кривую. Значения $Coef$ и B^+ , использованные здесь, существенно отличаются от ожидаемых на основании проанализированных нами данных по вращающему моменту (см. Приложение А).

Становится ясно, что данные и Айзенберга, и Мора не составляют единого, самосогласованного набора данных. Это особенно ясно видно, если приложить к этим данным некоторый эмпирицизм. Из табл. I работы [1] следует, что степенная зависимость числа Стантона от числа Шмидта имеет показатель степени около $-2/3$; он отличается от теоретического значения всего лишь на ~ 0.01 , что в некотором смысле понятно из известной зависимости от числа Шмидта для случая ламинарного течения. Рисунок 1 в настоящей работе и табл. I работы [1] показывают, что эти кривые

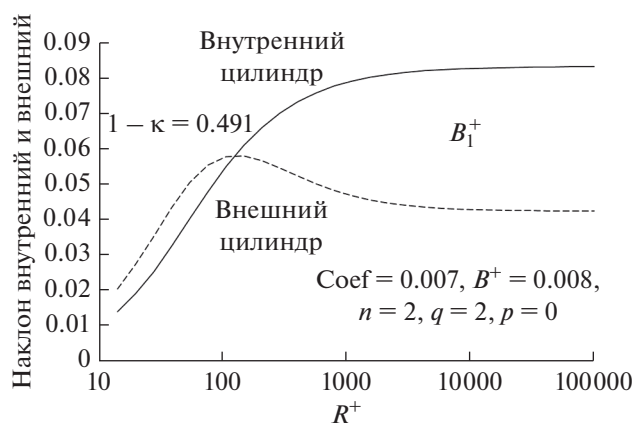


Рис. 5. Наклоны профилей вихревой вязкости вблизи стенки, но за пределами вязкого подслоя. Очевидно, что они должны расти от нуля и выходить на плато. В работе [1] они начинают вновь расти справа, что может быть связано с плохим коэффициентом трения при больших числах Рейнольдса. Этого можно избежать с помощью наложения профилей вихревой вязкости друг на друга.

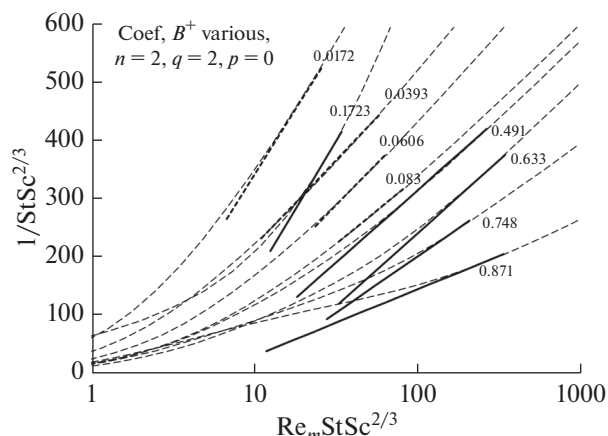


Рис. 6. Сравнение результатов, полученных для диссипационной теоремы и массопереноса. Для получения хорошего согласия (в частности, справа) были использованы два подгоночных параметра. Кривые загибаются слева с тем, чтобы избежать отрицательных значений. Невозможно добиться согласия при всех значениях κ , имея только одно значение Coef и одно значение B^+ . Данные Мора представлены точечными линиями, а данные Айзенберга – сплошными.

имеют одинаковые наклоны для зависимости от числа Рейнольдса, меняясь случайным образом, приблизительно на -0.3 . Поэтому для получения зависимости числа Стантона от отношения зазоров, рассчитанной для каждой экспериментальной точки (всего 134 точки), следует отложить $StSc^{2/3} Re_m^{0.3}$, как функцию $(1 - \kappa)$, как это сделано на рис. 8.

Показатель степени, который следует использовать при числе Рейнольдса, вероятно, постепенно слегка изменяется с размером зазора $(1 - \kappa)$, но табл. I работы [1] показывает, что наилучший показатель степени, который следует использовать, существенно изменяется с $(1 - \kappa)$, так что нелегко определить, какова величина этого “слегка”. Результирующая величина, отложенная на рис. 8, должна поэтому наиболее сильно зависеть от самой величины $(1 - \kappa)$. Графики весьма информативны; разброс для каждого конкретного значения $(1 - \kappa)$ связан частично с разностью между показателем степени 0.3, использованным для Re_m , и более подходящим его значением, данным в табл. I работы [1], а частично – с тем фактом, что предсказания диссипационной теоремы дают наклон, меняющийся с числом Рейнольдса (см. рис. 7). Однако, здесь видны две существенно различных тенденции: одна – для данных Мора (небольшие значения $(1 - \kappa)$), а вторая – для данных Айзенберга.

[Это различие между двумя наборами данных существует уже 3 года. Его можно представить различными способами, такими, например, как графики зависимости $StSc^{2/3} Re$ или $NuSc^{2/3}$ от Re .

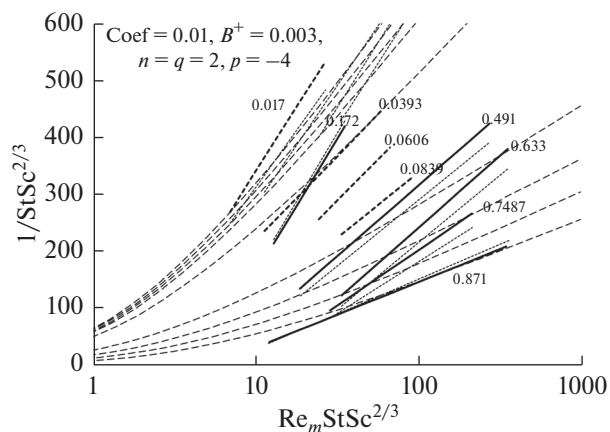


Рис. 7. Наилучший фитинг, достижимый с одним только значением каждого параметра. Хороший наклон получается при $(1 - \kappa) = 0.871$, но он становится слишком низким для более тонких зазоров. Разброс относительно нормальный, но расстояние между точками не согласуется с данными. Для того, чтобы получить разброс данных Мора, могут понадобиться отдельные значения B^+ для каждой ширины зазора, см. табл. 1. Расстояние между точками для данных Айзенберга относительно неплохое, но основная слабость обоих наборов данных – плохое их перекрывание. Значения Coef и B^+ отличаются от тех, что получены из данных по коэффициенту трения, см. Приложение А. Для каждого значения κ число Стантона следует умножить на такой множитель, который сдвигает точку пересечения с пунктирной кривой к полусумме крайних значений. Результаты, полученные после умножения на этот фактор, показаны точечными прямыми. Для того, чтобы оказаться в середине пунктирных кривых, были использованы такие множители: 0.94, 1.07, 1.07, 1.07, 0.98, 0.52, 0.63, 0.7 и 1.12 (от 0.871 до 0.0172).

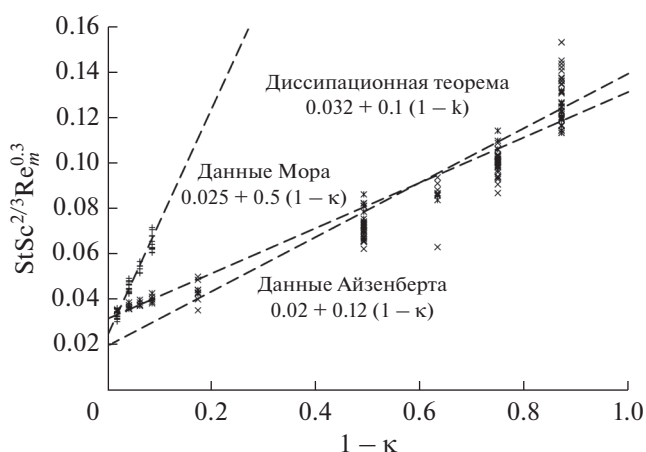


Рис. 8. Данные Айзенберга и данные Мора, отложенные как функция ширины зазора с тем, чтобы показать, что эти два набора данных сильно различаются. Приведены все данные, включая и выпадающую точку при $(1 - \kappa) = 0.633$, показанную также на рис. 2в. Показаны также предсказания диссипационной теоремы, с использованием тех же результатов, что и на рис. 7.

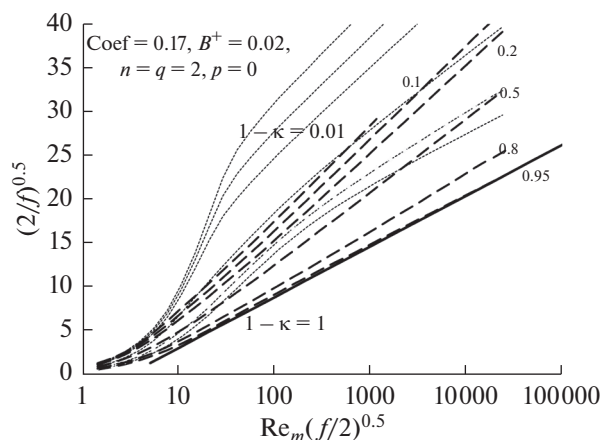


Рис. А1. Рассчитанные коэффициенты трения для вращающихся цилиндров. Значение Coef положено равным 0.17 для того, чтобы получить согласие с экспериментальными данными работы [4] для $\kappa = 0$ (сплошная линия). Затем были вычислены кривые для многих значений $(1 - \kappa)$. Широкие зазоры при $(1 - \kappa) > 0.2$ демонстрируют медленный рост, приводя в конце концов к более крутым наклонам. Такое поведение представляет интерес для получения большей ясности в поведении узких зазоров. График зависимости от $Re_m(f/2)^{0.5}$ прекрасно демонстрирует предел как для малых, так и для больших значений $(1 - \kappa)$, причем линии не пересекаются. При $B^+ = 0.02$ (пунктирные кривые) вязкий подслои не оказывает существенного влияния, и получаются, в основном, прямые линии. Светлые пунктирные линии добавлены для того, чтобы показать влияние изменения B^+ от 0.02 до 0.0005. (Для этих кривых значения $(1 - \kappa)$ такие же, что и для $B^+ = 0.02$, и имеют тот же порядок величины.) Ордината увеличивается до существенно более высоких значений (более низкое трение), сравн. рис. 5 работы [3].

Эта информация лучше видна из рис. 8. Другой способ представить это различие — график ординаты на рис. 8, деленной на $(1 - \kappa)^{0.3}(1.25 - \kappa)$, как функция Re_m . Здесь получаются две отдельных горизонтальных линии, но опять-таки рис. 8 показывает это яснее и нагляднее.]

РАСХОЖДЕНИЯ

По мере развития работы над диссипационной теоремой существенно уменьшилось появление заметных расхождений. Одно из остающихся — то, что данные Айзенберга и данные Мора не гармонируют друг с другом, и это вносит неуверенность в интерпретацию. Получаются не самосогласованные параметры. Другое расхождение заключается в том, что одни и те же параметры, полезные при расчетах трения, не согласуются с параметрами, используемыми при интерпретации результатов по массопереносу. Причиной этого последнего расхождения может быть “врожденное” различие между коэффициентом турбу-

лентной диффузии и турбулентной кинематической вязкостью, как показывает уравнение (9).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для подтверждения или опровержения выводов развиваемой в данной работе теории были бы полезны дополнительные тщательные эксперименты в обеих областях — трения и массопереноса. Тогда, возможно, в эту теорию можно будет внести подходящие уточнения. Величины вихревой вязкости, деленные на R^+ , должны накладываться друг на друга, если стремиться к согласованному поведению при очень больших числах Рейнольдса.

ПРИЛОЖЕНИЕ А. СФОКУСИРУЕМСЯ НА ТРЕНИИ

Используем диссипационную теорему для фитинга результатов работы [4] по вращающему моменту для одиночных цилиндров [см. уравнение (2)]. Здесь мы используем диссипационную теорему для предсказания коэффициента трения при значениях κ в области вплоть до 1, т.е. в пределе тонкого зазора. Результаты показаны на рис. А1.

Наклоны демонстрируют постоянное продвижение вперед по мере утоньшения зазора. Данные Айзенберга могут не подтверждать то, что ожидается для тонких зазоров, потому что, в действительности, они получены для толстых зазоров. Рисунок А1 содержит предсказание коэффициента трения для очень тонких зазоров, основываясь на данных для очень широкого зазора.

Полезно было бы исследовать, что произойдет, если значение p меняется от 0 до 2, или -4 , или -2 , потому что это — степень свободы при фитинге экспериментальных данных. Изменение p до -4 увеличивает разброс кривых для различных значений κ ; величина p оказывает пренебрежимо малое влияние при тонких зазорах и может быть не слишком важной при толстых зазорах.

В работе [6] приводятся данные по коэффициенту трения для вращающихся цилиндров. Это должно стать важным дополнением для нашей продолжающейся работы по массопереносу в этой системе. На рис. А2 показаны данные для трех различных по ширине зазоров.

Даже после исследования этой системы в течение 2 или 3 лет у меня сложилось весьма смутное представление о том, где должны лежать новые результаты. Мы пришли к заключению о том, что наилучшее значение n — это 2, а для систем с трубой q и p должны тоже равняться 2. Для этой системы p может быть -4 ; это заключение основано на некоторой догадке о связи с распределением напряжений в этой системе.

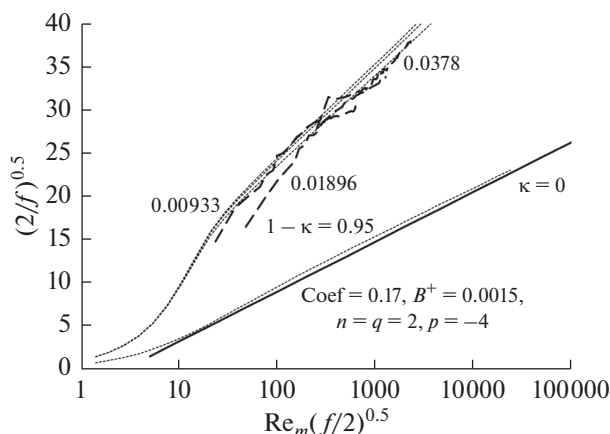


Рис. А2. Данные из работы [6] по коэффициенту трения для течения в воздухе для системы с внутренним цилиндром (с радиусом 6.0025 дюйма), вращающимся при ширине зазора $(1 - \kappa)$, равной 0.00933, 0.01896 и 0.0378; график построен по типу закона универсального сопротивления. Модифицированное число Рейнольдса равно $Re_m = \kappa Re_g$, где Re_g — это число Рейнольдса, основанное на ширине зазора. Для перспективы результаты дополнены взятыми из работы [4] данными для трения с единичным цилиндром в большом контейнере ($\kappa = 0$). Показаны также результаты для диссипационной теоремы с параметрами, приведенными на этом рисунке. Рассчитанные кривые для каждого из отношений зазоров также добавляют перспективы. Кривые для узких зазоров лежат выше кривых для широких зазоров.

Два еще более важных параметра — это $Coef$ и B^+ . Первый из них — это коэффициент для члена затухания—рассеяния, а второй относится к вязкому подслою в непосредственной близости от твердой стенки. График на рис. А1, охватываю-

щий полный спектр значений κ , оказывается весьма полезным, так как он дает гораздо более твердую идею использовать релевантные значения при попытках скоррелировать данные Айзенберга и данные Мора по массопереносу с диссипационной теоремой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Newman, J., Theoretical Analysis of Turbulent Mass Transfer with Rotating Cylinders, *J. Electrochem. Soc.*, 2016, vol. 163, p. E191.
2. Newman, J., Application of the Dissipation Theorem to Turbulent Flow and Mass Transfer in a Pipe, *Russ. J. Electrochem.*, 2017, vol. 53, p. 1061.
3. Ньюмен, Дж. Развитие представлений о турбулентном течении в трубе. *Электрохимия*. 2019 (принято к печати). [Newman, J., Further Thoughts on Turbulent Flow in a Pipe, *Russ. J. Electrochem.*, 2019 (in press).
4. Theodorsen, T. and Regier, M., *Experiments on Drag of Revolving Disks, Cylinders, and Streamline Rods at High Speeds*, National Advisory Committee for Aeronautics, Report № 793, 1944.
5. Nikuradse, J., Gesetzmässigkeitern der turbulentem Strömung in glatten Rohren, *Forschungsheft 356*, Beilage zu *Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens*, Edition B, vol. 3, September/October, 1932 (Berlin: VDI-Verlag GMBH, 1932). Translated as J. Nikuradse, "Laws of Turbulent Flow in Smooth Pipes," NASA TT F-10, 359 (Washington: National Aeronautics and Space Administration, October, 1966).
6. Gorland, S.H., Kempke, E.E., Jr., and Lurnannick, S., *Experimental Windage Losses for Close Clearance Rotating Cylinders in the Turbulent Flow Regime*, Cleveland, OH: Lewis Research Center, June, 1970. NASA Technical Memorandum, NASA TM X-52851.