

УДК 519.6

ВАРИАЦИОННАЯ АССИМИЛЯЦИЯ ДАННЫХ В ЗАДАЧАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГИДРОФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В ОТКРЫТЫХ АКВАТОРИЯХ

© 2020 г. В. И. Агошков^{a, b}, В. Б. Залесный^a, Т. О. Шелопут^{a, *}

^aИнститут вычислительной математики им. Г.И. Марчука Российской академии наук,
ул. Губкина, 8, г. Москва, 119333 Россия

^bМосковский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы, 1, г. Москва, 119991 Россия

*e-mail: sheloput@phystech.edu

Поступила в редакцию 29.10.2019 г.

После доработки 19.12.2019 г.

Принята к публикации 05.02.2020 г.

Постановка граничных условий на жидких (открытых) границах является одной из актуальных проблем математического моделирования гидротермодинамики открытых акваторий. Вариационная ассимиляция данных — один из методов, позволяющих учесть жидкие границы в моделях. В настоящей работе рассматривается подход, который состоит в том, чтобы, имея данные наблюдений в некоторый момент времени, рассматривать задачу как обратную, в которой дополнительными неизвестными являются функции потоков через открытую границу. В настоящей работе приведена формулировка общей задачи вариационной ассимиляции данных наблюдений для модели гидротермодинамики открытой акватории, основанной на методе расщепления. Сформулированы алгоритмы вариационной ассимиляции данных о температуре и об уровне на жидкой границе, а также приведены результаты численных экспериментов по использованию алгоритмов в модели циркуляции Балтийского моря.

Ключевые слова: вариационная ассимиляция данных, моделирование морских систем, численные методы, обратные задачи, жидкие границы, открытые акватории

DOI: 10.31857/S0002351520030025

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование отдельных акваторий (морей, заливов, открытых акваторий океана) и прибрежных территорий является одним из актуальных и развивающихся направлений математической геофизики. В частности, это связано с необходимостью оценки влияния антропогенного воздействия на окружающую среду. Для учета специфики рассматриваемой акватории и корректного воспроизведения физических явлений в ней недостаточно проведения расчетов по модели общей циркуляции Мирового океана. Однако, при создании моделей открытых акваторий необходимо решать проблему постановки граничных условий на жидких границах (под жидкой, или открытой границей будем понимать границу типа “вода—вода”, отделяющую рассматриваемую область от Мирового океана). От способа задания граничных условий на жидких границах напрямую зависит полученный результат как при долгосрочных расчетах, так и в задачах оперативного прогноза.

Существуют различные подходы к решению проблемы учета жидких границ в моделях гидротермодинамики открытых акваторий. Одним из

подходов можно считать проведение расчета по всей акватории Мирового океана — на грубой сетке вне рассматриваемой акватории, на более мелкой — внутри: при этом существенно возрастают вычислительные затраты, однако отсутствуют внешние жидкие границы. Иногда результаты расчетов по всей акватории Мирового океана на грубой сетке используются для задания граничных условий на жидкой границе. Развитием данных идей является метод вложенных сеток — с обратной связью, с неполной обратной связью и без обратной связи [1]. Еще одним распространенным приемом является использование осредненных данных о потоках через жидкую границу [2] или задание потоков с помощью данных наблюдений [3]. Отдельный цикл работ [4, 5] посвящен формулировке условий излучения на жидких границах и их модификаций применительно к моделям гидродинамики. Также, перспективным методом для решения проблемы постановки граничных условий на жидкой границе можно считать ассимиляцию данных.

Существует множество работ, рассматривающих различные методы вариационной ассимиля-

ции данных применительно к задачам моделирования океанов и морей [6–10]. В работе [6] приведен обзор известных исследований по данной тематике. Ассимиляция данных является процедурой, смысл которой – сблизить получаемый в результате моделирования результат с данными наблюдений. Модели, в которых ассимиляция данных не используется, чаще всего дают статистически правильное решение, но при попытке сравнить данные наблюдений и полученный результат в определенный момент времени можно наблюдать значительные отличия между ними. Причиной таких противоречий является то, что общие модели циркуляции океана, которые часто используются для морских регионов горизонтального масштаба более 10 км, учитывают только общий эффект от тех явлений, масштаб которых по пространству значительно меньше масштаба рассматриваемой акватории [11]. Отличия также могут быть вызваны ошибками в задании начальных, граничных условий и внешних данных об атмосфере, ошибками в численном решении уравнений на сетке. Более того, моделируемые эффекты существенно нелинейны, что приводит к тому, что ошибки могут расти со временем и отдалять решение от данных наблюдений [6]. Методы вариационной ассимиляции предоставляют математическую оценку того, как требуется изменить вектор управления (в который могут входить различные параметры модели – коэффициенты, “форсинги”, начальные и граничные условия, известные неточно), чтобы получить решение, максимально близкое к данным наблюдений. Следует заметить, что полученный таким образом вектор управления может принимать физически необоснованные значения. Такое может случаться из-за того, что реальные данные наблюдений отражают все происходящие в природе явления, в том числе и те, которые не учитываются в математической модели. Для решения данного противоречия в работе [12] был предложен вариационный подход, идея которого заключается в том, что не только сами функции в граничных условиях заданы неточно, но и сами граничные условия и даже уравнения модели сформулированы “грубо”. Суть предложенного в [12] метода состоит в том, чтобы отыскать обобщенное решение в смысле наименьших квадратов, минимизирующее функционал невязки, в который с подобранными весами входят также слагаемые, отвечающие за близость к данным наблюдений.

Идея метода, предложенного в работах [13–17] состоит в том, чтобы, имея данные наблюдений в некоторый момент времени, рассматривать задачу как обратную, в которой дополнительными неизвестными являются функции потоков через от-

крытую границу. В работе [16] сформулирован класс обратных задач и задач вариационной ассимиляции данных наблюдений, связанных с математическим моделированием гидрофизических полей в акваториях (морях и океанах) при наличии жидких границ, в применении к модели гидротермодинамики, основанной на системе уравнений в приближении Буссинеска и гидростатики [18, 19]. Для аппроксимации модели по времени был использован метод расщепления, что позволило рассматривать задачу ассимиляции данных для нелинейной модели гидротермодинамики на каждом интервале по времени, решая последовательно более простые задачи ассимиляции, привлекая соответствующие изменяющимся переменным данные наблюдений. Был поставлен класс обратных задач о “граничных функциях”, определяющих граничные условия на жидких границах и была исследована разрешимость ряда задач из этого класса, а также предложены алгоритмы их численного решения на основе вариационной ассимиляции данных наблюдений. В работе [14] была исследована обратная задача об определении неизвестной функции в граничных условиях на жидкой границе для простейшей модели приливов. Результаты работы были использованы в [20], где приведены результаты численных экспериментов применительно к акватории Охотского моря. В работе [15] обратные задачи с ассимиляцией данных об уровне моря из [16] были переформулированы и исследованы как обратные задачи для эволюционных уравнений второго порядка.

В настоящей работе приведена формулировка общей задачи вариационной ассимиляции данных наблюдений для модели гидротермодинамики открытой акватории, основанной на методе расщепления. Сформулирован алгоритм вариационной ассимиляции данных о температуре на жидкой границе, приведены результаты численных экспериментов по использованию алгоритма в модели гидротермодинамики Балтийского моря [18] в сравнении с алгоритмом, рассмотренным в работе [21]. Сформулирован алгоритм вариационной ассимиляции данных об уровне на жидкой границе, приведены результаты численных экспериментов по ассимиляции данных наблюдений со спутников и уровнемерных постов в модели [18].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данном разделе вводятся основные обозначения и уравнения, которые используются в рассматриваемых задачах, а также формулируется класс обратных задач и задач вариационной ассимиляции данных наблюдений, связанных с мате-

матическим моделированием гидрофизических полей в акваториях (морях и океанах) при наличии жидких границ, в применении к модели гидротермодинамики, основанной на системе уравнений в приближении Буссинеска и гидростатики.

1.1. Рассмотрим географическую (геодезическую) систему координат (λ, θ, r) , где $\lambda \in [0, 2\pi]$ – географическая долгота, увеличивающаяся с запада на восток, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ – географическая широта, растущая с юга на север, r – расстояние точки от центра Земли, средний радиус которой принимается равным R_3 . Вместо r введем координату $z = R_3 - r$ оси Oz , направленной по нормали от поверхности сферы S_R радиуса R_3 к ее центру, т.е. по направлению силы тяжести. Единичные вектора в λ -, θ - и z -направлениях обозначим соответственно через e_λ, e_θ, e_z . Тогда вектор скорости в океане записывается в форме: $\vec{U} = ue_\lambda + ve_\theta + we_z \equiv (\vec{u}, w)$, где $\vec{u} = (u, v)$ – “горизонтальный вектор” скорости в координатной форме, а w – “вертикальная скорость”.

Обозначим через Ω часть поверхности сферы S_R , которую будем называть также “поверхностью отсчета”. Поверхность океана будем задавать уравнением $z = \xi(\lambda, \theta, t)$, где $(\lambda, \theta, R_3) \in \Omega$, а t – временная переменная, $t \in [0, \bar{t}]$ ($\bar{t} < \infty$). Функцию рельефа дна определим как $z = H(\lambda, \theta)$ при $(\lambda, \theta, R_3) \in \Omega$, где $H(\lambda, \theta) \geq \epsilon$, $\epsilon = \text{const} > 0$.

В дальнейшем мы будем использовать также следующие обозначения: $\lambda \equiv x, \theta \equiv y, \vec{x} \equiv (x, y, z)$. Элемент объема в области $D(t)$: $D(t) = \{(x, y, z) : (\lambda, \theta, R_3) \in \Omega, \xi(\lambda, \theta, t) < z < H(\lambda, \theta)\}$, $t \in [0, \bar{t}]$, есть $dD = (R - z)^2 \cos y dx dy dz$, а элемент поверхности Ω имеет вид $d\Omega = R_3^2 \cos y dx dy$. Введем следующие дифференциальные операции градиента, дивергенции и полной производной в одной из сферических систем координат при $r \equiv r(z) \equiv R - z \equiv R, n \equiv 1/r, m \equiv 1/(r \cos y)$ (оставив за этими операциями известные обозначения из векторного анализа):

$$\begin{aligned} \mathbf{Grad}\varphi &\equiv \left(\mathbf{grad}\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right), \quad \mathbf{grad}\varphi \equiv \left(m \frac{\partial\varphi}{\partial x}, n \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right), \\ \mathbf{Div}\vec{U} &\equiv \mathbf{div}\vec{u} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 w}{\partial z}, \quad \mathbf{div}\vec{u} \equiv m \frac{\partial u}{\partial x} + \\ &+ m \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{n}{m} v \right], \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + (\vec{U}, \nabla\varphi), \\ (\vec{U}, \nabla) &\equiv (\vec{u}, \mathbf{grad}) + w \frac{\partial}{\partial z}, \\ (\vec{u}, \mathbf{grad}) &= um \frac{\partial}{\partial x} + vn \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Далее используются также следующие дифференциальные операторы второго порядка: $A_\Phi \Phi \equiv -\mathbf{Div}(a_\Phi \mathbf{Grad}\Phi)$, где $a_\Phi = \text{diag}((a_\Phi)_{ii})$, $(a_\Phi)_{11} = (a_\Phi)_{22} \equiv \mu_\Phi, (a_\Phi)_{33} \equiv \nu_\Phi$, а индекс Φ может принимать значения u, v, T, S (т.е. обозначения компонентов вектора горизонтальной скорости, температуры T и солёности S). Принимается также: $\mu_u = \mu_v \equiv \mu, \nu_u = \nu_v \equiv \nu$ и предполагается, что $\mu, \nu, \mu_T, \mu_S, \nu_T, \nu_S$ являются заданными положительными и гладкими функциями. Далее будет рассматриваться также оператор четвертого порядка $(A_k)^2$, где оператор второго порядка A_k введен выше при $A_\Phi = A_k$ и определяется матрицей $\hat{k} = \text{diag}\{k_{ii}\}$ с неотрицательными диагональными элементами k_{ii} , являющимися постоянными или достаточно гладкими функциями. В последующем через $l = l(y)$ обозначается Кориолисов параметр: $l = 2\omega \sin y$, где ω – угловая скорость вращения Земли, а также $f(u) = l + mu \sin y \equiv l + f_1(u)$.

Заметим, что функция уровня $\xi = \xi(x, y, t)$ является также одной из неизвестных функций, подлежащих определению, поэтому область $D(t)$ является областью с неизвестной границей (или областью с движущейся границей). Рассмотрим также фиксированную область: $D = \{(\lambda, \theta, z) : (\lambda, \theta, R_3) \in \Omega, 0 < z < H(\lambda, \theta)\}$. Границу области $\Gamma \equiv \partial D$ мы будем представлять как объединение четырех непересекающихся частей, $\Gamma_S, \Gamma_{w,op}, \Gamma_{w,c}, \Gamma_H$, где $\Gamma_S \equiv \Omega$ – “невозмущенная поверхность океана”, $\Gamma_{w,op}$ – жидкая (открытая) часть вертикальной боковой границы, $\Gamma_{w,c}$ – твердая часть вертикальной боковой границы, Γ_H – дно океана. Характеристические функции $\Gamma_S, \Gamma_{w,op}, \Gamma_{w,c}, \Gamma_H$ – частей границы Γ будем обозначать соответственно $m_S, m_{w,op}, m_{w,c}, m_H$. Отметим, что некоторые из частей $\Gamma_S, \Gamma_{w,op}, \Gamma_{w,c}, \Gamma_H$ могут отсутствовать.

В дальнейшем мы всегда предполагаем, что Ω является многосвязным многообразием на S_R , а границы $\partial\Omega, \Gamma$ считаем кусочно-гладкими класса $C^{(2)}$, локально удовлетворяющими условию Липшица. Единичный вектор внешней нормали к Γ обозначаем через $\vec{N} \equiv (N_1, N_2, N_3)$. Отмечаем, что $\vec{N} = (0, 0, -1)$ на Γ_S и $\vec{N} = (N_1, N_2, 0)$ на $\Gamma_w = \Gamma_{w,op} \cup \Gamma_{w,c}$ при этом вектор $\vec{n} \equiv (n_1, n_2) \equiv (n_1, n_2)$ является единичным вектором внешней нормали к $\partial\Omega$. Выражение компонентов N_1, N_2, N_3 определяется выбираемым параметрическим представлением той или иной части границы.

При рассмотрении вектора скорости на границе Γ мы будем обозначать его составляющую по нормали через U_n : $U_n = \vec{U} \cdot \vec{N} = uN_1 + vN_2 + wN_3$. И пусть далее

$$U_n^{(+)} \equiv \frac{|U_n| + U_n}{2}, \quad U_n^{(-)} \equiv \frac{|U_n| - U_n}{2}.$$

Отмечаем, что $U_n = U_n^{(+)} - U_n^{(-)}$ на Γ .

1.2. Запишем в области D в переменных (λ, θ, z) при $t \in (0, \bar{t})$ систему уравнений гидротермодинамики в приближении Буссинеска и гидростатики [22], но беря коэффициенты Ламе соответствующими сферической системе координат [16, 23]:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{u}}{dt} + \begin{bmatrix} 0 & -f \\ f & 0 \end{bmatrix} \vec{u} - g\mathbf{grad}\xi + A_u\vec{u} + (A_k)^2\vec{u} = \\ = \vec{f} - \frac{1}{\rho_0}\mathbf{grad}P_a - \frac{g}{\rho_0}\mathbf{grad}\int_0^z \rho_1(T, S)dz', \\ \frac{\partial\xi}{\partial t} - m\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^H \Theta(z)udz\right) - m\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_0^H \Theta(z)\frac{n}{m}vdz\right) = f_3, \\ \frac{dT}{dt} + A_T T = f_T, \quad \frac{dS}{dt} + A_S S = f_S, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$\rho_1(T, S) = \rho_0\beta_T(T - T^{(0)}) + \rho_0\beta_S(S - S^{(0)}) + \gamma\rho_0\beta_{TS}(T, S) + f_P,$$

$\vec{f} = (f_1, f_2)$, f_T , f_S , f_P – заданные функции “внутренних” источников, $g = \text{const} > 0$, ρ_0 , $T^{(0)}$, $S^{(0)}$ – “невозмущенные” значения плотности воды, температуры, солёности, β_T , β_S – коэффициенты (считающиеся постоянными), $\beta_{TS}(T, S)$, P_a – заданные функции, а γ – числовой параметр. Здесь и в дальнейшем используется следующая весовая функция: $\Theta(z) \equiv r(z)/R$. В дальнейшем рассматривается случай, когда $\vec{f} \equiv g\mathbf{grad}G$ при некоторой скалярной функции $G = G(\lambda, \theta, t)$, например, $G \equiv \xi^+$ – статический прилив, более детальное описание которого дано в [23].

Обратим внимание на то, что по физическому смыслу координаты (λ, θ, z) являются геодезическими, но в силу приближенной записи коэффициентов Ламе система (1) принимает вид в одной из систем сферических координат [16].

При рассмотрении (1) в $D \times (0, \bar{t})$ можно задавать следующие граничные и начальные условия [16].

Граничные условия на Γ_S :

$$\begin{cases} \left(\int_0^H \Theta\vec{u}dz\right) \vec{n} + m_{w,op}\sqrt{gH}\xi = m_{w,op}\sqrt{gH}d_s \text{ на } \partial\Omega, \\ U_n^{(-)}u - v\frac{\partial u}{\partial z} - k_{33}\frac{\partial}{\partial z}A_k u = \tau_x^{(a)}/\rho_0, \\ U_n^{(-)}v - v\frac{\partial v}{\partial z} - k_{33}\frac{\partial}{\partial z}A_k v = \tau_y^{(a)}/\rho_0, \\ A_k u = 0, \quad A_k v = 0, \quad U_n^{(-)}T - v_T\frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_T(T - T_a) = Q_T, \\ U_n^{(-)}S - v_S\frac{\partial S}{\partial z} + \gamma_S(S - S_a) = Q_S, \end{cases} \quad (2)$$

где $\tau_x^{(a)}$, $\tau_y^{(a)}$ – компоненты векторов касательных напряжений ветра соответственно вдоль осей Ox и Oy на поверхности $z = 0$, γ_T , γ_S , T_a , S_a , – заданные функции, Q_T , Q_S – функции потоков, заданные на всей Γ .

Граничные условия на $\Gamma_{w,c}$ (на “твёрдой боковой стенке”):

$$\begin{cases} U_n = 0, \quad A_k\vec{U} = 0, \quad \frac{\partial\vec{U}}{\partial N_u}\tau_w + \left(\frac{\partial}{\partial N_u}A_k\vec{U}\right)\tau_w = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial N_T} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial N_S} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где $\tau_w = (-N_2, N_1, 0)$, $\vec{U} \equiv (u, v, 0) \equiv (\vec{u}, 0)$, $\varphi/\partial N_\varphi \equiv \vec{N} \cdot \hat{a}_\varphi \cdot \mathbf{Grad}\varphi$, $\varphi = u, v, T, S$.

Граничные условия на $\Gamma_{w,op}$ (на “жидкой части боковой стенки”):

$$\begin{cases} U_n^{(-)}(\vec{U} \cdot \vec{N}) + \frac{\partial\vec{U}}{\partial N_u} \cdot \vec{N} + \left(\frac{\partial}{\partial N_u}A_k\vec{U}\right) \cdot \vec{N} = U_n^{(-)}d, \\ A_k\vec{U} = 0, \quad U_n^{(-)}(\vec{U} \cdot \tau_w) + \frac{\partial\vec{U}}{\partial N_u} \cdot \tau_w + \\ + \left(\frac{\partial}{\partial N_u}A_k\vec{U}\right) \cdot \tau_w = 0, \quad U_n^{(-)}T + \frac{\partial T}{\partial N_T} = \\ = d_T + Q_T, \quad U_n^{(-)}S + \frac{\partial S}{\partial N_S} = d_S + Q_S. \end{cases} \quad (4)$$

Граничные условия на Γ_H (“на дне”):

$$\begin{cases} U_n = 0, & A_k \tilde{U} = 0, & \frac{\partial T}{\partial N_T} = 0, & \frac{\partial S}{\partial N_S} = 0, \\ \frac{\partial \tilde{U}}{\partial N_u} \cdot \tau_x + \left(\frac{\partial}{\partial N_k} A_k \tilde{U} \right) \cdot \tau_x = -\tau_x^{(b)} \rho_0, & \\ \frac{\partial \tilde{U}}{\partial N_u} \cdot \tau_y + \left(\frac{\partial}{\partial N_u} A_k \tilde{U} \right) \cdot \tau_y = -\tau_y^{(b)} \rho_0, & \end{cases} \quad (5)$$

где τ_x, τ_y – система единичных ортогональных касательных векторов на поверхности $z = 0$; $\tau_x^{(b)}, \tau_y^{(b)}$ – проекции вектора напряжения придонного трения соответственно на оси Ox, Oy .

Начальные условия для u, v, T, S, ξ :

$$\begin{aligned} u &= u^0, & v &= v^0, & T &= T^0, & S &= S^0, \\ \xi &= \xi^0 & \text{при } t &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $u^0, v^0, T^0, S^0, \xi^0$ – заданные функции.

Пусть функции d, d_s, d_T, d_S, f_3 заданы. Тогда задача крупномасштабной динамики океана в терминах функций u, v, ξ, T, S формулируется так: найти u, v, ξ, T, S , удовлетворяющие (1)–(6).

Заметим, что “диффузионные операторы” в уравнениях для u, v не учитывают некоторых дифференциальных операторов меньших порядков, существенных около полюсов. Поэтому, вообще говоря, система (1) должна рассматриваться в области с исключенными точками полюсов. В настоящей работе ограничимся рассмотрением системы уравнений (1).

Для аппроксимации задачи (1)–(6) по времени используется метод расщепления. Пусть на $[0, \bar{t}]$ введена сетка: $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{j-1} < t_j = \bar{t}$, $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$. Приведем одну из схем, полученную методом слабой аппроксимации, аппроксимирующую исходную задачу, рассматривая подзадачи, входящие в эту схему, в “классических постановках” и считая все компоненты решений обладающими необходимой гладкостью по всем независимым переменным. Эта схема состоит из шагов (этапов), перечисленных ниже. При формулировке шагов используются индексы: нижний индекс у отыскиваемых переменных (T, ξ и др.) обозначает номер шага метода расщепления, а верхний индекс – номер шага по времени.

ШАГ 1: Решение j -ой подзадачи на этом шаге метода расщепления удовлетворяет системе соотношений вида (при $\bar{u}_1^j \equiv \bar{u}, \dots, \bar{\xi}_1^j \equiv \bar{\xi}$):

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \bar{u} - g \cdot \mathbf{grad} \bar{\xi} = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} = 0, & \frac{\partial S}{\partial t} = 0 & \text{в } D \times (t_{j-1}, t_j), \\ \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t} - \mathbf{div} \left(\int_0^H \Theta \bar{u} dz \right) = f_3 & \text{в } \Omega \times (t_{j-1}, t_j), \\ \left(\int_0^H \Theta \bar{u} dz \right) \cdot \bar{n} + m_{w,op} \sqrt{gH} \bar{\xi} = \\ = m_{w,op} \sqrt{gH} d_s & \text{на } \partial \Omega \times (t_{j-1}, t_j), \\ \bar{u} = \bar{u}^0, & \bar{\xi} = \bar{\xi}^0, & T = T^0, \\ S = S^0 & \text{при } t = t_0 \quad (j = 1), \\ \bar{u} = \bar{u}_5^{j-1}, & \bar{\xi} = \bar{\xi}_5^{j-1}, & T = T_5^{j-1}, \\ S = S_5^{j-1} & \text{при } t = t_{j-1} \quad (j = 2, 3, \dots, J), \end{cases} \quad (7)$$

где $\bar{u}^0 = (u^0, v^0)$, $\bar{u}_5^{j-1} = (u_5^{j-1}, v_5^{j-1})$.

Из (7) заключаем, что для этой задачи имеем:

$$\begin{aligned} T &= T_1^0, & S &= S_1^0 & \text{в } D \times (t_0, t_1) \quad (j = 1), \\ T &= T_5^{j-1}, & S &= S_5^{j-1} & \text{в } D \times (t_{j-1}, t_j) \\ & & & & \text{при } j = 2, 3, \dots, J. \end{aligned} \quad (8)$$

Отыскание же $\bar{u}, \bar{\xi}$ сводится к решению задач вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \underline{U} - g \cdot \mathbf{grad} \bar{\xi} = 0 & \text{в } \Omega \times (t_{j-1}, t_j), \\ \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t} - \mathbf{div} (H_1 \underline{U}) = f_3 & \text{в } \Omega \times (t_{j-1}, t_j), \\ H_1 (\underline{U} \cdot \bar{n}) + m_{w,op} \sqrt{gH} \bar{\xi} = \\ = m_{w,op} \sqrt{gH} d_s & \text{на } \partial \Omega \times (t_{j-1}, t_j), \\ \underline{U} = \underline{U}^0, & \bar{\xi} = \bar{\xi}^0 & \text{при } t = t_0; \\ \underline{U} = \underline{U}_5^{j-1}, & \bar{\xi} = \bar{\xi}_5^{j-1} & \text{при } t = t_{j-1} \quad (j = 2, 3, \dots, J), \end{cases} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} H_1 &\equiv \int_0^H \Theta(z) dz, & \underline{U} &= \frac{1}{H_1} \int_0^H \Theta \underline{u} dz \equiv \\ &\equiv (U_1(x, y, t), U_2(x, y, t)) = \\ &= \left(\frac{1}{H_1} \int_0^H \Theta u dz, \frac{1}{H_1} \int_0^H \Theta v dz \right), \end{aligned}$$

и решению следующей задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{W}}{\partial t} + \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \underline{W} = 0 \quad \text{в } D \times (t_{j-1}, t_j), \\ \underline{W} = (\bar{u}^0 - \underline{U}^0) \quad \text{при } t = t_0 \quad (j = 1), \\ \underline{W} = (\bar{u}_5^{j-1} - \underline{U}_5^{j-1}) \quad \text{при } t = t_{j-1} \quad (j = 2, 3, \dots, J). \end{cases} \quad (10)$$

Решая (9), (10) получаем $\xi = \xi_1^j$, а также

$$\bar{u}_1^j \equiv \bar{u} = \underline{U} + \underline{W} \quad \text{в } D \times (t_{j-1}, t_j), \quad (11)$$

что заканчивает реализацию этого шага метода расщепления.

ШАГ 2. Решение j -ой подзадачи здесь удовлетворяет системе вида (при $\bar{u} \equiv \bar{u}_2^{j-1}, \dots, \xi \equiv \xi_2^j$):

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} + (\bar{U}, \mathbf{Grad})T + A_T T = f_T \quad \text{в } D \times (t_{j-1}, t_j), \\ U_n^{(-)} T - v_T \frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_T (T - T_a) = Q_T^j, \quad z = 0, t \in (t_{j-1}, t_j), \\ \frac{\partial T}{\partial N_T} = 0 \quad \text{на } \Gamma_H \cup \Gamma_{w,c}, \quad t \in (t_{j-1}, t_j), \\ U_n^{(-)} T + \frac{\partial T}{\partial N_T} = d_T \quad \text{на } \Gamma_{w,op}, \quad t \in (t_{j-1}, t_j), \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \lambda_T \bar{u} = g \cdot \mathbf{grad} \left(\int_0^z \beta_T T dz' \right) \quad \text{в } D \times (t_{j-1}, t_j), \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0 \quad \text{в } \Omega \times (t_{j-1}, t_j), \\ \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad \text{в } D \times (t_{j-1}, t_j); \quad \bar{u} = u_1^j(t_j), \\ \xi = \xi_1^j, \quad T = T_1^j, \quad S = S_1^j \quad \text{при } t = t_{j-1}, \end{cases} \quad (12)$$

где $\bar{U} \equiv \bar{U}^j = (u^j, v^j, w^j)$, $U_n^{(-)}$ вычисляется на основе \bar{U}^j , а λ_T и λ_S есть заданные достаточно малые постоянные, вводимые для обоснования схемы расщепления (см. [16]).

Отмечаем, что в данной подзадаче имеем:

$$\begin{aligned} \xi &\equiv \xi_2^j = \xi_1^j \quad \text{в } \Omega \times (t_{j-1}, t_j), \\ S &\equiv S_2^j = S_1^j \quad \text{в } D \times (t_{j-1}, t_j) \end{aligned} \quad (13)$$

и после решения задачи для $T \equiv T_2^j$ вычисление $\bar{u} \equiv \bar{u}_2^j$ осуществляется по формуле:

$$\begin{aligned} \bar{u}_2^j &= \bar{u}_1^j(t_j) \cdot e^{-\lambda_T(t-t_{j-1})} + g \cdot \beta_T \int_{t_{j-1}}^t \mathbf{grad} \left(\int_0^z T_2^j dz' \right) \times \\ &\times e^{-\lambda_T(t'-t_{j-1})} dt' \quad \text{в } D(t_{j-1}, t_j). \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, реализация данного шага фактически сводится к решению подсистемы уравнений с целью вычисления $T \equiv T_2^j$.

ШАГ 3. Данный этап аналогичен предыдущему и он сводится к решению задачи для $S \equiv S_3^j$:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + (\bar{U}, \mathbf{Grad})S + A_S S = f_S \quad \text{в } D \times (t_{j-1}, t_j), \\ U_n^{(-)} S - v_S \frac{\partial S}{\partial z} + \gamma_S (S - S_a) = Q_S^j, \\ z = 0, \quad t \in (t_{j-1}, t_j), \\ \frac{\partial S}{\partial N_S} = 0 \quad \text{на } \Gamma_H \cup \Gamma_{w,c}, \quad t \in (t_{j-1}, t_j), \\ U_n^{(-)} S + \frac{\partial S}{\partial N_S} = d_S \quad \text{на } \Gamma_{w,op}, \quad t \in (t_{j-1}, t_j), \\ S = (S_2^j = S_1^j) \quad \text{при } t = t_{j-1}. \end{cases} \quad (15)$$

После чего полагается:

$$\begin{cases} \bar{u}_3^j = \bar{u}_2^j(t_j) \cdot e^{-\lambda_S(t-t_{j-1})} + g \cdot \beta_S \int_{t_{j-1}}^t \mathbf{grad} \left(\int_0^z S dz' \right) \times \\ \times e^{-\lambda_S(t'-t_{j-1})} dt' \quad \text{в } D \times (t_{j-1}, t_j), \\ \xi_3^j = \xi_2^j = \xi_1^j \quad \text{в } \Omega \times (t_{j-1}, t_j), \\ T_3^j = T_2^j \quad \text{в } D \times (t_{j-1}, t_j). \end{cases} \quad (16)$$

Функции $\bar{U}, U_n^{(-)}$ определяются так же, как и на предыдущем шаге.

ШАГ 4. Решаемая здесь подзадача имеет вид:

$$\begin{cases} \xi_4 = \xi_1^j \quad \text{в } \Omega \times (t_{j-1}, t_j), \quad T_4 = T_2^j \\ \text{в } D \times (t_{j-1}, t_j), \quad S_4 = S_3^j \quad \text{в } D \times (t_{j-1}, t_j), \\ \frac{\partial \bar{u}_4}{\partial t} + A_k^2 \bar{u}_4 = 0 \quad \text{в } D \times (t_{j-1}, t_j), \quad A_k \bar{u}_4 = 0, \\ k_{33} \frac{\partial}{\partial z} A_k \bar{u}_4 = 0 \quad \text{на } \Gamma_S \times (t_{j-1}, t_j), \\ (\bar{U}_4 \cdot \bar{N}) = 0, \quad A_k \bar{U}_4 = 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial N_k} A_k \bar{U}_4 \right) \cdot \tau_w = 0 \quad \text{на } \Gamma_{w,c} \times (t_{j-1}, t_j), \\ \left(\frac{\partial}{\partial N_k} A_k \bar{U}_4 \right) \cdot \bar{N} = 0, \quad A_k \bar{U}_4 = 0, \\ \frac{\partial \bar{U}_4}{\partial N_k} \cdot \tau_w + \left(\frac{\partial}{\partial N_k} A_k \bar{U}_4 \right) \cdot \tau_w = 0 \quad \text{на } \Gamma_{w,op} \times (t_{j-1}, t_j), \\ (\bar{U}_4 \cdot \bar{N}) = 0, \quad A_k \bar{U}_4 = 0, \quad \frac{\partial \bar{U}_4}{\partial N_k} \cdot \tau_w + \\ + \left(\frac{\partial}{\partial N_k} A_k \bar{U}_4 \right) \cdot \tau_w = 0 \quad \text{на } \Gamma_H \times (t_{j-1}, t_j), \\ \text{при условии } \bar{U}_4 = \bar{U}_3^j \quad \text{при } t = t_{j-1}. \end{cases}$$

ШАГ 5. Система уравнений, соответствующая данному этапу решения задачи, имеет вид (при $\bar{u} \equiv \bar{u}_5^j, \dots, \xi \equiv \xi_5^j$):

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{U}, \mathbf{Grad})\bar{u} + A_u \bar{u} - (\lambda_T + \lambda_S)\bar{u} + \\ & + \begin{bmatrix} 0 & -\ell_1(\bar{u}^j) \\ \ell_1(\bar{u}^j) & 0 \end{bmatrix} \bar{u} = \bar{f} - \frac{1}{\rho_0} \mathbf{grad}(P_1(\bar{T}^j, \bar{S}^j)) \quad \text{в } D \times (t_{j-1}, t_j), \\ & \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0 \quad \text{в } \Omega \times (t_{j-1}, t_j), \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad \text{в } D \times (t_{j-1}, t_j), \\ & U_n^{(-)} \bar{u} - v \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{\tau^{(a)}}{\rho_0}, \quad \tau^{(a)} = (\tau_x^{(a)}, \tau_y^{(a)}), \quad z = 0, \quad t \in (t_{j-1}, t_j), \\ & \tilde{U} \cdot \bar{N} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{U}}{\partial N_U} \cdot \tau_w = 0 \quad \text{на } \Gamma_{w,c}, \quad t \in (t_{j-1}, t_j), \\ & U_n^{(-)} (\tilde{U} \cdot \bar{N}) + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial N_U} \cdot \bar{N} = U_n^{(-)} d \quad \text{на } \Gamma_{w,op}, \quad t \in (t_{j-1}, t_j), \\ & \frac{\partial \bar{u}}{\partial N_u} = -\frac{\tau^{(b)}}{\rho_0} \quad \text{на } \Gamma_H, \quad t \in (t_{j-1}, t_j), \\ & \bar{u} = u_4^j(t_j), \quad \xi = \xi_4^j(t_j), \quad T = T_4^j(t_j), \quad S = S_4^j(t_j) \quad \text{при } t = t_{j-1}, \end{aligned} \right. \quad (17)$$

где $\tau^{(a)} = (\tau_x^{(a)}, \tau_y^{(a)})$, $\tau^{(b)} = (\tau_x^{(b)}, \tau_y^{(b)})$, $\tilde{U} \equiv \tilde{U}^j = (u_4^j, v_4^j, 0)$ а \bar{U} , $U_n^{(-)}$ определяются так же, как и ранее.

Из (17) имеем:

$$\left\{ \begin{aligned} \xi_5^j &= \xi_4^j = \xi_3^j = \xi_2^j = \xi_1^j \quad \text{в } \Omega \times (t_{j-1}, t_j), \\ T_5^j &= T_4^j = T_3^j = T_2^j, \\ S_5^j &= S_4^j = S_3^j \quad \text{в } D \times (t_{j-1}, t_j), \end{aligned} \right. \quad (18)$$

и реализация (17) сводится к решению задачи для $\bar{u} \equiv \bar{u}_5^j = (u_5^j, v_5^j)$. После чего принимается:

$$\Phi^j \equiv (u^j, v^j, \xi^j, T^j, S^j) \equiv (u_5^j, v_5^j, \xi_1^j, T_2^j, S_3^j) \quad (19)$$

– приближенное решение задачи (1)–(6) на интервале (t_{j-1}, t_j) . Вычисление w^j , P_1 производится по формулам, приведенным в [16].

Отметим, что записанную выше схему расщепления можно рассматривать как исходную задачу, для которой ниже будет формулироваться класс обратных задач.

1.3. Пусть в качестве “дополнительных неизвестных” принимаются функции: d_T на $\Gamma_{w,op} \times (0, \bar{t})$, d_S на $\Gamma_{w,op} \cap \partial\Omega \times (0, \bar{t})$. Функции d , d_S , f_3 в данной работе считаем заданными (рассмотрение задач с неизвестными d , f_3 можно найти в работах [15, 16], восстановление функции d_S проводится аналогично восстановлению функции d_T).

Введем “уравнения замыкания” (“дополнительные уравнения”). Предположим, что на некоторой части $\Gamma_{o,T}$ границы $\Gamma = \partial D$ и в какой-то промежуток времени из $(0, \bar{t})$ имеются данные наблюдений

за температурой T_{obs} (отмечаем возможность случая, когда $\Gamma_{o,T} \subset \Gamma_{w,op}$, $\Gamma_{w,op} \subset \Gamma_{o,T}$, $\Gamma_{o,T} \equiv \Gamma_{w,op}$, $\Gamma_{o,T} = \Gamma$, $mes(\Gamma_{o,T} \cap \Gamma_{w,op}) > 0$). Характеристическую функцию множества точек, на котором имеются наблюдения T_{obs} , обозначим $\chi_T \equiv \chi_T(x, y, z, t)$ (для определенности считаем, что $T_{obs} \equiv 0$ на $(\Gamma \setminus \Gamma_{o,T}) \times (0, \bar{t})$). Аналогично вводится характеристическая функция $\chi_{\xi, \partial\Omega}$ – для наблюдений $\xi_{obs, \partial\Omega}$ на $\partial\Omega \times (0, \bar{t})$.

Рассмотрим следующие уравнения замыкания:

$$\left\{ \begin{aligned} \chi_T T &= \chi_T T_{obs} \quad \text{на } \Gamma \times (0, \bar{t}), \\ \chi_{\xi, \partial\Omega} \xi &= \chi_{\xi, \partial\Omega} \xi_{obs} \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, \bar{t}). \end{aligned} \right. \quad (20)$$

Теперь “общая” обратная задача формулируется следующим образом: найти $\Phi = (u, v, \xi, T, S)$ и $V = (d_T, d_S)$, такие, что выполняются уравнения (1)–(6) и (20).

В такой форме задача (1)–(6), (20) есть “задача точного управления” и, как правило, она не имеет решений. Поэтому целесообразно перейти от (1) к слабой формулировке этих уравнений с введением регуляризационной процедуры [24]. Для этого вводим функционал вида:

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_{\alpha, \gamma}(V, \Phi) &= \sum_{j=1}^J \mathfrak{J}_{\alpha, \gamma}^{(j)}(V, \Phi) = \\ &= \sum_{j=1}^J (\mathfrak{J}_{\alpha}^{(j)}(V) + \mathfrak{J}_{\gamma}^{(j)}(\Phi)), \end{aligned} \quad (21)$$

где $(j = \overline{1, J})$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_\alpha^{(j)}(V) &= \frac{\alpha_1}{2} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\Gamma_{w,op}} (d_T - d_T^{(0)})^2 d\Gamma dt + \\ &+ \frac{\alpha_2}{2} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\partial\Omega} m_{w,op} g (d_s - d_s^{(0)})^2 d\Gamma dt, \\ \mathfrak{S}_\gamma^{(j)}(\Phi) &= \frac{\gamma_1}{2} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\Gamma} \chi_T (T - T_{obs})^2 d\Gamma dt + \\ &+ \frac{\gamma_2}{2} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\partial\Omega} \chi_{\xi,\partial\Omega} (\xi - \xi_{obs})^2 d\Gamma dt, \end{aligned}$$

где α_1, α_2 и γ_1, γ_2 – заданные неотрицательные постоянные (размерные), которые выбираются так или иначе в зависимости от рассматриваемой задачи и процедур ее решения, α_1, α_2 – “регуляризационные параметры”, γ_1, γ_2 – “весовые параметры”.

Функции $d_T^{(0)}, d_s^{(0)}$ считаем заданными, например, $d_T^{(0)} \equiv 0, d_s^{(0)} \equiv 0$ и введены они для общности рассмотрения. С другой стороны, если эти функции являются “разумными” приближениями к искомому d_T, d_s , то отыскание минимума $\mathfrak{S}_{\alpha,\gamma}$ при $\alpha_k > 0, k = 1, 2$ будет приводить к требованию определенной близости искомого d_T, d_s соответственно к $d_T^{(0)}, d_s^{(0)}$.

Сформулируем теперь *общую задачу вариационной ассимиляции данных наблюдений* для модели (7)–(17), являющейся приближением к (1)–(6): найти Φ^j, V^j , такие, что выполнены соотношения (7)–(17), и при этом

$$\inf_{V^j} \mathfrak{S}_{\alpha,\gamma}^{(j)}(V^j, \Phi^j), \quad j = 1, 2, 3, \dots, J. \quad (22)$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что в приведенной постановке общей задачи *ассимиляция данных наблюдений осуществляется соответствующей подзадачей*. Так, например, ассимиляция данных об уровне производится на Шаге 1 метода расщепления, ассимиляция температуры – на Шаге 2 метода расщепления. Такой подход к решению всей задачи значительно проще, чем если бы ассимиляция осуществлялась полной системой уравнений, когда на каждой итерации внешнего итерационного процесса необходимо было бы решать как полную систему уравнений задачи, так и полную соответствующую систему сопряженных задач, “связанных” между собой.

2. ЗАДАЧА ВАРИАЦИОННОЙ АССИМИЛЯЦИИ ДАННЫХ О ТЕМПЕРАТУРЕ

В данном разделе формулируется задача вариационной ассимиляции данных о температуре на жидкой границе и алгоритм ее решения, а также приводятся результаты численных экспериментов по использованию алгоритма в модели гидротермодинамики Балтийского моря.

Запишем задачу переноса–диффузии тепла (12) с Шага 2 метода расщепления в следующем виде:

$$\begin{cases} T_t + \bar{U} \cdot \mathbf{Grad} T - \mathbf{Div}(\hat{a}_T \mathbf{Grad} T) = \\ = f_T \quad \text{в } D \times (t_{j-1}, t_j), \\ U_n^{(-)} T + \frac{\partial T}{\partial N_T} + \gamma_T (T - T_a) = \\ = m_{w,op} d_T + Q_F \quad \text{на } \Gamma \times (t_{j-1}, t_j), \\ T = T_{j-1} \quad \text{при } t = t_{j-1} \quad \text{в } D, \end{cases} \quad (23)$$

где f_T, γ_T, T_a, Q_F – заданные функции, $\partial T / \partial N_T \equiv \bar{N} \cdot \hat{a}_T \cdot \mathbf{Grad} T, \gamma_T \equiv 0, T_a \equiv 0$ на $\Gamma \setminus \Gamma_S, \forall t \in (t_{j-1}, t_j), U_n^{(-)} = 0$ на $(\Gamma_{w,c} \cup \Gamma_H \cup \Gamma_S) \times (t_{j-1}, t_j), d_T \equiv 0$ на $(\Gamma \setminus \Gamma_{w,op}) \times (t_{j-1}, t_j)$. После решения данной задачи функция T_j принимается в качестве приближения к компоненту T (температуре) точного решения на $D \times (t_{j-1}, t_j)$.

Предположим, что на какой-то части $\Gamma_{o,T}$ границы $\Gamma = \partial D$ почти при всех $t \in (t_{j-1}, t_j)$ имеются данные наблюдений за температурой, которые обозначим через T_{obs} . Тогда, рассматривая функцию d_T как дополнительную неизвестную (или как функцию, известную приближенно и требующую уточнения), можно сформулировать задачу ассимиляции данных о температуре на данном шаге схемы расщепления как обратную задачу, т.е. как *задачу об отыскании T и d_T , удовлетворяющих системе (23) и уравнению замыкания:*

$$\chi_T T = \chi_T T_{obs} \quad \text{на } \Gamma \times (t_{j-1}, t_j), \quad (24)$$

где χ_T – характеристическая функция границы $\Gamma_{o,T} \subseteq \Gamma$.

Для приближенного решения обратной задачи переформулируем ее как задачу минимизации функционала:

$$\begin{aligned} J_\alpha(d_T, T(d_T)) &\equiv \frac{\alpha}{2} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\Gamma} m_{w,op} (d_T - d_T^{(0)})^2 d\Gamma dt + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\Gamma} \chi_T (T - T_{obs})^2 d\Gamma dt \rightarrow \inf_{d_T}, \end{aligned} \quad (25)$$

где $T = T(d_T)$ является решением задачи (23), а α – малый неотрицательный параметр, который име-

ет смысл параметра регуляризации А.Н. Тихонова [25].

Если $\Gamma_{o,T}$ совпадает с $\Gamma_{w,op}$, можно показать [21, 26], что обратная задача (23), (24) однозначно и плотно разрешима. В этом случае на основании теории, приведенной в [24], можно утверждать, что для приближенного решения задачи (23), (24) достаточно построить приближенное решение задачи (25) при малом $\alpha > 0$. Вводя сопряженную задачу, запишем метод градиентного спуска для решения экстремальной задачи (25):

$$\begin{cases} (T_k)_t + \vec{U} \cdot \text{Grad} T_k - \text{Div}(\hat{a}_T \text{Grad} T_k) = \\ = f_T \text{ в } D \times (t_{j-1}, t_j), \\ U_n^{(-)} T_k + \frac{\partial T_k}{\partial N_T} + \gamma_T (T_k - T_a) = m_{w,op} d_{T,k} + \\ + Q_F \text{ на } \Gamma \times (t_{j-1}, t_j), \\ T_k = T_{j-1} \text{ при } t = t_{j-1} \text{ в } D; \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} -(T_k^*)_t - \text{Div}(\vec{U} T_k^*) - \text{Div}(\hat{a}_T \text{Grad} T_k^*) = \\ = 0 \text{ в } D \times (t_{j-1}, t_j), \\ T_k^* = 0 \text{ при } t = t_j \text{ в } D, \\ U_n^{(+)} T_k^* + \frac{\partial T_k^*}{\partial N_T} + \gamma_T T_k^* = \\ = \chi_{obs} (T_k - T_{obs}) \text{ на } \Gamma \times (t_{j-1}, t_j); \end{cases} \quad (27)$$

$$d_{T,k+1} = d_{T,k} - \tau_k m_{w,op} \left(\alpha (d_{T,k} - d_T^{(0)}) + T_k^* \right). \quad (28)$$

Вследствие плотной разрешимости задачи при $\Gamma_{w,op} = \Gamma_{o,T}$ при достаточно малом $\tau_k = \tau = \text{const} > 0$ имеем [24]:

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\Gamma_{o,T}} (T_k(\alpha) - T_{obs})^2 d\Gamma dt \rightarrow 0 \\ \text{при } \alpha \rightarrow 0, k \rightarrow \infty.$$

Более того, если существует решение d_T, T обратной задачи (23), (24), то оно единственно. При этом справедливо следующее утверждение о сходимости алгоритма (26)–(28):

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\Gamma_{w,op}} (d_{T,k}(\alpha) - d_T)^2 d\Gamma dt + \\ + \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_D (T_k(\alpha) - T)^2 dD dt \rightarrow 0 \\ \text{при } \alpha \rightarrow 0, k \rightarrow \infty.$$

При выполнении условий плотной разрешимости $\inf J_\alpha \cong 0$ при $\alpha \rightarrow +0$ и можно принять [24]:

$$\tau_k \cong \frac{J_\alpha(d_{T,k})}{\|J'_\alpha(d_{T,k})\|^2} \cong \frac{1/2 \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\Gamma_{obs}} (T_k - T_{obs})^2 d\Gamma dt}{\int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\Gamma_{w,op}} (T_k^*)^2 d\Gamma dt} \quad (29)$$

– “оптимальный набор” параметров итерационного процесса в данной задаче при $\alpha \cong +0$.

Приведем результаты численных экспериментов применительно к реальной морской акватории. Алгоритм (26)–(28) был внедрен в модель гидротермодинамики Балтийского моря [18] и использовался в расчетах на каждом втором временном слое модели на Шаге 2 метода расщепления, описанного выше. Были проведены расчеты гидротермодинамики Балтийского моря на временной интервал с 1 по 30 апреля 2007 г. следующего типа: расчет без использования процедуры ассимиляции, расчет с использованием ассимиляции (26)–(28) и расчет с использованием процедуры ассимиляции, описанной в работе [21]. Отличие процедуры ассимиляции, описанной в данной работе, от процедуры, представленной в работе [21], в форме записи граничного условия. Так, в алгоритме (26)–(28) ассимиляция данных проводится на всей жидкой границе, тогда как в работе [21] – только на той части границы, где нормальная составляющая скорости направлена внутрь области. В качестве данных наблюдений были использованы данные реанализа по модели HIROMB (High-Resolution Operational Model for the Baltic) версии 3.0, предоставляемые Шведским институтом гидрологии и метеорологии (SMHI). Данные были скачаны с сайта [27].

На рис. 1а представлено поле температуры T_{obs} по данным реанализа с сайта [27] (разрез по глубине на открытой границе между Северным и Балтийским морем, положение самой границы можно увидеть на рис. 1е) 7 апреля 2007 г., которые были использованы в качестве данных наблюдений, на рис. 1б и 1в – поля температуры на момент времени 7 модельных суток с начала расчета с использованием и без использования процедуры ассимиляции (26)–(28) соответственно. На рис. 1г голубым цветом отмечены точки, где вектор скорости течения воды направлен внутрь акватории (из Северного моря в Балтийское). На рис. 1д – поле температуры на жидкой границе по результатам расчета с использованием ассимиляции из [21]. Из рисунков видно, что разработанный алгоритм (26)–(28) сближает результат расчета модели и данные на открытой границе, в то время как алгоритм [21] – только на той части границы, где нормальная составляющая скорости направлена внутрь области.

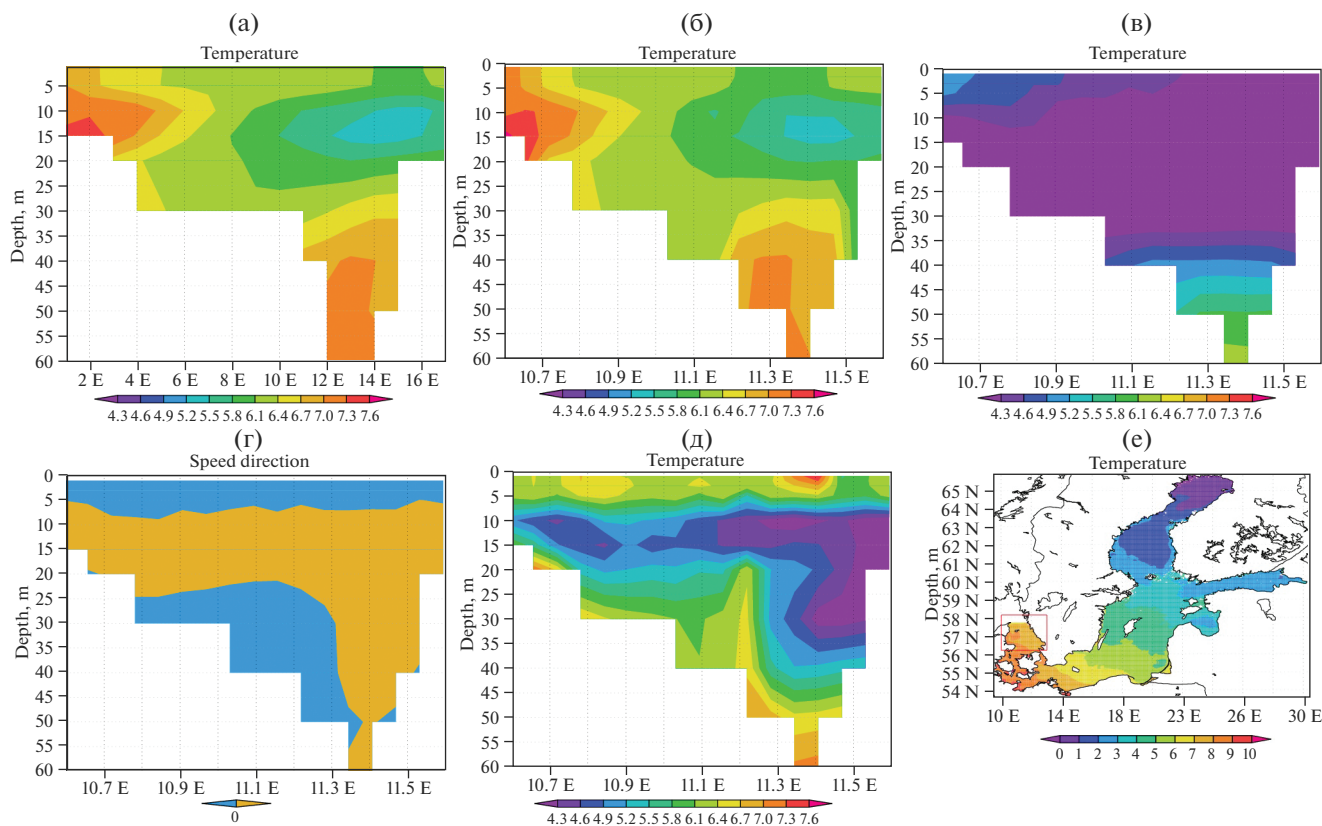


Рис. 1. Профиль температуры на “жидкой” границе 7 апреля 2007 г.: а) данные наблюдений; б) расчет с использованием ассимиляции; в) расчет без ассимиляции; г) Направление нормальной составляющей скорости 7 апреля 2007 г.; д) профиль температуры на “жидкой” границе 7 апреля 2007 г., расчет с ассимиляцией на части границы, где есть “входящий поток” [21]; е) положение “жидкой” границы в модели [18].

На рис. 2 для сравнения представлены распределения температуры по глубине 27 апреля 2007 г. на широте 57.4° : данные реанализа по модели HIROMB (рис. 2а), результаты расчета без использования ассимиляции (рис. 2б), с использованием ассимиляции (26)–(28) (рис. 2в), с использованием ассимиляции [21] (рис. 2г). По рисункам видно, что алгоритм ассимиляции приближает результаты расчета к данным реанализа не только на жидкой границе, где производится ассимиляция, но и на других вертикальных разрезах. Тем не менее, построение распределений температуры на разрезах, отстоящих от жидкой границы дальше, чем представленный на рис. 2, показало, что алгоритм ассимиляции (26)–(28) практически не оказывает влияния на распределение температуры по глубине южнее 56° северной широты. Это может быть связано с небольшим промежутком расчета (1 мес.). Необходимо дальнейшее исследование влияния рассматриваемого алгоритма на распределения температуры по глубине на различных широтах, полученные по результатам моделирования, для более длительных расчетов.

На рис. 3б, 3в, 3г представлены среднесуточные распределения температуры поверхности по

результатам моделирования 14 апреля 2007 г: на рис. 3б — результаты расчета без использования ассимиляции, на рис. 3в — с использованием ассимиляции (26)–(28), на рис. 3г — с использованием ассимиляции [21]. Эти распределения можно сравнить с результатом интерполяции на сетку модели данных наблюдений со спутников [28, 29], представленным на рис. 3а. Как можно заметить, поле температуры на рис. 3в ближе к представленному на рис. 3а, чем поля температуры на рис. 3б, 3г. Разница между рис. 3в и 3г не так велика и сосредоточена вблизи жидкой границы. Заметим, что в проведенных экспериментах ассимиляция данных о температуре поверхности моря не проводилась, поэтому результаты моделирования, представленные на рис. 3б–3г, отличаются от данных наблюдений со спутников.

Дополнительно для сравнения алгоритмов ассимиляции представлены среднесуточные распределения температуры по поверхности 18 апреля 2007 г. по результатам моделирования за март–апрель 2007 г. с использованием алгоритма (26)–(28) (рис. 4б) и с использованием алгоритма [21] (рис. 4в). На рис. 4а показано среднесуточное распределение температуры, полученное из ре-

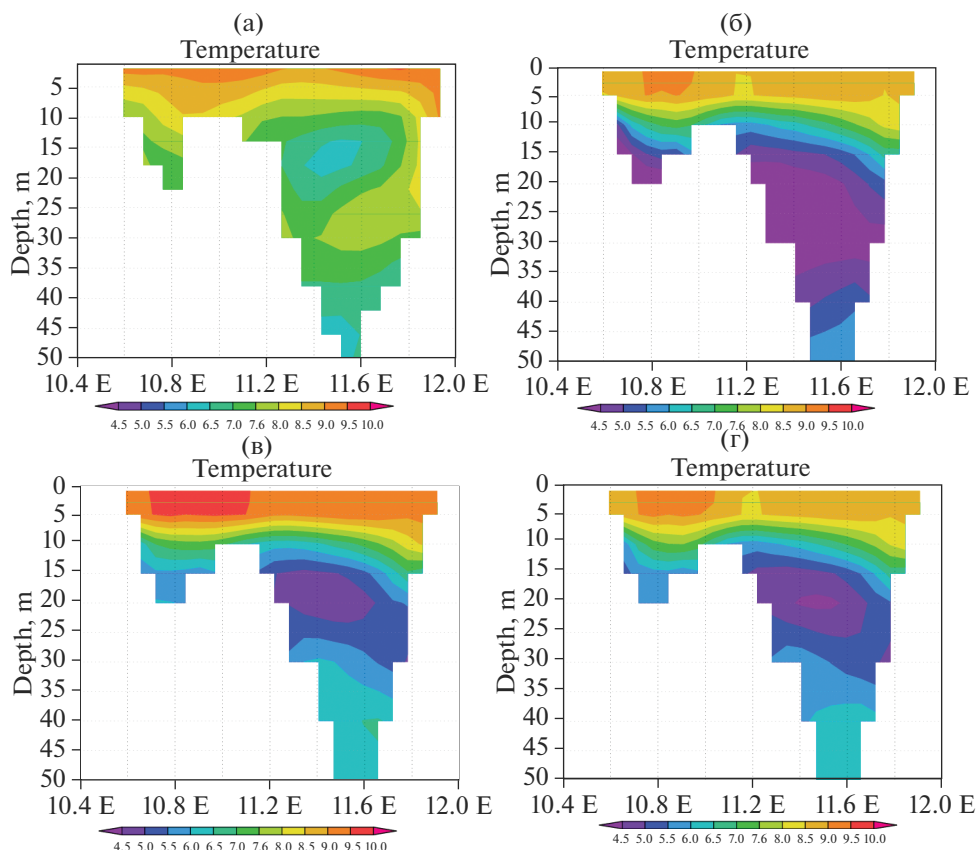


Рис. 2. Профиль температуры 27 апреля 2007 г. на широте 57.4°: а) “данные наблюдений” (реанализа); б) расчет без ассимиляции; в) расчет с ассимиляцией; г) расчет с ассимиляцией на части границы, где есть “входящий поток” [21].

анализа по модели NEMO-Nordic [30, 27] института SMHI. Сетка модели NEMO-Nordic охватывает акватории Балтийского и Северного морей, а также в данной модели реализована ассимиляция температуры поверхности моря и профилей температуры и солёности по глубине. Тем не менее, принципы построения модели NEMO совершенно иные, поэтому распределения, представленные на рис. 4, отличаются.

На основании результатов численных экспериментов можно сделать следующие выводы. Разработанный алгоритм действительно успешно сближает результат расчета модели и данные на открытой границе, что подтверждает полученные теоретические результаты. При краткосрочных расчетах эффект от ассимиляции проявляется только в области вблизи открытой границы. Алгоритм оказывает слабое влияние на распределения температуры по глубине, и это влияние тем больше, чем дольше проводится расчет с ассимиляцией. Необходимо дальнейшее исследование влияния рассматриваемого алгоритма на распределения температуры по глубине на различных широтах, полученные по результатам моделиро-

вания, для более длительных расчетов. Эффективность использования алгоритма зависит от качества данных наблюдений. В данной работе в качестве данных наблюдений были использованы данные реанализа из Шведской модели гидротермодинамики Северного и Балтийского морей — эти данные имелись на каждые 6 ч и обладали достаточной гладкостью. Эксперименты с другими данными не проводились.

3. ЗАДАЧА ВАРИАЦИОННОЙ АССИМИЛЯЦИИ ДАННЫХ ОБ УРОВНЕ

Рассмотрим задачу (7) с Шага 1 метода расщепления. Как уже было сказано ранее, решение данной задачи можно свести к независимому решению задач (9) и (10), причем найденная в задаче (9) функция уровня $\xi \equiv \xi_1^j$ не изменяется ни в задаче (10), ни на других шагах метода расщепления, то есть $\xi^j = \xi_5^j = \xi_1^j$. Поэтому ассимиляция данных об уровне должна производиться непосредственно в задаче (9).

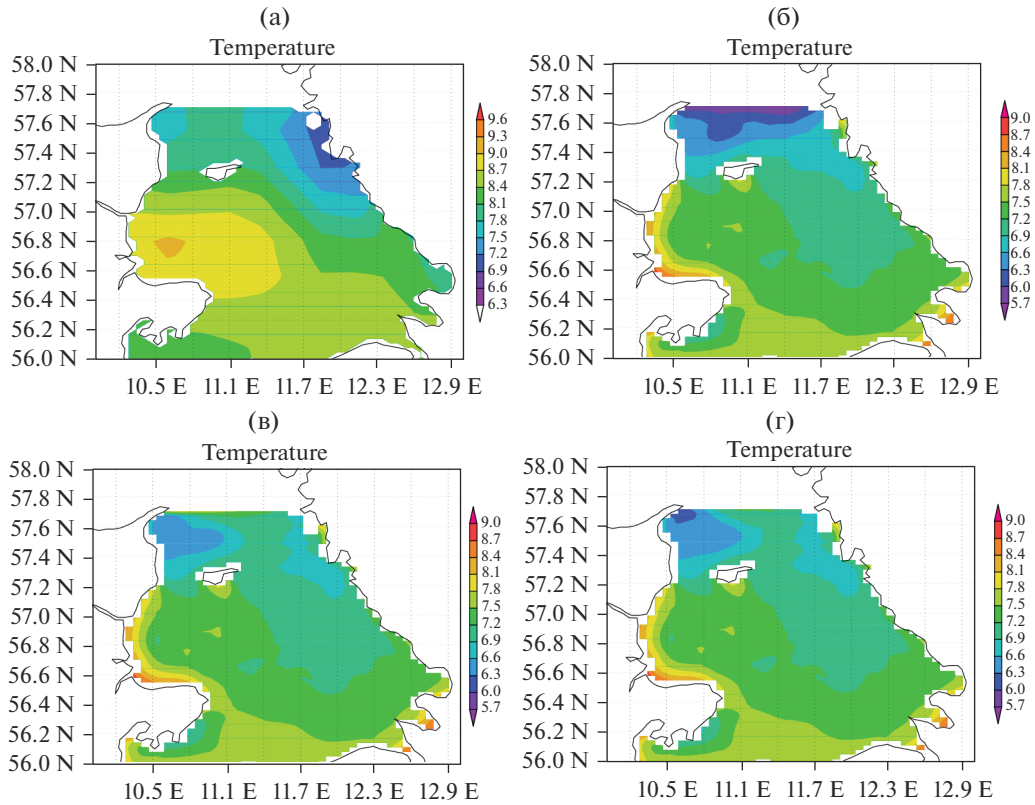


Рис. 3. Температура поверхности моря 14 апреля 2007 г.: а) данные наблюдений со спутников; б) расчет без ассимиляции; в) расчет с ассимиляцией; г) расчет с ассимиляцией на части границы, где есть “входящий поток” [21].

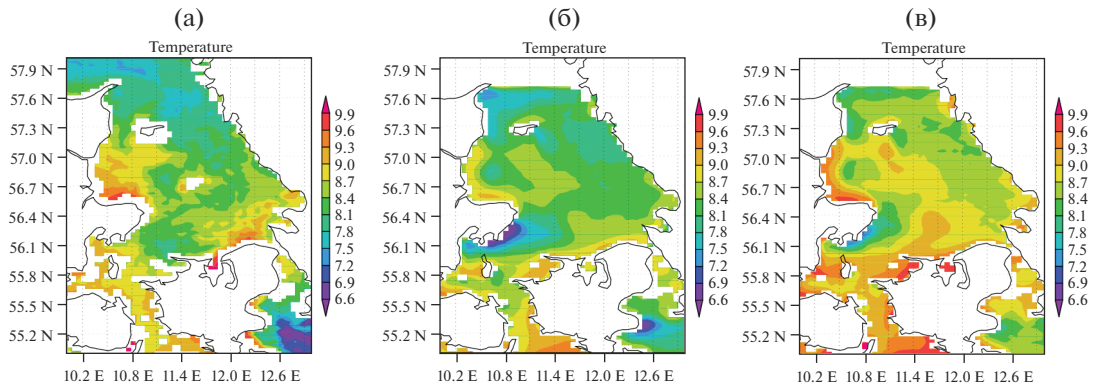


Рис. 4. Температура поверхности моря 18 апреля 2007 г.: а) реанализ по модели NEMO-Nordic; б) расчет с ассимиляцией; в) расчет с ассимиляцией на части границы, где есть “входящий поток” [21].

Пусть далее функция d_s является дополнительной неизвестной (управлением), которую необходимо определить посредством процедуры ассимиляции данных. Пусть также на некоторой части границы $\partial\Omega$ на интервале времени (t_{j-1}, t_j) имеются данные наблюдений ξ_{obs} за уровнем моря. Обозначим через $\chi_{\xi, \partial\Omega}$ характеристическую функцию мно-

жества, где задана ξ_{obs} . Сформулируем условие замыкания:

$$\chi_{\xi, \partial\Omega} \xi = \chi_{\xi, \partial\Omega} \xi_{obs} \quad \text{на } \partial\Omega \times (t_{j-1}, t_j). \quad (30)$$

Запишем неявную схему аппроксимации задачи (9) на интервале (t_{j-1}, t_j) , $\tau = t_j - t_{j-1}$, по времени, и

получим полудискретную задачу, являющуюся приближением к (9):

$$\begin{cases} \frac{\underline{U}}{\tau} + \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \underline{U} - g \cdot \mathbf{grad} \xi = \tilde{f} & \text{в } \Omega, \\ \frac{\xi}{\tau} - \mathbf{div}(H\underline{U}) = (\bar{F})_3 & \text{в } \Omega, \\ H\underline{U} \cdot \bar{n} + m_{w,op} \sqrt{gH} \xi = m_{w,op} \sqrt{gH} d_s & \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \quad (31)$$

где $\bar{F} = (f_1^j + u^{j-1}/\tau, f_2^j + v^{j-1}/\tau, \xi^j/\tau)^T$, $\tilde{f} = ((\bar{F})_1, (\bar{F})_2)^T \equiv (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$. Таким образом, обратная задача формулируется следующим образом: найти \underline{U} , ξ и d_s , такие, что выполняются (31), (30).

Переформулируем задачу как задачу оптимально-го управления. Для этого введем функционал:

$$J_\alpha = J_\alpha(d_s, \xi(d_s)) = \frac{\alpha}{2} \int_{\partial\Omega} m_{w,op} \sqrt{gH} (d_s - d_s^{(0)})^2 d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \chi_{\xi, \partial\Omega} \sqrt{gH} (\xi - \xi_{obs})^2 d\Gamma, \quad (32)$$

где $d_s^{(0)}$ – заданная функция. Задача оптимально-го управления формулируется следующим образом: найти функцию d_s , доставляющую минимум функционалу J_α , такую, что выполняется (31).

Теоретическое исследование обратной задачи (31), (30) было проведено в работе [14]. Для теоретического исследования система (31) была сведена к эллиптической третьей краевой задаче для ξ , после чего была введена обобщенная постановка задачи, получены условия однозначной и плотной разрешимости (в частности, если данные наблюдений заданы на жидкой границе, задача однозначно и плотно разрешима). Задачу минимизации функционала J_α можно решать, например, с помощью метода градиентного спуска, который будет иметь вид следующего итерационного процесса (для системы, сведенной к полудискретной форме):

$$\begin{cases} \frac{\underline{U}_k}{\tau} + \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \underline{U}_k - g \cdot \mathbf{grad} \xi_k = \tilde{f} & \text{в } \Omega, \\ \frac{\xi_k}{\tau} - \mathbf{div}(H\underline{U}_k) = (\bar{F})_3 & \text{в } \Omega, \\ H\underline{U}_k \cdot \bar{n} + m_{w,op} \sqrt{gH} \xi_k = m_{w,op} \sqrt{gH} (d_s)_k & \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \quad (33)$$

$$\begin{cases} \frac{\underline{U}_k^*}{\tau} - \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \underline{U}_k^* + g \cdot \mathbf{grad} \xi_k^* = 0 & \text{в } \Omega, \\ \frac{\xi_k^*}{\tau} + \mathbf{div}(H\underline{U}_k^*) = 0 & \text{в } \Omega, \\ -H\underline{U}_k^* \cdot \bar{n} + m_{w,op} \sqrt{gH} \xi_k^* = \chi_{\xi, \partial\Omega} \sqrt{gH} (\xi_k - \xi_{obs}) & \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \quad (34)$$

$$(d_s)_{k+1} = (d_s)_k - \tau_k m_{w,op} \left(\alpha((d_s)_k - d_s^{(0)}) + \xi_k^* \right), \quad (35)$$

где k – номер итерации. Вследствие плотной разрешимости задачи в случае, когда данные наблюдений заданы на жидкой границе, при достаточно малом $\tau_k = \tau = \text{const} > 0$ имеем [24]:

$$\int_{\partial\Omega} \chi_{\xi, \partial\Omega} \sqrt{gH} (\xi_k(\alpha) - \xi_{obs})^2 d\Gamma \rightarrow 0$$

при $\alpha \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.

Также в этом случае параметр итерационного процесса можно вычислять, пользуясь следующей формулой (см. [24]):

$$\tau_k = \frac{J_\alpha}{\|J'_\alpha\|^2} = \frac{1/2 \int_{\partial\Omega} \chi_{\xi, \partial\Omega} \sqrt{gH} (\xi - \xi_{obs})^2 d\Gamma}{\int_{\partial\Omega} m_{w,op} \sqrt{gH} (\xi^*)^2 d\Gamma}.$$

Отдельного внимания заслуживает вопрос о доступности реальных данных наблюдений. Как было показано [14], если данные наблюдений заданы на всей жидкой границе, задача однозначно и плотно разрешима и итерационный процесс сходится, причем функции $\underline{U}_k(\alpha)$, $\xi_k(\alpha)$, $(d_s)_k(\alpha)$ при достаточно малом α и большом k можно принять в качестве приближенных решений обратной задачи (31), (30). Однако на практике доступны лишь следующие сведения об уровне: данные спутниковой альтиметрии и данные наблюдений на уровнемерных постах. В работе была использована информация из DUACS DT2014 (Data Unification and Altimeter Combination System, Delayed Time mode) об аномалиях уровня и динамической топографии, полученная по данным спутниковой альтиметрии [31]. Из всего массива спутниковых данных для алгоритма вариационной ассимиляции (33)–(35) пригодны только те, которые являются измерениями на жидкой границе. Анализ данных показал, что таких измерений критически мало (1–2 за сутки). Помимо прочего, треки спутников никогда не проходят непосредственно по жидкой границе, а только лишь пересекают ее в некоторой точке. Таким образом, имеется одно-два измерения уровня за сутки в каких-то определенных точках на жидкой границе, координаты которых зависят от времени. Что касается данных наблюдений с уровнемерных постов, их получают в фиксированных точках вблизи берега (на измерительных прибрежных станциях) с определенной, заранее известной частотой.

Итерационный алгоритм (33)–(35) был реализован в качестве подключаемого модуля модели гидротермодинамики Балтийского моря. Ассимиляция данных наблюдений происходит на том шаге по времени, на котором эти данные имеются, на остальных шагах она отсутствует и расчет

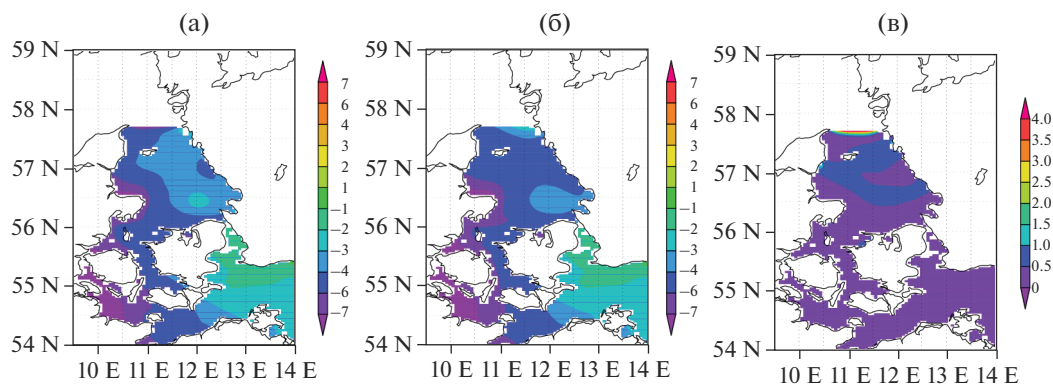


Рис. 5. Уровень моря (см) усредненный за весь период расчета с 01.03.2017 по 14.03.2017: а) расчет с использованием ассимиляции; б) расчет без ассимиляции; в) абсолютная величина разницы между ними.

проходит в обычном режиме. В работе были использованы данные с уровнемерных постов Skagen (Дания), Göteborg-Torshamnen (Швеция, институт SMHI) и данные спутниковой альтиметрии DUACS DT2014. В открытом доступе [27] представлены два набора данных спутниковой альтиметрии: обработанные данные по спутниковым трекам (L3) и результат применения метода оптимальной интерполяции для построения уровня на сетке (L4) [31]. Для ассимиляции были использованы данные L3. Для получения данных в узлах сетки модели на жидкой границе в настоящей работе была использована обычная квадратичная интерполяция. Можно однозначно утверждать, что имеющихся точек с данными наблюдений слишком мало для получения сколь угодно близкой к реальному уровню аппроксимации. Более того, метод предполагает, что с использованием данных наблюдений на интервале $(t_{j_k}, t_{j_{k+1}})$, где k – номер шага по времени, на котором имеются данные наблюдений, решается обратная задача о восстановлении функции d_s , а дальнейший расчет при $t \in (t_{j_{k+1}}, t_{j_{k+2}})$ проходит с найденным (восстановленным) d_s . В случае с редкими данными такой подход не вполне корректен, поскольку d_s – функция, меняющаяся во времени, и предполагать ее постоянной на большие промежутки времени неправильно. Более того, следует учитывать, что функция d_s восстанавливается не идеально, а с ошибками. Таким образом, целесообразно занулять d_s на тех промежутках по времени, где данные отсутствуют. Однако, это тоже не верно, поскольку с физической точки зрения не описывает жидкую границу. В настоящей работе несколько шагов по времени после ассимиляции используется граничное условие из (31) с найденным d_s , затем расчет проводится с тем граничным условием, которое использовалось в модели до включения блока ассимиляции.

Итак, рассмотрим результаты численных экспериментов. Был проведен расчет на 14 дней с 01.03.2017 по 14.03.2017. По данным со спутников имелось всего 18 временных интервалов с измерениями уровня моря вблизи жидкой границы за весь период расчета, таким образом, ассимиляция проводилась 18 раз. На рис. 5 для сравнения представлены средние за весь период расчета уровни моря, полученные по модели с использованием ассимиляции и без нее, а также разница между ними. Как видно из рисунков, включение блока ассимиляции повлияло на средний результат вблизи жидкой границы, но практически не изменило его дальше островов.

К преимуществам алгоритма (33)–(35) относится быстрая сходимость – за 8–15 итераций достигается приемлемая точность, за 70 итераций невязка падает до минимально возможного значения. Однако из-за грубой интерполяции данных наблюдений такой точности в рассматриваемых задачах не требуется, поэтому в численных экспериментах количество итераций ограничивалось числом 8. Как показали эксперименты, итерационный метод на первых 8–15 итерациях сходится со скоростью геометрической прогрессии, что соответствует теории [24].

Заметим, что метод допускает введение различных весовых коэффициентов в функционал, учитывающих значимость тех или иных данных наблюдений. За счет таких коэффициентов можно снизить негативное влияние грубой интерполяции на результат. Также заметим, что вопрос эффективности использования предложенного в данном разделе алгоритма с реальными данными наблюдений требует дальнейшего исследования. Тем не менее, в качестве данных наблюдений для алгоритма можно также использовать данные расчета по моделям больших акваторий, как это было сделано в предыдущем разделе, однако, эффективность использования алгоритма в таком качестве

ещё не исследовалась (в этом случае необходимо проводить сравнение алгоритма с известными методами вложенных сеток). Отметим, что повышение качества моделирования и прогноза морских течений наряду с ассимиляцией данных наблюдений зависит от параметризации подсеточных процессов. Особенное внимание при этом следует уделять параметризации процессов турбулентного обмена [32].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 19-01-00595, в рамках которого проведено исследование сформулированных задач), а также при финансовой поддержке Минобрнауки России (соглашение № 075-15-2019-1624).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кубряков А.И. Применение технологии вложенных сеток при создании системы мониторинга гидрофизических полей в прибрежных районах Черного моря // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа. Севастополь: НПЦ “ЭКОСИ–Гидрофизика”, 2004. Вып. 11. С. 31–50.
2. Чернов И.А., Толстикова А.В. Численное моделирование крупномасштабной динамики Белого моря // Труды Карельского научного центра РАН. 2014. Т. 4. С. 137–142.
3. Мысленков С.А. Использование спутниковой альтиметрии для расчета переноса вод в Северной Атлантике // Труды ГУ “Гидрометцентр России”. 2011. Вып. 345. С. 119–125.
4. Orlanski I. A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows // J. Comput. Phys. 1976. V. 21. № 3. P. 251–269.
5. Marchesiello P., McWilliams J.C., Shchepetkin A. Open boundary conditions for long-term integration of regional oceanic models // Ocean Modelling. 2001. V. 3. P. 1–20.
6. Edwards C.A., Moore A.M., Hoteit I., Cornuelle B.D. Regional ocean data assimilation // Annu. Rev. Mar. Sci. 2015. P. 7:6.1–6.22.
7. Марчук Г.И., Залесный В.Б. Моделирование циркуляции Мирового океана с четырехмерной вариационной ассимиляцией полей температуры и солености // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2012. Т. 48. № 1. С. 21–36.
8. Залесный В.Б., Агошков В.И., Шутяев В.П., Ле Диме Ф., Ивченко В.О. Задачи численного моделирования гидродинамики океана с вариационной ассимиляцией данных наблюдений // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2016. Т. 52. № 4. С. 488–500.
9. Ngodock H., Carrier M. A weak constraint 4D-Var assimilation system for the Navy Coastal Ocean Model using the representer method // Data Assimilation for Atmospheric, Oceanic and Hydrologic Applications (Vol. II). Springer, Berlin, Heidelberg, 2013. P. 367–390.
10. Агошков В.И., Шутяев В.П., Пармузин Е.И., Захарова Н.Б., Шелопут Т.О., Лёзина Н.Р. Вариационная ассимиляция данных наблюдений в математической модели динамики Черного моря // Морской гидрофизический журн. 2019. Т. 35. № 6. С. 1–15. С. 585–599.
11. Tang H.S., Qu K., Wu X.G. An overset grid method for integration of fully 3D fluid dynamics and geophysics fluid dynamics models to simulate multiphysics coastal ocean flows // J. Comp. Phys. 2014. V. 273. P. 548–571.
12. Bennett A.F., McIntosh P.C. Open Ocean Modeling as an Inverse Problem: Tidal Theory // J. Phys. Oceanogr. 1982. T. 12. № 10. С. 1004–1018.
13. Agoshkov V.I. Application of Mathematical Methods for Solving the Problem of Liquid Boundary Conditions in Hydrodynamics // Numerical Analysis, Scientific Computing, Computer Science, Special Volume of ZAMM (Proceedings of ICIAM-95). Berlin, 1996.
14. Agoshkov V.I. Inverse problems of the mathematical theory of tides: boundary-function problem // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2005. V. 20. № 1. P. 1–18.
15. Agoshkov V.I. Statement and study of some inverse problems in modelling of hydrophysical fields for water areas with ‘liquid’ boundaries // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2017. V. 32. № 2. P. 73–90.
16. Агошков В.И. Методы решения обратных задач и задач вариационной ассимиляции данных наблюдений в проблемах крупномасштабной динамики океанов и морей. М.: ИВМ РАН, 2016. 192 с.
17. Agoshkov V.I., Lezina N.R., Sheloput T.O. Domain Decomposition Method for the Variational Assimilation of the Sea Level in a Model of Open Water Areas Hydrodynamics // J. Mar. Sci. Eng. 2019. V. 7. № 6. P. 195.
18. Zalesny V.B., Gusev A.V., Ivchenko V.O., Tamsalu R., Aps R. Numerical model of the Baltic Sea circulation // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2013. V. 28. № 1. P. 85–100.
19. Залесный В.Б., Гусев А.В., Агошков В.И. Моделирование циркуляции Черного моря с высоким разрешением прибрежной зоны // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2016. Т. 52. № 3. С. 316–333.
20. Деметьева Е.В., Карпова Е.Д., Шайдуров В.В. Восстановление граничной функции по данным наблюдений для задачи распространения поверхностных волн в акватории с открытой границей // Сибирский журн. индустриальной математики. 2013. Т. 16. № 1. С. 10–20.
21. Agoshkov V.I., Sheloput T.O. The study and numerical solution of some inverse problems in simulation of hydrophysical fields in water areas with ‘liquid’ boundaries // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2017. V. 32. № 3. P. 147–164.
22. Марчук Г.И., Дымников В.П., Залесный В.Б. Математические модели в геофизической гидродинамике и численные методы их реализации. Л.: Гидрометеиздат, 1987. 296 с.
23. Агошков В.И., Ассовский М.В. Математическое моделирование динамики Мирового океана с учетом приливообразующих сил. М.: ИВМ РАН, 2016. 123 с.
24. Агошков В.И. Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в задачах математической физики. М.: ИВМ РАН, 2016. 244 с.
25. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 142 с.
26. Agoshkov V. I., Sheloput T. O. The study and numerical solution of the problem of heat and salinity transfer as-

- suming 'liquid' boundaries // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model.* 2016. V. 31. № 2. P. 71–80.
27. <http://marine.copernicus.eu/>
28. *Hoyer J.L., She J.* Optimal interpolation of sea surface temperature for the North Sea and Baltic Sea // *J. Mar. Sys.* 2007. V. 65. № 1–4. P. 176–189.
29. *Hoyer J.L., Le Borgne P., Eastwood S.* A bias correction method for Arctic satellite sea surface temperature observations // *Remote Sensing of Environment.* 2014. V. 146. P. 201–213.
30. *Hordoir R. et al.* Influence of sea level rise on the dynamics of salt inflows in the Baltic Sea // *J. Geophysical Research: Oceans.* 2015. V. 120. № 10. P. 6653–6668.
31. *Pujol M.I. et al.* DUACS DT2014: the new multi-mission altimeter data set reprocessed over 20 years // *Ocean Science.* 2016. V. 12. P. 1067–1090.
32. *Залесный В.Б., Мошонкин С.Н., Перов В.Л., Гусев А.В.* Моделирование циркуляции океана с κ -омега и κ -эпсилон параметризациями вертикального турбулентного обмена // *Морской гидрофизический журн.* 2019. Т. 35. № 6. С. 517–529.

Variational Data Assimilation in Problems of Modeling Hydrophysical Fields in Open Water Areas

V. I. Agoshkov^{1,2}, V. B. Zalesny¹, and T. O. Shelopot^{1,*}

¹*Marchuk Institute of Numerical Mathematics, Russian Academy of Sciences, Gubkin str., 8, Moscow, 119333 Russia*

²*Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, 1, Moscow, 119991 Russia*

**e-mail: shelopot@phystech.edu*

Formulation of boundary conditions at liquid (open) boundaries is one of the actual problems of mathematical modeling of open water area hydrothermodynamics. Variational data assimilation is one of the methods that allows to take into account liquid boundaries in models. In this paper we suppose that the observational data are given and we investigate an approach that consists in considering the problem as an inverse, in which the functions of open boundary flows are additional unknowns. In this paper, we formulate a general problem of variational assimilation of observational data for a model of hydrothermodynamics of an open water area based on the splitting method. Algorithms for variational assimilation of temperature and sea level data at the liquid boundary are formulated, and the results of the numerical experiments on the use of the algorithms in the Baltic Sea circulation model are presented.

Keywords: variational data assimilation, regional ocean modeling, numerical methods, inverse problems, liquid boundaries, open water areas