

ГОДОГРАФ ИМПЕДАНСА ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ RC -ЦЕПИ С ПЕРЕМЕННЫМ АКТИВНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ¹

© 2021 г. М. Е. Компан^а, *, В. Г. Малышкин^а, **

^аФТИ им. А.Ф. Иоффе, Санкт-Петербург, Россия

*e-mail: kompan@mail.ioffe.ru

**e-mail: malyshki@ton.ioffe.ru

Поступила в редакцию 30.11.2020 г.

После доработки 19.02.2021 г.

Принята к публикации 03.03.2021 г.

В работе рассмотрено комплексное сопротивление RC -цепи для случая, когда активное сопротивление зависит от приложенного к нему постоянного напряжения. Показано, что зависимость импеданса от приложенного напряжения в этом случае описывается новым типом годографа – полукругом, прижатой к оси мнимых значений импеданса. Приведены полученные расчетом и экспериментально годографы, подтверждающие изложенные положения. Показано, что сходство и различие форм годографов для случая $R(U)C$ и RC ($R = \text{const}$) отражает соотношение функционально связанных величин при их представлении на комплексной плоскости.

Ключевые слова: комплексная проводимость, годограф импеданса, потенциальный барьер

DOI: 10.31857/S0424857021080065

ВВЕДЕНИЕ

Графическое отображение частотной зависимости импеданса параллельной RC -цепи – наиболее известный пример в импедансной спектроскопии. В этом случае непосредственно по виду графика можно судить об эквивалентной электрической схеме, описывающей объект исследования, и даже определить некоторые параметры этой эквивалентной схемы [1, 2]. Комплексы аппаратуры, используемые при исследованиях, как и методики обработки экспериментальных данных, ориентированы именно на изучение зависимости импеданса от частоты.

В то же время для значительной части объектов эквивалентная модель с постоянными RC не является достаточно адекватным приближением. В частности, в электрохимии известен эффект электрохимического выпрямления, когда амплитуда переменного напряжения, в силу нелинейных свойств объектов, влияет на величину импеданса. В данной работе рассматривается другой эффект.

В физике твердого тела достаточно часто рассматриваются объекты, проводимость (импеданс) которых зависит от приложенного напря-

жения. Чаще всего причиной зависимости R от напряжения является наличие потенциального барьера на пути транспорта электрических зарядов. Использование аппаратуры для импедансных измерений и имеющихся методов представления данных позволяют, в том числе, выявить корреляции между действительной и мнимой компонентами импеданса, что затруднительно при раздельном измерении этих величин.

Однако необходимо подчеркнуть, что эксперименты в данной работе не относятся к спектроскопии (импедансной). Любая спектроскопия – изучение чего-либо в зависимости от частоты; в данной же работе исследуется зависимость импеданса от внешнего постоянного напряжения. Тем не менее, сами понятия “импеданс” и “годограф” являются универсальными. Для примера, допустимы построения годографа (в том числе в осях типового графика Коула–Коула) как зависимость импеданса от времени или концентрации.

Основной результат данной работы – обнаружение и объяснение необычного вида годографов при исследовании зависимости импеданса RC -цепи от внешнего постоянного напряжения. Несколько графиков частотных зависимостей импеданса для этого же объекта приведены в работе для сравнения.

¹ По материалам доклада на 15-м Международном совещании “Фундаментальные проблемы ионики твердого тела”, Черногоровка, 30.11–07.12.2020.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ

Рассмотрим, каким будет годограф импеданса RC -цепи в случае зависимости активного сопротивления от приложенного постоянного напряжения (смещения) при фиксированной частоте переменного тока. В качестве приближения будем также считать емкость C постоянной, и пока не будем рассматривать случай, когда к системе подключено последовательное сопротивление. Также, для конкретности, будем предполагать, что зависимость $R(U)$ является достаточно сильной и обеспечивает диапазон изменения R от величин, близких нулю, до экспоненциально больших, т.е. $R \rightarrow \infty$.

Адмиттанс параллельной $R_{(U)}$ C -цепи равен сумме адмиттансов элементов

$$Y_{RC} = Y_R + Y_C = 1/R_{(U)} + i\omega C, \quad (1)$$

а импеданс такого участка равен

$$Z_{RC} = (1/R_{(U)} + i\omega C)^{-1} = R_{(U)} / (1 + \omega^2 C^2 R_{(U)}^2) - i\omega C R_{(U)}^2 / (1 + \omega^2 C^2 R_{(U)}^2). \quad (2)$$

Легко оценить предельные значения импеданса при $R \rightarrow 0$ и при $R \rightarrow \infty$. Из (2) следует, что в первом предельном случае, при $R \rightarrow 0$, обе части импеданса – и действительная Z' , и мнимая Z'' стремятся к нулю. Во втором случае $R \rightarrow \infty$ действительная часть выражения (2) стремится к нулю, а мнимая часть того же выражения стремится к величине $(-i\omega C)$.

Далее воспользуемся приемом Слеттера [3, 4], примененным им для объяснения вида годографа импеданса участка цепи с фиксированными RC .

Рассмотрим величину

$$(Z_{RC} + i\omega C/2). \quad (3)$$

Величина, определенная выражением (3), отличается на графике от исходного графика импеданса Z_{RC} сдвигом вдоль оси мнимых значений импеданса на половину значения Z при $R \rightarrow \infty$. Чтобы показать, что величина $(Z_{RC} + i\omega C/2)$ является частью окружности, необходимо доказать, что она не зависит от U и является постоянной величиной (при постоянных ω и C). Более того, ориентируясь на найденные выше предельные значения Z при $R \rightarrow 0$ и при $R \rightarrow \infty$ и величину произведенного сдвига $i\omega C/2$, можно ожидать, что тогда сумма квадратов действительной и мнимой частей выражения (3) будет равна $(i\omega C/2)^2$ – квадрату радиуса предполагаемой окружности.

Высказанные выше соображения могут быть записаны в виде равенства

$$\left[R_{(U)} / (1 + \omega^2 C^2 R_{(U)}^2) \right]^2 + \left[(i\omega C R_{(U)}^2 - i\omega C/2) / (1 + \omega^2 C^2 R_{(U)}^2) \right]^2 = (\omega C/2)^2. \quad (4)$$

Справедливость выражения (4) доказывается просто алгебраическими преобразованиями, которые мы здесь опускаем. Выражение (4) – тождество. И следовательно, с учетом найденных положений крайних точек, годограф импеданса $R_{(U)}C$ является частью (половиной) окружности, прижатой к оси мнимых значений импеданса в точках $(0, 0)$ и $(0, i\omega C)$.

Несмотря на то, что доказанное выше было получено вообще без использования каких-либо предположений, полученный результат странный – параметры окружности вообще не содержат данных о величине сопротивления. Покажем, что этот неожиданный результат, тем не менее, не является ошибкой.

ДАННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТА И ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА

Возьмем искусственные зависимости $R(U)$, такие, что начальная и конечная точки зависимостей совпадают, а ход заметно различается (рис. 1а). В расчетах использованы значения $R(\min) = 10$ Ом, $R(\max) = 10$ МОм, частота 1 кГц и емкость 1 нФ. Рассчитанный годограф импеданса показывает, что общий ход зависимостей Z'' (Z') совпадает, точки ложатся на одну полуокружность. Плотность точек и их положения, соответствующих разным исходным зависимостям $R(U)$ – разные, и это понятно, поскольку отличаются производные dR/dU для использовавшихся зависимостей 1 и 2. Более фундаментальные причины совпадения графиков годографов Z'' (Z') для разных $R(U)$ будут обсуждены в данной статье ниже.

Для экспериментального подтверждения изложенных положений выбирались объекты, имеющие сильную зависимость $R(U)$. Такого рода объектами являются различные гетероструктуры (и также обычные полупроводниковые диоды).

На рис. 2 показаны экспериментально измененные годографы структуры палладий–изолятор–полупроводник (InP). Наглядно видно, что все зависимости близки к полуокружностям, точнее – к частям полуокружностей. Последнее связано с ограниченностью допустимого напряжения смещения для таких структур. Зависимости импеданса от частоты, как хорошо известно, представляют собой полуокружности, прижатые к оси действительных значений. Это тоже наблюдается на тех же структурах. И, как указывалось выше, зависимости импеданса от напряжения при фиксированных частотах представляют собой (неполные) полуокружности, прижатые к оси ($-Z''$) – как и должно быть, как показано ранее в работе. Аналогичные кривые наблюдаются при измерении зависимости импеданса от напряжения и для обычных полупроводниковых диодов.

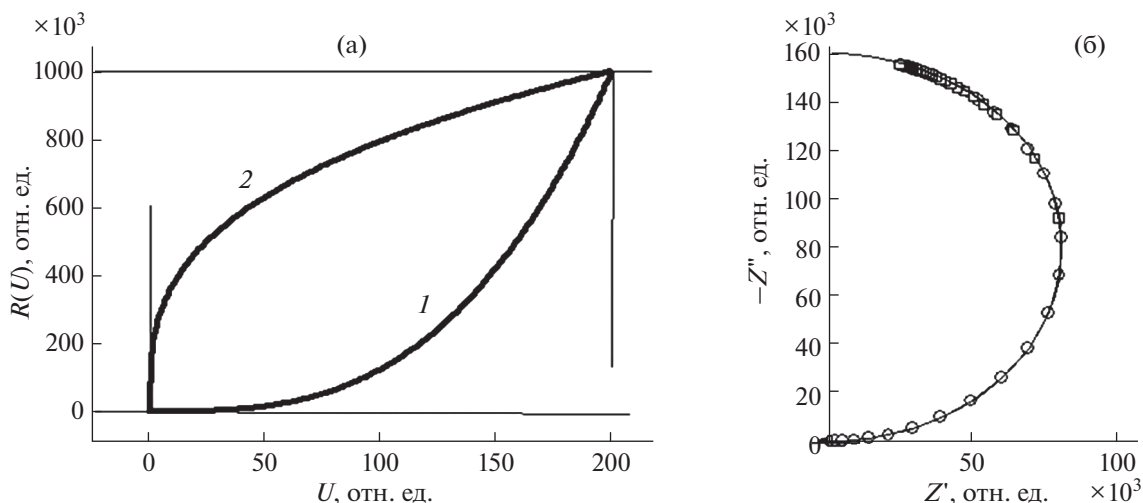


Рис. 1. Расчет гистограммы импеданса (б) для двух отличающихся зависимостей $R(U)$ (а). б: кружки – для зависимости 1, квадратные значки – для зависимости 2. Видно, что обе зависимости $Z''(Z')$ отличаются плотностями точек на разных областях кривой, но ложатся на одну полуокружность.

Таким образом, эксперимент подтверждает соотношение, полученное выше расчетом.

Учет дополнительного последовательного сопротивления, подсоединенного к RC -цепи, тривиален. В этом случае, как и в случае зависимости от частоты, график годографа импеданса смещается вправо вдоль оси действительных значений импеданса. Это также проверено экспериментально.

На экспериментальных графиках (рис. 2) заметно, что верхние части полуокружностей, прижатых к оси мнимых значений, не следуют выведенной зависимости, отклоняются от полукругов. Причины этого просты, можно назвать две. Во-первых, при выводе формул (2)–(4) мы предполагали постоянство емкости. В реальности же емкость барьера (например – p – n перехода) при росте высоты барьера уменьшается [5], и, соответственно, мнимая часть импеданса должна возрастать. Это должно проявляться в деформации полуокружностей – в увеличении их локального радиуса кривизны при $R \rightarrow \infty$. Во-вторых, в этом случае растущее сопротивление R остается конечным, и $1/R$ не становится нулем. Поэтому на графике в этой области годограф не доходит до мнимой оси.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Крайне необычной представляется совпадение форм зависимостей (полукругов) для двух типов зависимостей. Причины такого совпадения связаны с математическими соотношениями между импедансом и адмиттансом.

Обе эти величины принято отображать на комплексной плоскости (Z' , $-iZ''$); кроме того, между импедансом и адмиттансом имеется простое со-

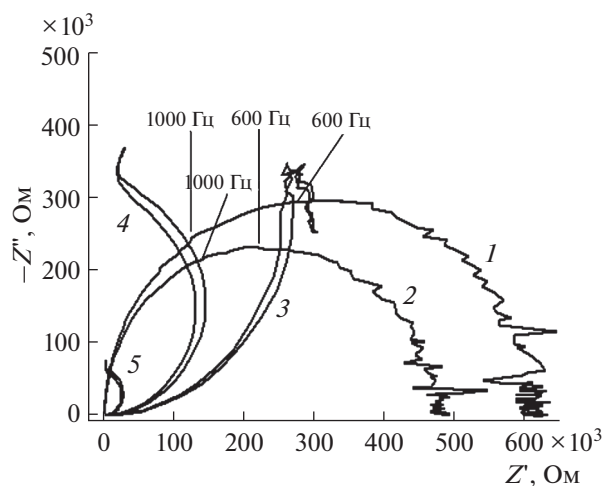


Рис. 2. Годографы импеданса многослойной гетероструктуры палладий/оксид/полупроводник (InP). Сдвоенные кривые – развертка напряжения с возвращением в начальные значения; наблюдается гистерезис свойств. Кривые 1, 2 – зависимости от частоты, кривые 3–5 – зависимости от напряжения. Кривые 4 и 5 показаны с увеличением значений в 10 раз для возможности визуального сравнения. Диапазон кривых ограничен допустимым напряжением смещения. Параметры графиков: 1 – напряжение смещения на палладии +50 мВ; 2 – смещение на палладии – +75 мВ. Частота 3 – 600 Гц, 4 – 1 кГц; 5 – 50 кГц. Частоты выбраны так, чтобы графики не сливались и были удобны для восприятия.

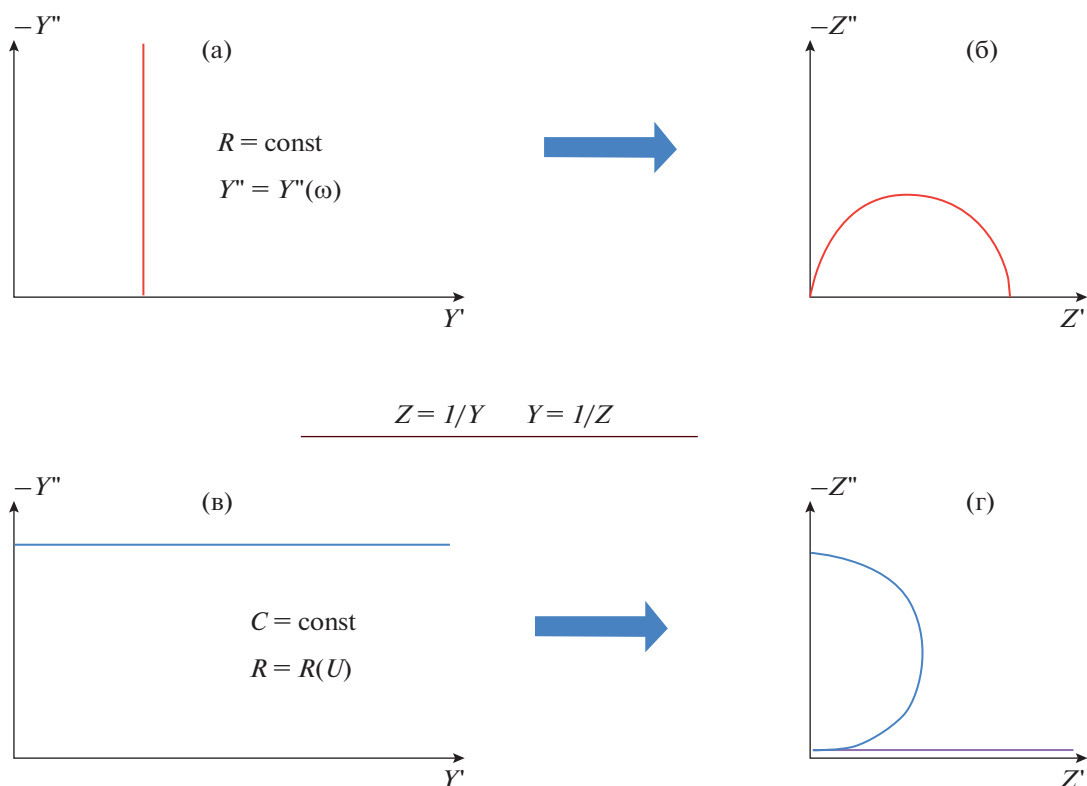


Рис. 3. Преобразования зависимостей. Подробные пояснения в тексте.

отношение $Z = 1/Y$, и наоборот. Поэтому, вне зависимости от реального физического смысла этих величин, их отображения должны вести себя при преобразованиях, как отображения любых других комплексных величин.

Вид графиков адмиттансов — цепи с постоянной величиной сопротивления и меняющейся мнимой компонентой (ωC) и, аналогично, цепи с постоянной величиной емкости и изменяющимся сопротивлением, очевидно — это прямые, параллельные осям $-Z''$, Z' , соответственно. На рис. 3 вид этих зависимостей показан на рис. 3а и 3в.

Законы преобразования отображения комплексных величин (конформные отображения) таковы, что прямые, параллельные осям, в одном представлении преобразуются в окружности после преобразования $Z = 1/Y$ [6, 7] (рис. 3б, 3г). Поскольку в нашем случае графики адмиттанса представляют собой полупрямые (лучи), половины окружностей после преобразования отсутствуют. Вид графиков величин, получающихся при таких преобразованиях, показан на рис. 3б и 3г. Это соответствует тому, что наблюдается на опыте.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе рассмотрен вопрос о виде графиков зависимостей импеданса RC -цепи от приложенного напряжения, для случая, когда сопротивление зависит от приложенного напряжения. График имеет вид полуокружности, прижатой к оси мнимых значений. Положение характерных точек графика позволяет определить величину эффективной емкости. Ранее такой график импеданса не публиковался другими авторами. Приведенное рассмотрение применимо к очень широкому кругу объектов, сопротивление которых существенно зависит от приложенного напряжения.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Графов, Б.М., Укше, Е.А. Электрохимические цепи переменного тока. *Успехи химии*. 1975. Т. 44. В. 11. С. 1979. [Grafov, B.M. and Ukshe, E.A., Electro-

- chemical circuits of the alternative current, *Advance in chemistry*, 1975. vol. 44. no. 11, p. 1979.]
2. Укше, Е.А., Букун, Н.Г. *Твердые электролиты*. М.: Наука, 1977. 176 с. [Ukshe, E.A. and Bukun, N.G. *Solid Electrolytes*, М.: Nauka, 1977, 176 p.]
 3. Sluyters, J.H., *Rec. Trav. Chim.*, 1960, vol. 79, p. 1092.
 4. Sluyters, J.H. and Oomen, J.J.C., *Rec. Trav. Chim.*, 1960, vol. 79, p. 1101.
 5. Бонч-Бруевич, В.Л., Калашников, С.Г. *Физика полупроводников*. М.: Наука, 1977. 672 с. [Bonch-Bruевич, V.L. and Kalashnikov, S.G., *Physics of semiconductors*, М.: Nauka, 1977, 672 p.]
 6. Лаврентьев, М.А., Шабат, Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного*. М.: Наука, 1987. 688 с. [Lavrent'ev, M.A. and Shabat, B.V., *Methods of the theory of functions of a complex variable*, М.: Nauka, 1987, 688 p.]
 7. Лаврик, В.И., Савенков, В.Н. *Справочник по конформным отображениям*. Киев: Наук. думка, 1970, 252 с. [Lavrik, V.I. and Savenkov, V.N., *Handbook of conformal maps*, Kiev: Nauk. Dumka, 1970, 252 p.]