

УДК 551.511.61

МОДЕЛЬ ПОДОБИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СПЕКТРОВ СЛУЧАЙНЫХ АНИЗОМЕРНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ АТМОСФЕРЫ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧАМ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН

© 2020 г. А. Г. Виноградов^{a, b, *}, А. Н. Теохаров^{a, **}

^aРадиотехнический институт им. академика А.Л. Минца,
ул. 8 Марта, 10, стр. 1, Москва, 127083 Россия

^bИнститут физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН,
Пыжевский пер., 3, Москва, Россия

*e-mail: vinogradov@rti-mints.ru

**e-mail: ateokharov@rti-mints.ru

Поступила в редакцию 25.04.2019 г.

После доработки 28.06.2019 г.

Принята к публикации 25.09.2019 г.

Предложена модель подобия анизомерных флуктуаций диэлектрической проницаемости в турбулентной атмосфере. Показано, что корреляционные свойства флуктуаций в различных пространственных направлениях подобны и отличаются только масштабирующим множителем, зависящим от направления. Предложена степенная модель подобия флуктуаций. Показано, что в геометрическом приближении корреляционные свойства фазы плоской (и сферической) волны, распространяющейся в различных пространственных направлениях, подобны и отличаются только масштабирующим множителем, зависящим от направлений распространения волны и базы (разности координат в пробных точках). Рассчитаны характеристики корреляции (дисперсия, коэффициент анизомерии и форма коэффициента корреляции) для ряда характерных параметров задачи.

Ключевые слова: атмосфера, турбулентность, диэлектрическая проницаемость, корреляционные характеристики, спектральные характеристики, стратифицированная тропосфера

DOI: 10.31857/S0002351520010095

1. ВВЕДЕНИЕ

При оценке влияния турбулентности тропосферы на распространение электромагнитных волн и света во многих случаях используют модель развитой локально однородной изотропной турбулентности Колмогорова [1]. Эта модель предполагает существование инерционного интервала каскадной передачи энергии турбулентных вихрей от крупных к мелким. Этот процесс начинается с вихрей большого размера (так называемый внешний масштаб турбулентности) и заканчивается на мелких вихрях, размер которых (внутренний масштаб турбулентности) определяется диссипацией кинетической энергии в ламинарных течениях. При этом не учитывается наличие силы тяжести, которая приводит к возникновению в тропосфере внутренних гравитационных волн [2].

Взаимодействие внутренних гравитационных волн с конвективными турбулентными потоками часто (при положительных значениях числа

Ричардсона) приводит к устойчивой вертикальной стратификации слоев (см., например, [3]). Характерные вертикальные масштабы слоев лежат в интервале от сотен до единиц метров, а горизонтальные – в 10–100 раз больше. Следуя [4], мы будем называть такие неоднородности анизомерными, оставив термин “анизотропный” за средами, диэлектрическая проницаемость которых описывается тензором, а за интервалом их масштабов сохраним название инерционный интервал.

В предположении о статистической однородности флуктуаций диэлектрической проницаемости $\delta\epsilon(\mathbf{r}) = \epsilon(\mathbf{r}) - \langle \epsilon(\mathbf{r}) \rangle$ мерой “удельных весов” неоднородностей разных масштабов и ориентаций является трехмерный пространственный спектр $\Phi_\epsilon(\mathbf{k})$, который связан с корреляционной функцией диэлектрической проницаемости соотношением [1]

$$B_\epsilon(\Delta\mathbf{r}) \equiv \langle \delta\epsilon(\mathbf{r})\delta\epsilon(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) \rangle = \int d^3\mathbf{k} \cdot \Phi_\epsilon(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}}. \quad (1.1)$$

В случае локальной однородности флуктуаций диэлектрической проницаемости корреляционная функция может не существовать из-за расходимости интеграла (1.1) при $\mathbf{k} = 0^1$. В этом случае вводится структурная функция

$$D_\epsilon(\Delta\mathbf{r}) \equiv \langle [\delta\epsilon(\mathbf{r}) - \delta\epsilon(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r})]^2 \rangle = 2 \int d^3\mathbf{k} \cdot \Phi_\epsilon(\mathbf{k})(1 - e^{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}}), \quad (1.2)$$

которая в случае однородных флуктуаций выражается через корреляционную функцию:

$$D_\epsilon(\Delta\mathbf{r}) = 2[B_\epsilon(0) - B_\epsilon(\Delta\mathbf{r})]. \quad (1.3)$$

Модели трехмерных спектров температуры и плотности газа в устойчиво-стратифицированной атмосфере для волновых чисел, отвечающих инерционному интервалу, рассмотрены, например, в работах [3, 5–8], где проведено сравнение с экспериментальными данными, в которых, как правило, оцениваются одномерные спектры (в направлении некоторого единичного вектора \mathbf{e} , обычно в вертикальном \mathbf{e}_z и горизонтальном $\mathbf{e}_{xy} \perp \mathbf{e}_z$ направлениях):

$$V_\epsilon(\kappa\mathbf{e}) = \frac{1}{2\pi} \int d\rho_\epsilon B_\epsilon(\rho_\epsilon\mathbf{e}) e^{-i\kappa\rho_\epsilon} = \int d^2\mathbf{k}_\perp \cdot \Phi_\epsilon(\kappa\mathbf{e} + \mathbf{k}_\perp), \quad (1.4)$$

где интегрирование проводится по перпендикулярным к \mathbf{e} компонентам вектора $\mathbf{k} = \kappa\mathbf{e} + \mathbf{k}_\perp$.

Механизмы формирования одномерных (вертикальных и горизонтальных) спектров в инерционном интервале предложены в ряде работ [9, 10]. В инерционном интервале одномерный спектр анизотропной турбулентности в устойчиво стратифицированной среде как функция волнового числа изменяется по степенному закону с показателем степени -3 :

$$V_\epsilon(\kappa\mathbf{e}) \sim \kappa^{-3}, \quad (1.5)$$

отличающемся от колмогоровской зависимости $V_\epsilon(\kappa\mathbf{e}) \sim \kappa^{-5/3}$. Экстраполяция соответствующего (1.5) трехмерного спектра $\Phi_\epsilon(\mathbf{k}) \sim \kappa^{-5}$ на область малых волновых чисел приводит к расходимости не только корреляционной функции (1.1), но и структурной функции (1.2). Поэтому возникает необходимость дополнения этих моделей в области малых волновых чисел.

В данной работе предлагается модель трехмерного спектра диэлектрической проницаемости в устойчиво-стратифицированной атмосфере, ко-

торая описывает основные свойства анизотропных флуктуаций и в то же время достаточно проста и пригодна для аналитических расчетов корреляционной функции флуктуаций диэлектрической проницаемости и фазы распространяющейся в такой среде электромагнитной волны.

2. МОДЕЛЬ ПОДОБИЯ АНИЗОТРОПНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ (ТРОПОСФЕРЕ)

В устойчиво-стратифицированной атмосфере одномерные спектры в вертикальном, горизонтальном, а также в других направлениях подобны друг другу, различаясь лишь масштабами корреляции. Пусть $L_0^{x,y,z}$ – характерные линейные размеры неоднородностей (масштабы корреляции) вдоль осей координат x, y, z . Из экспериментальных данных следует, что анизотропные неоднородности сильно сплюснуты (их вертикальный масштаб L_0^z в 10–100 раз меньше горизонтальных $L_0^x = \alpha_x L_0^z, L_0^y = \alpha_y L_0^z$), что отвечает значениям коэффициента вертикального сжатия

$$\alpha_{x,y} \equiv L_0^{x,y} / L_0^z \gg 1. \quad (2.1)$$

В реальности наблюдается рост масштабов турбулентности с высотой, так что обычно в тропосфере $1 \text{ м} < L_0^z < 150 \text{ м}$, тогда как в стратосфере на высотах 30–50 км: $1–100 \text{ м} < L_0^z < 1–10 \text{ км}$. Оценки масштабов турбулентности на основе экспериментальных данных приведены, например, в работах А.С. Гурвича и И.П. Чунчузова [3, 7].

Определим линейное инвариантное (по элементу объема с равным единичей якобианом) преобразование пространственных координат векторов $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$ в “сопряженную” нашей “анизотропной” “изотропную” систему координат $\tilde{\mathbf{r}} \equiv (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, в которой статистические свойства флуктуаций диэлектрической проницаемости $\tilde{\epsilon}(\tilde{\mathbf{r}}) = \epsilon(\mathbf{r})$ полагаются изотропными, так что корреляционная функция диэлектрической проницаемости

$$B_\epsilon(\Delta\mathbf{r}) \equiv \langle \delta\epsilon(\mathbf{r})\delta\epsilon(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) \rangle = B_\epsilon^{\text{iso}}(\Delta\tilde{\mathbf{r}}) = B_\epsilon^{\text{iso}}(\Delta\tilde{r}) \quad (2.2)$$

зависит только от модуля $\Delta\tilde{r} = |\Delta\tilde{\mathbf{r}}|$. Такое преобразование векторов можно описать матрицей $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{r}}$, инвариантность обеспечивается условием $\det \hat{\mathbf{A}} = 1$. Поскольку очевидно, что базис исходного пространства ($\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$) преобразуется в “сопряженный” базис ($\tilde{\mathbf{e}}_x, \tilde{\mathbf{e}}_y, \tilde{\mathbf{e}}_z$) обратным преобразованием $\hat{\mathbf{A}}^{-1}$, то пространственные векторы \mathbf{r} являются контравариантными векторами.

¹ Такая ситуация имеет место, например, в случае колмогоровской локально однородной изотропной турбулентности с бесконечным внешним масштабом, где спектр $\Phi_\epsilon(\mathbf{k}) \sim \kappa^{-11/3}$.

Ортогональным преобразованием векторов матрицу $\hat{\mathbf{A}}$ всегда можно привести к диагональному виду, тогда линейное преобразование сведется к “сжатию-растяжению” координат вектора по осям координат:

$$\tilde{\mathbf{r}} \equiv (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (\beta_x x, \beta_y y, \beta_z z), \quad (2.3)$$

где коэффициенты анизотропии $\beta_{x,y,z} > 0$, а инвариантность элемента объема приводит к соотношению $\beta_x \beta_y \beta_z = 1$. Здесь мы ограничимся “естественной” ориентацией осей координат (x, y, z) в турбулентной атмосфере с диагональной матрицей преобразования $\hat{\mathbf{A}}$.

Определив единичный вектор направления вектора $\Delta \mathbf{r}$ как $\mathbf{e} = \Delta \mathbf{r} / \Delta r$, из (2.3) находим безразмерный коэффициент преобразования модулей вектора:

$$\Delta \tilde{r} / \Delta r = \beta_0(\mathbf{e}) \equiv \sqrt{\beta_x^2 e_x^2 + \beta_y^2 e_y^2 + \beta_z^2 e_z^2}. \quad (2.4)$$

Из выражения (2.2) с учетом (2.4) получаем

$$B_\epsilon(\Delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}) = B_\epsilon^{\text{iso}}(\beta_0(\mathbf{e}) \cdot \Delta \mathbf{r}), \quad (2.5)$$

то есть анизотропия флуктуаций в модели подобия сводится к “изотропной” корреляции в “сопряженной” системе координат с безразмерным масштабирующим коэффициентом (2.4).

Введем характерные волновые числа $K_{x,y,z} = 2\pi / L_0^{x,y,z}$ по осям координат, а также определим для “изотропной” системы координат $L_{\text{iso}} = \sqrt[3]{L_0^x L_0^y L_0^z}$, $K_{\text{iso}} = \sqrt[3]{K_x K_y K_z}$, тогда безразмерные коэффициенты анизотропии $\beta_{x,y,z} = K_{x,y,z} / K_{\text{iso}}$, а характерное волновое число в произвольном направлении единичного вектора \mathbf{e} может быть представлено как

$$K_0(\mathbf{e}) = \sqrt{K_x^2 e_x^2 + K_y^2 e_y^2 + K_z^2 e_z^2} \equiv K_{\text{iso}} \cdot \beta_0(\mathbf{e}), \quad (2.6)$$

а также характерный линейный размер неоднородностей в направлении \mathbf{e} : $L_0(\mathbf{e}) = 2\pi / K_0(\mathbf{e})$.

Аналогично (2.2) трехмерный спектр $\Phi_\epsilon(\mathbf{k})$ может быть выражен через спектр в “изотропной” системе координат. При этом волновые вектора \mathbf{k} являются ковариантными векторами и преобразуются по тому же закону, что и базис (с обратной матрицей $\hat{\mathbf{A}}^{-1}$):

$$\tilde{\mathbf{k}} \equiv (\tilde{k}_x, \tilde{k}_y, \tilde{k}_z) = (k_x / \beta_x, k_y / \beta_y, k_z / \beta_z). \quad (2.7)$$

Аналогично (2.5) трехмерный “изотропный” спектр зависит от скаляра $\tilde{k} = \sqrt{\tilde{k}_x^2 / \beta_x^2 + \tilde{k}_y^2 / \beta_y^2 + \tilde{k}_z^2 / \beta_z^2}$, который для удобства можно выразить через безразмерный скаляр

$$S(\mathbf{k}) = (\tilde{k} / K_{\text{iso}})^2 = k_x^2 / K_x^2 + k_y^2 / K_y^2 + k_z^2 / K_z^2, \quad (2.8)$$

$$\Phi_\epsilon(\mathbf{k}) = \Phi_\epsilon^{\text{iso}}(\tilde{k}(\mathbf{k})) \equiv \Phi_\epsilon^0(S(\mathbf{k})), \quad (2.9)$$

так что $\tilde{k}(\mathbf{k}) = K_{\text{iso}} \cdot \sqrt{S(\mathbf{k})}$, а форма спектра описывается функцией $\Phi_\epsilon^0(S)$.

С использованием формул (2.8), (2.9) получаем подобие одномерных спектров:

$$V_\epsilon(\kappa_e \mathbf{e}) = [K_{\text{iso}}^3 / K_0(\mathbf{e})] \cdot \phi_\epsilon(\kappa_e^2 / K_0^2(\mathbf{e})), \quad (2.10)$$

здесь введена одномерная спектральная функция

$$\begin{aligned} \phi_\epsilon(S_0) &= \pi \int_0^\infty ds' \Phi_\epsilon^0(S_0 + s') = \\ &= 2\pi \int_0^\infty k dk \Phi_\epsilon^0(S_0 + k^2). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Аналогично (2.9) можно выразить одномерный “анизотропный” спектр через “изотропный”:

$$V_\epsilon(\kappa_e \mathbf{e}) = \gamma(\mathbf{e}) \cdot V_\epsilon^{\text{iso}}(\kappa_e \cdot \gamma(\mathbf{e})), \quad (2.12)$$

где введен зависящий от направления \mathbf{e} безразмерный масштабирующий коэффициент

$$\gamma(\mathbf{e}) = 1 / \beta_0(\mathbf{e}) = K_{\text{iso}} / K_0(\mathbf{e}) = L_0(\mathbf{e}) / L_{\text{iso}}, \quad (2.13)$$

то есть аналогично (2.5) анизотропия одномерных спектров приводит к одномерному спектру в “сопряженной” системе координат $V_\epsilon^{\text{iso}}(\tilde{\kappa}) = K_{\text{iso}}^2 \cdot \phi_\epsilon(\tilde{\kappa}^2 / K_{\text{iso}}^2)$ с безразмерным масштабирующим коэффициентом (2.13).

Выражение (2.12) явно демонстрирует подобие формы одномерных спектров в разных направлениях: они имеют одинаковую зависимость от волнового числа κ_e и различаются лишь значениями масштабирующего коэффициента $\gamma(\mathbf{e})$. Например, для спектров $V_\epsilon^x, V_\epsilon^y, V_\epsilon^z$ вдоль декартовых осей имеем $\gamma_{x,y,z} \equiv \gamma(\mathbf{e}_{x,y,z}) = K_{\text{iso}} / K_{x,y,z} = L_0^{x,y,z} / L_{\text{iso}}$ и из определений (1.1) и (1.2) корреляционной и структурной функций находим:

$$B_\epsilon(\Delta \mathbf{r}) = B_\epsilon^{\text{iso}}[\Delta r_{\text{eff}}(\Delta \mathbf{r})], \quad (2.14)$$

$$D_\epsilon(\Delta \mathbf{r}) = D_\epsilon^{\text{iso}}[\Delta r_{\text{eff}}(\Delta \mathbf{r})], \quad \sigma_\epsilon^2 = (\sigma_\epsilon^{\text{iso}})^2,$$

где $\Delta r_{\text{eff}}(\Delta \mathbf{r}) = \Delta r / \gamma(\mathbf{e}) = \Delta r \cdot [K_0(\mathbf{e}) / K_{\text{iso}}]$ – эффективная разность координат в направлении \mathbf{e} .

В частности, для горизонтально однородной атмосферы $L_0^x = L_0^y, K_x = K_y$, а $\alpha \equiv L_0^{x,y} / L_0^z$ (см. (2.1)), множитель $\gamma(\mathbf{e})$ зависит от угла θ между вектором \mathbf{e} и осью z ($\cos \theta = e_z$). В этом случае находим

$$\begin{aligned} \gamma(\mathbf{e}) &= K_{\text{iso}} / \sqrt{K_y K_y \sin^2 \theta + K_z^2 \cos^2 \theta} = \\ &= \alpha^{1/3} / \sqrt{\sin^2 \theta + \alpha^2 \cos^2 \theta}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Здесь мы учли определение $K_{\text{iso}} = \sqrt[3]{K_x K_y K_z}$.

На рис. 1 приведены графики зависимости масштабирующего коэффициента $\gamma(\mathbf{e})$ в зависи-

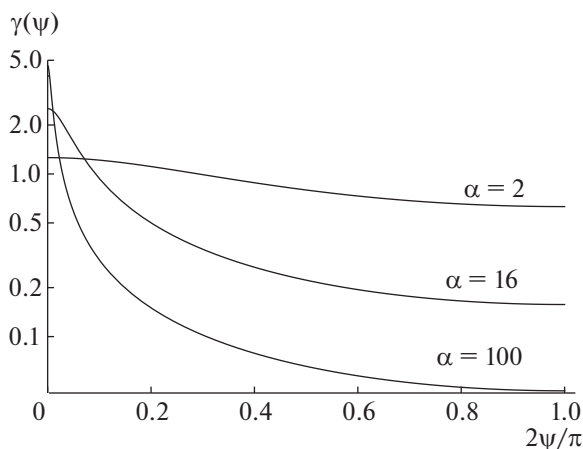


Рис. 1. Масштабирующий коэффициент $\gamma(\mathbf{e})$.

мости от угла скольжения $\psi = |\pi/2 - \theta| = |\arcsin e_z|$ при разных коэффициентах вертикального сжатия α (случай горизонтально однородной атмосферы).

Аналогично (2.10) для модели подобия (2.3), (2.4) выразим функцию корреляции (2.5) через одномерную спектральную функцию (2.11):

$$B_\epsilon(\Delta r \cdot \mathbf{e}) = 2K_x K_y K_z \int_0^\infty dk \phi_\epsilon(k^2) \cos(kK_0(\mathbf{e})\Delta r). \quad (2.16)$$

3. СТЕПЕННАЯ АНИЗОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ФЛУКТУАЦИЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

Здесь мы предлагаем степенную анизотропную модель флуктуаций диэлектрической проницаемости, близкую к степенной в инерционном интервале спектра пространственных частот (при $S(\mathbf{k}) \gg 1$ полагаем $\Phi_\epsilon^0(S(\mathbf{k})) \sim S(\mathbf{k})^{-p}$) и корректирующую степенную при больших пространственных масштабах турбулентности (при $k_\epsilon \leq K_0(\mathbf{e})$ полагаем $\Phi_\epsilon^0(S(\mathbf{k})) \sim S(\mathbf{k})^n$):

$$\Phi_\epsilon(\mathbf{k}) = \Phi_\epsilon^0(S(\mathbf{k})) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{K_x K_y K_z} \times \frac{\Gamma(n+p)}{2\pi\Gamma(n+3/2)\Gamma(p-3/2)} \frac{S^n(\mathbf{k})}{(1+S(\mathbf{k}))^{n+p}}, \quad (3.1)$$

где $\sigma_\epsilon^2 = B_\epsilon(0)$ – дисперсия флуктуаций диэлектрической проницаемости, $\Gamma(z)$ – гамма-функция. Используемая в [8] модель трехмерного спектра показателя преломления среды, флуктуации в которой изотропны в горизонтальной плоскости, с точностью до обозначений и экспоненциального множителя, обрезает спектр в об-

ласти малых масштабов (при $S(\mathbf{k}) \gg 1$), совпадает с (3.1) при $n = 0$ и $K_x = K_y$. Введение множителя $S^n(\mathbf{k})/(1+S(\mathbf{k}))^n$, “вырезающего” наиболее крупные неоднородности при $S(\mathbf{k}) \ll 1$, придает модели дополнительную гибкость при описании спектра в области больших масштабов².

Нетрудно найти, что $p = 11/6$ соответствует колмогоровской локально однородной изотропной турбулентности ($\Phi_\epsilon(\mathbf{k}) \sim |\mathbf{k}|^{-11/3}$), тогда как $p = 5/2$ соответствует анизотропной устойчиво стратифицированной среде с зависимостью (1.5). Для краткости назовем спектр среды с устойчивой (развитой) стратификацией “приземным”.

Поскольку анизотропность в модели подобия (2.14) определяется масштабирующим множителем $\gamma(\mathbf{e})$, то характер корреляции флуктуаций диэлектрической проницаемости описывается поведением сопряженной изотропной модели с $S_{\text{iso}}(\mathbf{k}) = k^2/K_{\text{iso}}^2$. Для “изотропного” коэффициента корреляции из (2.16) имеем

$$R_\epsilon^{\text{iso}}(\Delta r) = \frac{B_\epsilon^{\text{iso}}(\Delta r)}{\sigma_\epsilon^2} = \frac{2K_{\text{iso}}^3}{\sigma_\epsilon^2} \int_0^\infty dk \phi_\epsilon(k^2) \cos(kK_{\text{iso}}\Delta r). \quad (3.2)$$

Подставляя сюда степенную модель флуктуаций (3.1), находим выражение

$$R_\epsilon^{\text{iso}}(\Delta r) = R_\epsilon^0(p, n, K_{\text{iso}}\Delta r), \quad (3.3)$$

² Здесь мы сталкиваемся с проблемой разделения поля показателя преломления на регулярную и флуктуационную компоненты. Крупные неоднородности приводят к медленным изменениям параметров сигналов, которые зачастую можно отнести к регулярным искажениям.

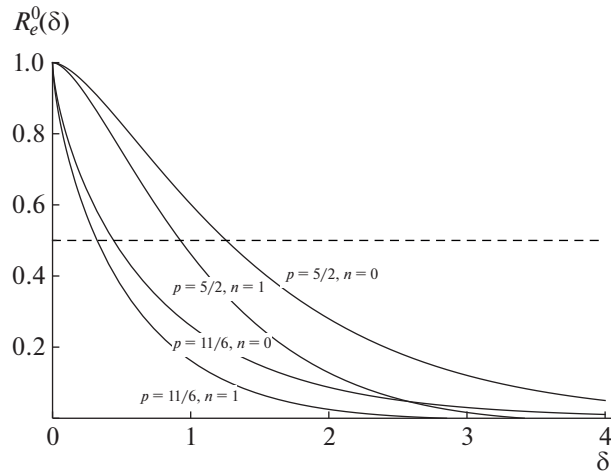


Рис. 2. Функция $R_\epsilon^0(p, n, \delta)$.

$$R_\epsilon^0(p, n, \delta) \equiv \frac{\Gamma(n+p)}{\Gamma(n+3/2)\Gamma(p-3/2)} \times \int_0^\infty dk \int_0^\infty ds \left[\frac{(k^2+s)^n}{(1+k^2+s)^{p+n}} \cos(\delta k) \right], \quad (3.4)$$

где $\delta = K_{\text{iso}}\Delta r$ – безразмерная разность координат.

В Приложении 1 приведен явный вид “нормированного” коэффициента корреляции $R_\epsilon^0(p, n, \delta)$ для “колмогоровского” ($p = 11/6$) и “приземного” спектров ($p = 5/2$) для частных случаев $n = 0; 1$.

На рис. 2 приведены графики зависимости функции $R_\epsilon^0(p, n, \delta)$ от безразмерной разности координат δ при частных значениях параметров p, n .

В табл. 1 приведены асимптотики коэффициента $R_\epsilon^0(p, n, x)$ при разных режимах турбулентности.

Приведем выражения для одномерного спектра флуктуаций диэлектрической проницаемости

(2.10) для степенной модели подобия (3.1) в сопряженной “изотропной” системе координат. Путем несложных вычислений находим:

$$V_\epsilon^{\text{iso}}(\kappa) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{2K_{\text{iso}}} C_0(p, n) [\lambda(\kappa/K_{\text{iso}})]^{p-1} \times (p-1) I_0(p, n, \lambda(\kappa/K_{\text{iso}})), \quad (3.5)$$

где введены

$$C_0(p, n) \equiv \frac{\text{коэффициент}}{(p-1)\Gamma(n+3/2)\Gamma(p-3/2)}, \quad (3.6)$$

$$\text{параметр } \lambda(k) \equiv 1/(1+k^2) \quad (3.7)$$

и интеграл

$$I_0(p, n, \lambda) \equiv \int_0^\infty (1+x-\lambda)^n / (1+x)^{p+n} dx. \quad (3.8)$$

В Приложении 1 приведены формулы для коэффициента (3.6) и интеграла (3.8) для “колмо-

Таблица 1. Асимптотики коэффициента $R_\epsilon^0(p, n, x)$

| Режим турбулентности (p, n) | Разложение при $x \rightarrow +0$ | Разложение при $x \rightarrow \infty$ | Аргумент половинного уровня $x_{1/2}$ |
|------------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| “Приземный” $p = 5/2, n = 0$ | $1 - x^2 [0.308 - 0.5 \ln(x)]$ | $1.253e^{-x} x^{1/2}$ | 1.257 |
| “Приземный” $p = 5/2, n = 1$ | $1 - x^2 [0.347 - 0.83 \ln(x)]$ | $0.2785e^{-x} x^{3/2}$ | 0.925 |
| “Колмогоровский” $p = 11/6, n = 0$ | $1 - 0.955x^{2/3} + 0.375x^2$ | $0.743e^{-x} x^{-1/6}$ | 0.441 |
| “Колмогоровский” $p = 11/6, n = 1$ | $1 - 1.168x^{2/3} + 0.625x^2$ | $-0.248e^{-x} x^{-5/6}$ | 0.322 |

горовского” ($p = 11/6$) и “приземного” спектров ($p = 5/2$) для целочисленных n .

В инерционном интервале $\kappa \gg K_{\text{iso}} \Rightarrow k \gg 1$ полагаем $\lambda(k) \approx k^{-2} \ll 1$, $I_0(p, n, \lambda(k)) \approx 1/(p-1)$, и выражение (3.5) упрощается:

$$V_{\varepsilon}^{\text{iso}}(\kappa) \approx \frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{2K_{\text{iso}}} C_0(p, n) [\lambda(\kappa/K_{\text{iso}})]^{p-1} \approx \frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{2} C_0(p, n) K_{\text{iso}}^{2p-3} \kappa^{-2(p-1)}. \quad (3.9)$$

Приведем на основе формул (2.12) и (3.5) оценку дисперсии флуктуаций диэлектрической проницаемости. Действительно, согласно степенной модели относительных температурных флуктуаций в сильно стратифицированной тропосфере, описанной в работе [3], вертикальный спектр относительных температурных флуктуаций имеет вид:

$$V_T^{\text{vert}}(\kappa_z) = A_0(N^4/g^2)\kappa_z^{-3}, \quad (3.10)$$

где коэффициент $A_0 \approx 0.1$, N – частота плавучести, g – ускорение свободного падения. Для внешнего вертикального масштаба турбулентности имеем оценку:

$$\kappa_0 \approx N/\sigma_w, \quad (3.11)$$

где σ_w – среднеквадратичные пульсации скорости ветра.

С другой стороны, оценка вертикального спектра на основе формул (2.12) и (3.5) при выбранных параметрах $p = 5/2$, $n = 0$ в инерционном интервале $\kappa_z \gg \kappa_0$ дает выражение

$$V_{\varepsilon}(\kappa_z \mathbf{e}_z) = V_{\varepsilon}^{\text{iso}}(\kappa_z/\beta_z)/\beta_z = \frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{2\kappa_z} \left(1 + \frac{\kappa_z^2}{K_z^2}\right)^{-3/2} \approx \frac{1}{2} \sigma_{\varepsilon}^2 K_z^2 \kappa_z^{-3}. \quad (3.12)$$

Учтем далее, что флуктуации диэлектрической проницаемости связаны с температурными флуктуациями соотношением [1]

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = 4 \left(\frac{80 \times 10^{-6} p}{T} \right)^2 \frac{\sigma_T^2}{T^2}, \quad (3.13)$$

где p – давление воздуха в миллибарах, а T – абсолютная температура в градусах Кельвина. Из сравнения формул (3.10) и (3.12) с учетом (3.11) и (3.13) находим

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = 8A_0 \left(\frac{80 \times 10^{-6} p}{T} \right)^2 (N\sigma/g)^2. \quad (3.14)$$

Подставляя сюда характерные для спокойной приземной атмосферы параметры $A_0 \approx 0.1$, $N \approx 0.02 \text{ с}^{-1}$, $\sigma_w \approx 0.5 \text{ м/с}$, $g \approx 10 \text{ м/с}^2$, $p \approx 1000 \text{ мб}$, $T \approx 280 \text{ К}$, получаем числовую оценку дисперсии флуктуаций диэлектрической проницаемости:

$$\sigma_{\varepsilon}^2 \approx 6.5 \times 10^{-14}. \quad (3.15)$$

Полученная оценка удовлетворительно согласуется с оценками, приведенными в [1]. В условиях сильной возмущенности атмосферы значение σ_{ε}^2 может увеличиться на порядок или даже больше.

4. КОРРЕЛЯЦИЯ ФЛУКТУАЦИЙ ФАЗЫ И ЭЙКОНАЛА ВОЛНЫ В ТУРБУЛЕНТНОЙ АНИЗОМЕРНОЙ СРЕДЕ

Рассмотрим далее корреляционные свойства фазы и эйконала волны, распространяющихся в среде с анизотропными неоднородностями. Пусть по направлению единичного вектора \mathbf{e}_s от начала координат распространяется плоская волна с частотой ω (и волновым вектором ω/c) Используем далее введенную нами модель подобия анизотропных флуктуаций диэлектрической проницаемости.

При переходе в “изотропную” систему координат единичный вектор направления распространения плоской волны $\mathbf{e}_s \equiv (e_{sx}, e_{sy}, e_{sz})$ преобразуется в вектор

$$\mathbf{E}_s \equiv (E_{sx}, E_{sy}, E_{sz}) = (\beta_x e_{sx}, \beta_y e_{sy}, \beta_z e_{sz}) \quad (4.1)$$

и уже не обязательно является единичным: $|\mathbf{E}_s| = \beta_0(\mathbf{e}_s)$. Единичным, очевидно, является вектор $\tilde{\mathbf{e}}_s \equiv (\tilde{e}_{sx}, \tilde{e}_{sy}, \tilde{e}_{sz}) = \mathbf{E}_s/\beta_0(\mathbf{e}_s)$.

В геометрооптическом (коротковолновом) приближении фаза волны пропорциональна эйконалу ($\text{Ph}(\mathbf{r}) = (\omega/c)\Theta(\mathbf{r})$), а в первом приближении по малой поправке $v(\mathbf{r})$ к диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\mathbf{r}) = 1 + v(\mathbf{r})$ имеем уравнение эйконала $2(\mathbf{e}_s \nabla)\Theta(\mathbf{r}) = v(\mathbf{r})$. Существенно, что при преобразовании координат к сопряженной “изотропной” системе уравнение эйконала $\Theta(\mathbf{r})$ принимает вид

$$2(\tilde{\mathbf{e}}_s \tilde{\nabla})\Theta(\tilde{\mathbf{r}}) = v(\tilde{\mathbf{r}})/\beta_0(\mathbf{e}_s), \quad (4.2)$$

где оператор $\tilde{\nabla}$ действует по “изотропной” координате $\tilde{\mathbf{r}}$. Из уравнения (4.2) сразу следует, что все статистические характеристики эйконала волны, распространяющейся в анизотропной среде, описываются эквивалентным изотропным спектром, а анизотропия определяется законом перехода к “изотропным” координатам и множителем $\beta_0^{-1}(\mathbf{e}_s)$.

Представим структурную функцию эйконала на расстоянии s от источника в виде

$$D_{\Theta}(s, \Delta \mathbf{r}) = 2\sigma_{\Theta}^2(\mathbf{e}_s, s)[1 - R_{\Theta}(\mathbf{e}_s, s, \Delta \mathbf{r})], \quad (4.3)$$

где $\sigma_{\Theta}^2(\mathbf{e}_s, s) = B_{\Theta}(\mathbf{e}_s, s, \mathbf{0})$ – дисперсия, а $R_{\Theta}(\mathbf{e}_s, s, \Delta \mathbf{r}) = B_{\Theta}(\mathbf{e}_s, s, \Delta \mathbf{r})/\sigma_{\Theta}^2(\mathbf{e}_s, s)$ – коэффициент корреляции эйконала.

Следуя выкладкам [1], нетрудно получить выражение для дисперсии в малоугловом приближении:

$$\begin{aligned} \sigma_{\Theta}^2(\mathbf{e}_s, s) &= \frac{[\sigma_{\Theta}^{\text{iso}}(\mathbf{e}_s, s)]^2}{\beta_0(\mathbf{e}_s)} \approx \\ &\approx \pi s \int_{\mathbb{S}_s} d^2 \mathbf{k}_p \cdot \Phi_{\varepsilon}(\mathbf{k}_p) = \pi s \frac{K_{\text{iso}}^2 \Phi_{\varepsilon}(0)}{\beta_0(\mathbf{e}_s)}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где $\Phi_{\varepsilon}(0) = 2\pi \int_0^{\infty} k dk \Phi_{\varepsilon}^0(k^2)$ – значение в нуле одномерной спектральной функции (2.11), а интегрирование по \mathbf{k}_p ведется в плоскости волновых векторов \mathbb{S}_s : $\mathbf{k}_p \in \mathbb{S}_s \equiv \mathbf{k}_p \perp \mathbf{e}_s$.

В соответствии с моделью подобия анизомерных флуктуаций коэффициент корреляции эйконала связан с “изотропным” коэффициентом корреляции соотношением

$$R_{\Theta}(\mathbf{e}_s, \Delta \mathbf{r}) = R_{\Theta}^{\text{iso}}[\Delta \tilde{r}_{\perp}(\mathbf{e}_s, \Delta \mathbf{r})]. \quad (4.5)$$

Здесь мы учли (см. [1]), что в малоугловом приближении в изотропной атмосфере масштаб корреляции в направлении распространения $\tilde{\mathbf{e}}_s$ велик и корреляция зависит от поперечной к $\tilde{\mathbf{e}}_s$ разности координат $\Delta \tilde{r}_{\perp}$. Аналогично выводу (4.4) находим для коэффициента корреляции:

$$R_{\Theta}^{\text{iso}}(\rho) = [2\pi/\Phi_{\varepsilon}(0)] \int_0^{\infty} k dk \Phi_{\varepsilon}^0(k^2) J_0(K_{\text{iso}} \rho k), \quad (4.6)$$

где $\rho = \Delta \tilde{r}_{\perp}(\mathbf{e}_s, \Delta \mathbf{r})$, J_0 – функция Бесселя.

Таким образом, измерению флуктуаций можно учесть, оценив поперечную разность $\Delta \tilde{r}_{\perp}$ в “изотропной” системе координат в зависимости от направления волны \mathbf{e}_s и разности $\Delta \mathbf{r}$.

Для этого аналогично (4.1) определим единичный вектор поперечной компоненты вектора $\Delta \mathbf{r}$, лежащий в плоскости $\mathbb{S}_s \perp \mathbf{e}_s$: $\mathbf{e}_{\perp} = \Delta \mathbf{r}_{\perp}/\Delta r_{\perp}$. В “изотропной” системе координат он имеет компоненты

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_{\perp}) &\equiv (E_{\perp x}, E_{\perp y}, E_{\perp z}) = \\ &= (\beta_x e_{\perp x}, \beta_y e_{\perp y}, \beta_z e_{\perp z}). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Заметим, что \mathbf{E}_{\perp} зависит от \mathbf{e}_s опосредованно, так как $\mathbf{e}_{\perp} \perp \mathbf{e}_s$ и не обязательно единичный.

Поскольку параллельная к направлению волны \mathbf{e}_s компонента $\Delta \mathbf{r}_{\parallel} = \Delta \mathbf{r} - \Delta \mathbf{r}_{\perp} = \Delta r_{\parallel} \mathbf{e}_s$ при пере-

ходе к “изотропным” координатам переходит в параллельную к направлению $\tilde{\mathbf{e}}_s$ компоненту $\Delta \tilde{r}_{\parallel} = \Delta r_{\parallel} \mathbf{E}_s = \Delta r_{\parallel} \beta_0(\mathbf{e}_s) \cdot \tilde{\mathbf{e}}_s$, то компонента $\Delta \mathbf{r}_{\parallel}$ не будет влиять на поперечную разность $\Delta \tilde{r}_{\perp}$, входящую в (4.5). То есть имеем $\Delta \tilde{r}_{\perp}(\mathbf{e}_s, \Delta \mathbf{r}) = \Delta \tilde{r}_{\perp}(\mathbf{e}_s, \Delta \mathbf{r}_{\perp})$. Поэтому представляем поперечный вектор в “изотропной” системе координат в виде

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{r}_{\perp} &= [\tilde{\mathbf{e}}_s \times [\Delta \tilde{\mathbf{r}} \times \tilde{\mathbf{e}}_s]] = \Delta r_{\perp} [\tilde{\mathbf{e}}_s \times [\mathbf{E}_{\perp} \times \tilde{\mathbf{e}}_s]] = \\ &= [\Delta r_{\perp}/\beta_0^2(\mathbf{e}_s)] \cdot [\mathbf{E}_s \times [\mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{E}_s]]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Из выражения (4.8) легко получить связь между модулями поперечных (к направлению падающей волны) компонент вектора $\Delta \mathbf{r}$ в исходной и “изотропной” системах координат:

$$\Delta \tilde{r}_{\perp} = [\Delta r_{\perp}/\beta_0(\mathbf{e}_s)] \cdot [|\mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{E}_s|]. \quad (4.9)$$

Определим также коэффициент “масштабируемости” пространственной корреляции

$$\begin{aligned} C(\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_{\perp}) &= [|\mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_{\perp}) \times \mathbf{E}_s(\mathbf{e}_s)|]/\beta_0(\mathbf{e}_s) = \\ &= |\mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_{\perp})| \cdot |\mathbf{E}_s(\mathbf{e}_s)| \cdot |\sin \varepsilon|/\beta_0(\mathbf{e}_s). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Здесь ε – угол между векторами $\mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_{\perp})$ и $\mathbf{E}_s(\mathbf{e}_s)$.

Тогда для эффективного поперечного аргумента коэффициента корреляции $\Delta r_{\perp \text{eff}} = \Delta \tilde{r}_{\perp}(\mathbf{e}_s, \Delta \mathbf{r})$ имеем

$$\Delta r_{\perp \text{eff}} = \Delta r_{\perp} C(\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_{\perp}) \Rightarrow R_{\Theta}(\Delta \mathbf{r}_{\perp}) = R_{\Theta}^{\text{iso}}(\Delta r_{\perp \text{eff}}). \quad (4.11)$$

Отметим, что выражения (4.5), (4.8), (4.9) получены в модели подобия анизомерных флуктуаций без использования конкретных выражений для скаляра $S(\mathbf{k})$.

Если ввести углы (θ_s, φ_s) для вектора \mathbf{e}_s в сферической системе координат, а также полярный угол ψ_p вектора \mathbf{e}_{\perp} в полярной системе координат на плоскости $\mathbb{S}_s \perp \mathbf{e}_s$ (при $\psi_p = 0 \rightarrow \mathbf{e}_{\perp} \perp \mathbf{e}_z$), то коэффициент масштабируемости (4.10) будет зависеть от данных углов.

В Приложении 2 получены явные выражения для коэффициента масштабируемости $C(\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_{\perp}) = C(\theta_s, \varphi_s, \psi_p)$, а также его максимального и минимального значений для выбранного направления $\mathbf{e}_s = (\theta_s, \varphi_s)$.

Приведем два примера.

1. Для горизонтально изотропной атмосферы $\beta_x = \beta_y = \beta_{xy}$, $\beta_z = \beta_{xy}^{-2}$, $\beta_{xy} < 1 < \beta_z$ находим: $C_{\text{max}}(\mathbf{e}_s) = \beta_{xy}(\cos^2 \theta_s + \beta_{xy}^6 \sin^2 \theta_s)^{-1/2} = \beta_z \gamma(\mathbf{e}_s) = \beta_z/\beta_0(\mathbf{e}_s)$, $C_{\text{min}}(\mathbf{e}_s) = \beta_{xy}$ и $C_{\text{max}}(\mathbf{e}_s)/C_{\text{min}}(\mathbf{e}_s) = \alpha \cdot \gamma(\mathbf{e}_s)$, где $\alpha = \beta_z/\beta_{xy}$ – коэффициент вертикаль-

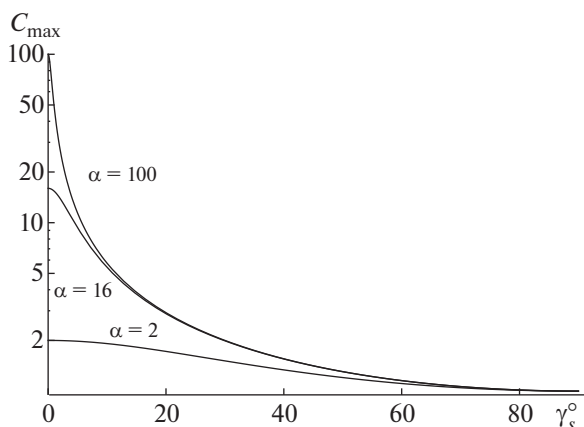


Рис. 3. Коэффициент C_{\max} при $\beta_x = \beta_y$.

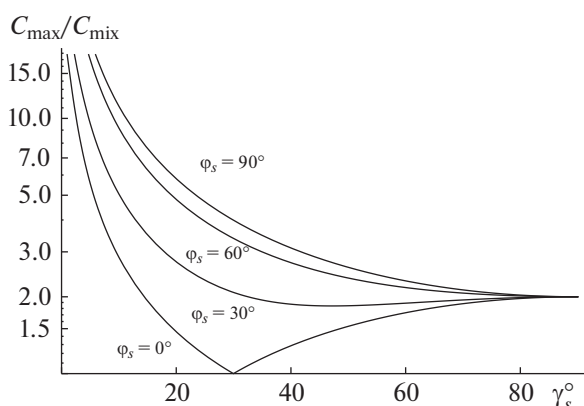


Рис. 4. Отношение C_{\max}/C_{\min} .

ного сжатия. График зависимости максимального коэффициента масштабируемости $C_{\max}(\mathbf{e}_s) = \alpha / \sqrt{\sin^2 \theta_s + \alpha^2 \cos^2 \theta_s}$ от угла скольжения $\gamma_s = \pi/2 - \theta_s$ при разных значениях коэффициента вертикального сжатия приведен на рис. 3. Графики на рис. 3 аналогичны графикам рис. 1, отличие только в множителе, зависящем от коэффициента вертикального сжатия α .

2. При выбранных параметрах анизотропии $\beta_x^2 = 0.05$, $\beta_y^2 = 0.2$, $\beta_z^2 = 100$ на рис. 4 приведены графики зависимости отношения C_{\max}/C_{\min} от углов (γ_s, ϕ_s) . При этом при $\phi_s = 0$ вектор \mathbf{e}_s лежит в плоскости xOz , а коэффициент вертикального сжатия $\alpha \sim \beta_z / \sqrt{\beta_x \beta_y} \approx 31.6$.

5. КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ ФЛУКТУАЦИЙ ЭЙКОНАЛА ВОЛНЫ ДЛЯ СТЕПЕННОЙ МОДЕЛИ ПОДОБИЯ

Для детализации соотношений в модели подобия используем степенную анизотропную мо-

дель (3.1) флуктуаций диэлектрической проницаемости. Для этой модели нетрудно рассчитать дисперсию флуктуаций эйконала плоской волны (4.4):

$$\sigma_{\Theta}^2(\mathbf{e}_s, s) \approx \frac{\pi \Gamma(p-1) \Gamma(n+1)}{2 \Gamma(p-3/2) \Gamma(n+3/2)} \frac{\sigma_{\epsilon}^2 s}{K_0(\mathbf{e}_s)}. \quad (5.1)$$

Поскольку корреляционные свойства анизотропных флуктуаций эйконала с точностью до коэффициента масштабируемости (4.10) соответствуют изотропным флуктуациям (см. (4.11)), то достаточно рассмотреть характер корреляции в “изотропном” случае. Для степенной модели коэффициент корреляции эйконала зависит от параметров модели (p, n) : $R_{\Theta}^{\text{iso}}(\rho) \equiv R_{\text{iso}}(p, n, K_{\text{iso}}\rho)$.

В Приложении 3 приведен явный вид “нормированного” коэффициента корреляции эйконала плоской волны $R_{\text{iso}}(p, n, x)$ для “колмогоровского” ($p = 11/6$) и “приземного” спектров ($p = 5/2$) для частных случаев $n = 0; 1$.

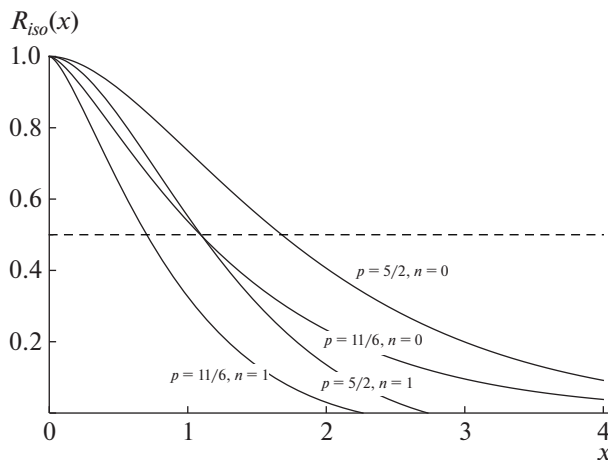


Рис. 5. Функция $R_{iso}(p, n, x)$.

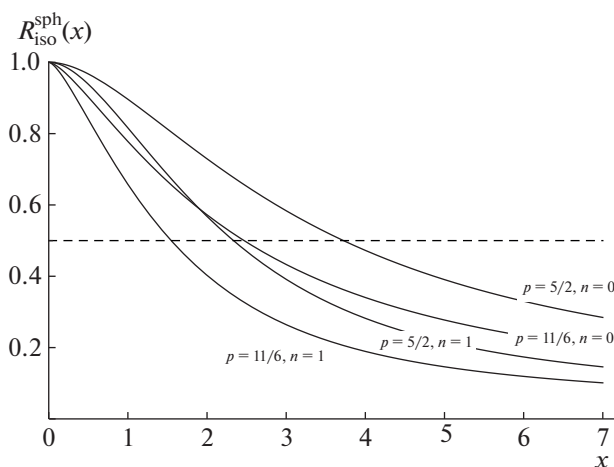


Рис. 6. Функция $R_{iso}^{sph}(p, n, x)$.

Графики функции $R_{iso}(p, n, x)$ приведены на рис. 5.

В табл. 2 приведены асимптотики коэффициента $R_{iso}(p, n, x)$ при разных режимах турбулентности.

Приведенный анализ корреляционных свойств плоской волны в турбулентной атмосфере позволяет рассмотреть и корреляционные свойства сферической волны. В малоугловом приближении коэффициент корреляции эйконала сферической

Таблица 2. Асимптотики коэффициента $R_{iso}(p, n, x)$

| Режим турбулентности (p, n) | Разложение при $x \rightarrow +0$ | Разложение при $x \rightarrow \infty$ | Аргумент половинного уровня $x_{1/2}$ |
|------------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| “Приземный” $p = 5/2, n = 0$ | $1 - 0.5x^2$ | $e^{-x}x$ | 1.678 |
| “Приземный” $p = 5/2, n = 1$ | $1 - x^2$ | $-0.5x^2e^{-x}$ | 1.096 |
| “Колмогоровский” $p = 11/6, n = 0$ | $1 - 1.864x^{5/3}$ | $1.246e^{-x}x^{1/3}$ | 1.091 |
| “Колмогоровский” $p = 11/6, n = 1$ | $1 - 3.417x^{5/3} + 3x^2$ | $-0.623e^{-x}x^{4/3}$ | 0.704 |

Таблица 3. Асимптотики коэффициента $R_{\text{iso}}^{\text{sph}}(p, n, x)$

| Режим турбулентности (p, n) | Разложение при $x \rightarrow +0$ | Разложение при $x \rightarrow \infty$ | Аргумент половинного уровня $x^{1/2}$ |
|------------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| “Приземный” $p = 5/2, n = 0$ | $1 - (1/6)x^2$ | $2/x$ | 3.724 |
| “Приземный” $p = 5/2, n = 1$ | $1 - (1/3)x^2$ | $1/x$ | 2.334 |
| “Колмогоровский” $p = 11/6, n = 0$ | $1 - 0.699x^{5/3} + 0.5x^2$ | $1.402/x$ | 2.468 |
| “Колмогоровский” $p = 11/6, n = 1$ | $1 - 1.281x^{5/3} + x^2$ | $0.701/x$ | 1.547 |

волны $R_{\Theta}^{(\text{sph})}$ связан с коэффициентом корреляции эйконала плоской волны R_{Θ} соотношением [1]

$$R_{\Theta}^{(\text{sph})}(\mathbf{e}_s, \Delta \mathbf{r}_{\perp}) = \frac{1}{s} \int_0^s R_{\Theta}(\mathbf{e}_s, \Delta \mathbf{r}_{\perp} \sigma/s) d\sigma = \int_0^1 R_{\Theta}(\mathbf{e}_s, \xi \Delta \mathbf{r}_{\perp}) d\xi. \quad (5.2)$$

В малоугловом приближении $\xi \Delta \mathbf{r}_{\perp} \in \mathbb{S}_s \perp \mathbf{e}_s$ и в модели подобия анизотропных флуктуаций фазы коэффициент корреляции (5.2), как и для плоской волны (4.11), сводится к соответствующему “изотропному” коэффициенту с учетом масштабирующего множителя (4.10): $R_{\Theta}^{(\text{sph})}(\mathbf{e}_s, \Delta \mathbf{r}_{\perp}) = R_{\Theta}^{\text{iso(sph)}}(\Delta \mathbf{r}_{\perp} C(\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_{\perp}))$. При этом

$$R_{\Theta}^{\text{iso(sph)}}(\rho) = \frac{1}{s} \int_0^s R_{\Theta}^{\text{iso}}(\rho \sigma/s) d\sigma = \int_0^1 R_{\Theta}^{\text{iso}}(\rho \xi) d\xi. \quad (5.3)$$

Формулы (5.2)–(5.3) приводят к уширению интервала корреляции (по сравнению со случаем плоской волны) за счет вклада в интеграл близких более малых интервалов корреляции $0 \leq \Delta \mathbf{r}_{\perp} \leq \rho$.

Аналогично случаю плоской волны в Приложении 3 приведен явный вид “нормированного” коэффициента корреляции эйконала сферической волны $R_{\text{iso}}^{\text{sph}}(p, n, x) = \int_0^1 R_{\text{iso}}(p, n, x\xi) d\xi$ для “колмогоровского” ($p = 11/6$) и “приземного” спектров ($p = 5/2$) для частных случаев $n = 0, 1$.

Графики функции $R_{\text{iso}}^{\text{sph}}(p, n, x)$ приведены на рис. 6.

В табл. 3 приведены асимптотики коэффициента $R_{\text{iso}}^{\text{sph}}(p, n, x)$ при разных режимах турбулентности.

Авторы благодарят рецензента за полезные конструктивные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Татарский В.И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967. 548 с.
2. *Госсард Э.Э., Хук У.Х.* Волны в атмосфере: Инфразвук и гравитационные волны в атмосфере – их возникновение и распространение. М: Мир, 1978. Т. 1–2.
3. *Guvich A.S., Chunchuzov I.P.* Parameters of the fine density structure in the stratosphere obtained from spacecraft observations of stellar scintillations // *J. Geophys. Res.* 2003. V. 108. № D5, 4166. <https://doi.org/10.1029/2002JD002281>
4. *Кравцов Ю.А., Фейзулин З.И., Виноградов А.Г.* Прохождение радиоволн через атмосферу Земли, М.: Радио и связь, 1983. 224 с.
5. *Garret Ch., Munk W.* Space-time scales of internal waves: a progress report // *J. Geophys. Res.* 1975. V. 80. № 3. P. 291–297.
6. *Chunchuzov I.P.* On the high wavenumber form of the Eulerian internal wave spectrum in the atmosphere // *J. Atmos. Sci.* 2002. V. 59. P. 1753–1772.
7. *Гурвич А.С., Чунчужов И.П.* Модель трехмерного спектра анизотропных неоднородностей температуры в устойчиво-стратифицированной атмосфере // *Изв. РАН, Физика атмосферы и океана.* 2008. Т. 44. № 5. С. 611–628.
8. *Kan V., Gorbunov M.E., Sofieva V.F.* Fluctuations of radio occultation signals in sounding the Earth’s atmosphere // *Atmos. Meas. Tech.* 2018. V. 11. P. 663–680. <https://doi.org/10.5194/amt-11-663-2018>
9. *Dewan E.M.* Saturated cascade similitude theory of gravity wave spectra // *J. Geophys. Res.* 1997. V. 102. № D25. P. 29,799–29,817.
10. *Lindborg E.* The energy cascade in a strongly stratified fluid // *J. Fluid Mech.* 2006. V. 550. P. 207–242.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ФОРМУЛЫ КОРРЕЛЯЦИИ ФЛУКТУАЦИЙ
ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

Приведем явный вид коэффициента корреляции $R_\epsilon^0(p, n, \delta)$, определенного в (3.4), для частных случаев $n = 0; 1$ и спектров $p = 11/6; p = 5/2$:

$$R_\epsilon^0(p, 0, \delta) = \frac{2|\delta|^{p-3/2} K_{p-3/2}(|\delta|)}{2^{p-3/2} \Gamma(p-3/2)};$$

$$R_\epsilon^0(11/6, 1, \delta) = \frac{2^{2/3}}{3\Gamma(1/3)} |\delta|^{1/3} (3K_{1/3}(|\delta|) - |\delta| K_{2/3}(|\delta|));$$

$$R_\epsilon^0(5/2, 1, \delta) = \frac{2}{9} \left(5G_{1,3}^{2,1} \left(\frac{|\delta|^2}{4} \middle| \begin{matrix} -1/2 \\ 0, 1, 1/2 \end{matrix} \right) + |\delta|^2 K_2(|\delta|) \right),$$

где $K_q(x)$ – модифицированная функция Бесселя,

$G_{p,q}^{m,n} \left(z \middle| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right)$ – G-функция Мейера.

Для коэффициента (3.6) легко получить рекуррентную формулу $C_0(p, n+1) = C_0(p, n)(p+n)/(n+1)$, позволяющую, например, значительно упростить его для целых n :

$$C_0(p, n) = p(p+1)(p+2)\dots(p+n-1)/n!;$$

$$C_0(p, 0) = 1,$$

Для интеграла (3.8) аналогично легко получить рекуррентную формулу $I_0(p, n, \lambda) = [(1-\lambda)^n + nI_0(p, n-1, \lambda)]/(p+n-1)$, позволяющую, например, значительно упростить этот интеграл для целых n :

$$I_0(p, 0, \lambda) = \frac{1}{p-1}; \quad I_0(p, 1, \lambda) = \frac{1}{p-1} - \frac{\lambda}{p};$$

$$I_0(p, 2, \lambda) = \frac{1}{p-1} - \frac{2\lambda}{p} + \frac{\lambda^2}{p+1};$$

$$I_0(p, 3, \lambda) = \frac{1}{p-1} - \frac{3\lambda}{p} + \frac{3\lambda^2}{p+1} - \frac{\lambda^3}{p+2}; \dots$$

Учитывая, что $0 < \lambda(k) \leq 1$, находим оценку $C_0^{-1}(p, n) \leq (p-1)I_0(p, n, \lambda) \leq 1$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТА
МАСШТАБИРУЕМОСТИ АНИЗОМЕРИИ
ЭЙКОНАЛА ВОЛНЫ

Для расчета коэффициента масштабируемости $C(\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_\perp) = C(\theta_s, \varphi_s, \psi_\rho)$ (здесь (θ_s, φ_s) – углы вектора \mathbf{e}_s в сферической системе координат, ψ_ρ –

полярный угол вектора \mathbf{e}_\perp в полярной системе координат на плоскости $\mathbb{S}_s \perp \mathbf{e}_s$) выразим компоненты векторов $\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_\perp$ (а также $\mathbf{E}_s, \mathbf{E}_\perp$) в исходной декартовой системе координат (x, y, z) :

$$\mathbf{e}_s(\theta_s, \varphi_s) = (\sin \theta_s \cos \varphi_s, \sin \theta_s \sin \varphi_s, \cos \theta_s),$$

$$\mathbf{E}_s(\theta_s, \varphi_s) =$$

$$= (\beta_x \sin \theta_s \cos \varphi_s, \beta_y \sin \theta_s \sin \varphi_s, \beta_z \cos \theta_s),$$

$$\mathbf{e}_\perp(\theta_s, \varphi_s, \psi_\rho) \equiv \Delta \mathbf{r}_\perp / \Delta r_\perp = \cos \psi_\rho \mathbf{e}_\theta + \sin \psi_\rho \mathbf{e}_\varphi =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \psi_\rho \cos \theta_s \cos \varphi_s - \sin \psi_\rho \sin \varphi_s \\ \cos \psi_\rho \cos \theta_s \sin \varphi_s + \sin \psi_\rho \cos \varphi_s \\ -\cos \psi_\rho \sin \theta_s \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{E}_\perp(\theta_s, \varphi_s, \psi_\rho) = (\beta_x \mathbf{e}_{\perp x}, \beta_y \mathbf{e}_{\perp y}, \beta_z \mathbf{e}_{\perp z}) =$$

$$= \begin{pmatrix} \beta_x (\cos \theta_s \cos \varphi_s \cos \psi_\rho - \sin \varphi_s \sin \psi_\rho) \\ \beta_y (\cos \theta_s \sin \varphi_s \cos \psi_\rho + \cos \varphi_s \sin \psi_\rho) \\ \beta_z (-\sin \theta_s \cos \psi_\rho) \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathbf{e}_\varphi = (-\sin \varphi_s, \cos \varphi_s, 0)$, $\mathbf{e}_s = (\sin \theta_s \cos \varphi_s, \sin \theta_s \sin \varphi_s, \cos \theta_s)$ – орты на плоскости $\mathbb{S}_s \perp \mathbf{e}_s$ в местной системе координат. Расчет же векторного произведения (4.10) дает

$$[\mathbf{E}_\perp(\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_\perp) \times \mathbf{E}_s(\mathbf{e}_s)] =$$

$$= \begin{pmatrix} \beta_y \beta_z (\cos \theta_s \cos \varphi_s \sin \psi_\rho + \sin \varphi_s \cos \psi_\rho) \\ \beta_x \beta_z (\cos \theta_s \sin \varphi_s \sin \psi_\rho - \cos \varphi_s \cos \psi_\rho) \\ \beta_x \beta_y (-\sin \theta_s \sin \psi_\rho) \end{pmatrix}.$$

Введем для упрощения выкладок обозначения для множителей горизонтальной анизотропии на плоскости (x, y) :

$$\mathbf{B}_{xy} \equiv \beta_x \beta_y, \quad \mathbf{B}_z \equiv \beta_z^2 = 1/(\beta_x^2 \beta_y^2) = \mathbf{B}_{xy}^{-2},$$

$$\mathbf{v} \equiv (\beta_y^2 - \beta_x^2)/(2\beta_x \beta_y),$$

так что

$$\beta_x^2 = \mathbf{B}_{xy} (\sqrt{1+\mathbf{v}^2} - \mathbf{v}) = \mathbf{B}_{xy} (q(\mathbf{v}) - \mathbf{v}),$$

$$\beta_y^2 = \mathbf{B}_{xy} (\sqrt{1+\mathbf{v}^2} + \mathbf{v}) = \mathbf{B}_{xy} (q(\mathbf{v}) + \mathbf{v}),$$

$$q(\mathbf{v}) \equiv \sqrt{1+\mathbf{v}^2} = (\beta_x^2 + \beta_y^2)/(2\beta_x \beta_y); \quad (\mathbf{v} \equiv \sqrt{q^2 - 1}),$$

а также зависящие от полярного угла φ_s множители горизонтальной анизотропии

$$\mathbf{B}_\perp(\varphi_s) \equiv \beta_x^2 \cos^2 \varphi_s + \beta_y^2 \sin^2 \varphi_s =$$

$$= \mathbf{B}_{xy} [q(\mathbf{v}) - \mathbf{v} \cos(2\varphi_s)],$$

$$\mathbf{B}_\parallel(\varphi_s) \equiv \beta_x^2 \sin^2 \varphi_s + \beta_y^2 \cos^2 \varphi_s =$$

$$= \mathbf{B}_{xy} [q(\mathbf{v}) + \mathbf{v} \cos(2\varphi_s)],$$

$$\mathbf{B}_\Delta(\varphi_s) \equiv (\beta_y^2 - \beta_x^2) \sin \varphi_s \cos \varphi_s = \mathbf{B}_{xy} \mathbf{v} \sin(2\varphi_s).$$

Для волнового числа в направлении \mathbf{e}_s имеем:

$$\beta_0^2(\mathbf{e}_s) = B_{\perp}(\varphi_s) \sin^2 \theta_s + B_z \cos^2 \theta_s.$$

После подсчетов и упрощения окончательно находим выражение для коэффициента масштабности пространственной корреляции

$$Q^2(\theta_s, \varphi_s, \psi_p) \equiv C^2(\theta_s, \varphi_s, \psi_p) \beta_0^2(\theta_s, \varphi_s).$$

Как функция параметра ψ_p это эллипс на плоскости $S_s \perp \mathbf{e}_s$, параметры которого – полуоси и угол наклона полуосей ψ_0 – можно вычислить как функции координат вектора падения волны \mathbf{e}_s , приведя поворотом на этот угол квадратичную форму к сумме квадратов:

$$Q^2(\mathbf{e}_s, \psi_p) = A_1(\mathbf{e}_s) \cos^2 \psi_p + A_2(\mathbf{e}_s) \sin^2 \psi_p + 2D(\mathbf{e}_s) \sin \psi_p \cos \psi_p.$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_1(\mathbf{e}_s) &= B_z B_{\perp}(\varphi_s), \\ A_2(\mathbf{e}_s) &= B_z [B_{\parallel}(\varphi_s) \cos^2 \theta_s + B_{xy}^4 \sin^2 \theta_s], \\ D(\mathbf{e}_s) &= B_z B_{\Delta}(\varphi_s) \cos \theta_s. \end{aligned}$$

Определяя параметры $M(\mathbf{e}_s) \geq 0$ и ψ_0 из соотношений

$$\begin{aligned} A_1(\mathbf{e}_s) - A_2(\mathbf{e}_s) &= M(\mathbf{e}_s) \cos 2\psi_0, \\ 2D(\mathbf{e}_s) &= M(\mathbf{e}_s) \sin 2\psi_0, \\ M^2(\mathbf{e}_s) &= [A_1(\mathbf{e}_s) - A_2(\mathbf{e}_s)]^2 + 4D^2(\mathbf{e}_s), \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} 2Q^2(\mathbf{e}_s, \psi_p) &= A_1(\mathbf{e}_s) + A_2(\mathbf{e}_s) + \\ &+ M(\mathbf{e}_s) \cos(2\psi_p - 2\psi_0) = \\ &= (A_1 + A_2 + M) \cos^2(\psi_p - \psi_0) + \\ &+ (A_1 + A_2 - M) \sin^2(\psi_p - \psi_0). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что

$$\begin{aligned} Q_{\max}^2(\mathbf{e}_s) &= \max_{\psi_p} \{Q^2(\mathbf{e}_s, \psi_p)\} = \\ &= [A_1(\mathbf{e}_s) + A_2(\mathbf{e}_s) + M(\mathbf{e}_s)]/2 \\ &\text{при } \psi_p = \psi_0 + \pi n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{\min}^2(\mathbf{e}_s) &= \min_{\psi_p} \{Q^2(\mathbf{e}_s, \psi_p)\} = \\ &= [A_1(\mathbf{e}_s) + A_2(\mathbf{e}_s) - M(\mathbf{e}_s)]/2 \\ &\text{при } \psi_p = \psi_0 + \pi n + \pi/2, \end{aligned}$$

$$C_{\max, \min}(\mathbf{e}_s) = Q_{\max, \min}(\mathbf{e}_s) / \beta_0(\mathbf{e}_s).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

ФОРМУЛЫ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ ФЛУКТУАЦИЙ ЭЙКОНАЛА ВОЛНЫ ДЛЯ СТЕПЕННОЙ МОДЕЛИ ПОДОБИЯ

Подставляя в (4.6) степенную модель подобия (3.1), получаем выражение для “нормированного” коэффициента корреляции эйконала плоской волны:

$$\begin{aligned} R_{\text{iso}}(p, n, x) &= \frac{\int_0^{\infty} k dk \Phi_{\varepsilon}^0(k^2) J_0(xk)}{\int_0^{\infty} k dk \Phi_{\varepsilon}^0(k^2)} = \\ &= \frac{2\Gamma(p+n)}{\Gamma(n+1)\Gamma(p-1)} \int_0^{\infty} \frac{J_0(xk) k^{2n+1}}{(1+k^2)^{p+n}} dk. \end{aligned}$$

Приведем явный вид коэффициента корреляции эйконала плоской волны в случае степенной модели при значениях параметров $n = 0, n = 1$, и $p = 11/6$ (колмогоровская локально однородная турбулентность) и $p = 5/2$ (“приземная” стратифицированная турбулентность):

$$\begin{aligned} R_{\text{iso}}(5/2, 0, x) &= (1+x) \exp(-x); \\ R_{\text{iso}}(5/2, 1, x) &= (1+x-0.5x^2) \exp(-x); \\ R_{\text{iso}}(11/6, 0, x) &= [2^{1/6}/\Gamma(5/6)] x^{5/6} K_{5/6}(x); \\ R_{\text{iso}}(11/6, 1, x) &= [\pi/\Gamma(5/6)] (x/2)^{5/6} \times \\ &\times \{[x(I_{1/6}(x) - I_{11/6}(x)) + 2I_{-5/6}(x)] - (11/3)I_{5/6}(x)\}. \end{aligned}$$

Здесь I_{ν} – функция Бесселя, K_{ν} – модифицированная функция Бесселя.

Для “нормированного” коэффициента корреляции эйконала сферической волны $R_{\text{iso}}^{\text{sph}}(p, n, x) = \int_0^1 R_{\text{iso}}(p, n, x\xi) d\xi$ находим выражение

$$\begin{aligned} R_{\text{iso}}^{\text{sph}}(p, n, x) &= \frac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(n+1)\Gamma(p-1)} \times \\ &\times \int_0^{\infty} \{ \pi N_0(xk) J_1(xk) + [2 - \pi N_1(xk) J_0(xk)] \} \times \\ &\times \frac{k^{2n+1} dk}{(1+k^2)^{p+n}}. \end{aligned}$$

Здесь N_{ν} – функция Струве, J_{ν} – функция Бесселя.

Приведем явный вид “нормированного” коэффициента корреляции эйконала сферической волны при значениях параметров $n = 0, n = 1$, и $p = 11/6, p = 5/2$:

$$R_{\text{iso}}^{\text{sph}}(5/2, 0, x) = \frac{2 - (2 + x)e^{-x}}{x}, \quad R_{\text{iso}}^{\text{sph}}(5/2, 1, x) = \frac{2 + (x^2 - 2)e^{-x}}{2x},$$

$$R_{\text{iso}}^{\text{sph}}\left(\frac{11}{6}, 0, x\right) = {}_1F_2\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{6}, \frac{3}{2}; \frac{x^2}{4}\right) + \frac{3x^{5/3}\Gamma\left(-\frac{5}{6}\right) {}_1F_2\left(\frac{4}{3}, \frac{11}{6}, \frac{7}{3}; \frac{x^2}{4}\right)}{16 \times 2^{2/3}\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)},$$

$$R_{\text{iso}}^{\text{sph}}(11/6, 1, x) = \frac{x^2}{2} {}_1F_2\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{6}, \frac{5}{2}; \frac{x^2}{4}\right) + {}_1F_2\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{6}, \frac{3}{2}; \frac{x^2}{4}\right) -$$

$$- \frac{3\pi x^{5/3} \left[36x^2 {}_1F_2\left(\frac{7}{3}; \frac{17}{6}, \frac{10}{3}; \frac{x^2}{4}\right) + 847 {}_1F_2\left(\frac{4}{3}, \frac{11}{6}, \frac{7}{3}; \frac{x^2}{4}\right) \right]}{3080 \times 2^{2/3}\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)^2}.$$

Здесь ${}_1F_2$ – гипергеометрическая функция.

Similarity Model of Spatial Spectra of Random Anisotropy Inhomogeneities of Atmosphere Permittivity and its Application to Problems of Wave Propagation

A. G. Vinogradov^{1, 2, *} and A. N. Teokharov^{1, **}

¹Academician Mints Radiotechnical Institute,
8-Maria Str., 10, Moscow, 127083 Russia

²Obukhov Institute of Atmospheric Physics Russian Academy of Sciences,
Pyzhyovskiy pereulok, 3, Moscow, Russia

*e-mail: vinogradov@rti-mints.ru

**e-mail: ateokharov@rti-mints.ru

The similarity model of anisotropy fluctuations of permittivity in turbulent atmosphere is suggested. Correlation properties of fluctuations in different directions are shown to be similar and differ only by a direction-dependent scaling factor. The power-law model of fluctuations is suggested. Correlation properties of the phase of plane (and spherical) wave in geometric optics approximation are shown to be similar and differ only by a scaling factor dependent on propagation direction and orientation of vector connecting probe points. Correlation characteristics for a number of characteristic problem parameters are calculated.

Keywords: atmosphere, turbulence, permittivity, correlation characteristics, spectral characteristics, stratified troposphere