

УДК 551.581

ИЗМЕНЧИВОСТЬ ВНЕТРОПИЧЕСКОЙ АТМОСФЕРНОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ В УПРОЩЕННЫХ МОДЕЛЯХ ДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ

© 2020 г. А. С. Грицун*

^aИнститут вычислительной математики РАН, ул. Губкина, 8, Москва, 119333 Россия

**e-mail: asgrit@mail.ru*

Поступила в редакцию 11.11.2019 г.

После доработки 20.01.2020 г.

Принята к публикации 05.02.2020 г.

В работе рассматривается возможность аппроксимации основных статистических характеристик моделей атмосферы с помощью периодических траекторий — замкнутых решений уравнений динамики. Возможность такой аппроксимации базируется на идеях теории динамических систем, утверждающей, что в некоторых важных частных случаях (например, для гиперболических систем) периодические траектории определяют инвариантную меру системы, связанную с понятием ее климата. В работе показано, что и в случае рассмотренных атмосферных моделей такая аппроксимация возможна. При этом основные моды изменчивости циркуляции реализуются в виде кластеров периодических траекторий, ориентированных вдоль ведущих собственных векторов динамических операторов моделей, линеаризованных относительно их средних состояний. Анализ данных наблюдений показывает, что, по-видимому, такой же вывод можно сделать и для реальной атмосферной циркуляции.

Ключевые слова: динамика атмосферы, изменчивость, моды циркуляции, периодические решения

DOI: 10.31857/S0002351520030098

ВВЕДЕНИЕ

Исследование природы изменчивости в атмосфере средних широт является весьма популярной научной тематикой, начиная с 40-х гг. XX в. Наиболее известные математические подходы, используемые для анализа проблемы, включают построение редуцированных моделей атмосферной циркуляции, описывающих с разной степенью точности атмосферную циркуляцию на внутрисезонных временных масштабах (баротропные модели атмосферной циркуляции, двух- и трехслойные квазигеострофические модели, примитивные уравнения). С помощью линеаризации данных уравнений относительно среднего состояния атмосферы (модельного или реально наблюдаемого) удается связать собственные векторы линеаризованного оператора с ведущими модами изменчивости (т.н. естественными ортогональными функциями или ЕОФ) полей атмосферных характеристик (функции тока, приземного давления, геопотенциала или скорости) [1–6]. Другой подход основан на эмпирическом подходе и сводится к использованию данных наблюдений для реконструкции линейного оператора эволюции, порождающего наблюдаемую динамику атмосферы с последующим анализом структуры его собственных

векторов [7–11]. Для более низкочастотных компонент циркуляции (на масштабах от недели до месяца) популярным подходом является построение т.н. режимов циркуляции — состояний атмосферы (например “зональный” режим и режим “блокирования”), вероятность нахождения системы в окрестностях которых максимальна [12–15]. Динамика системы в этом случае представляет собой переходы между состояниями. Данный подход тесно связан с аппроксимацией динамики атмосферы с помощью малокомпонентных марковских сетей [16–20].

Все перечисленные методы имеют свои достоинства и недостатки, оставляя место для дальнейших исследований. В настоящей работе мы рассмотрим еще один, альтернативный подход, являющийся, в каком-то смысле обобщением “теории режимов циркуляции” — вместо стационарных (квазистационарных) состояний атмосферы для аппроксимации ее динамики используются более общие множества — периодические траектории. В математической основе метода лежит утверждение теории динамических систем (доказанное для т.н. гиперболических динамических систем) о том, что любая траектория системы (и любая ее статистическая характеристика) может быть ап-

проксимирована с помощью периодических решений системы – траекторий системы специального вида, возвращающихся в исходное начальное состояние за конечное время (период орбиты) [21–24]. При этом статистические характеристики системы вычисляются с помощью взвешенных осреднений по соответствующим характеристикам орбит, а весовые коэффициенты определяются через характеристики неустойчивости орбит, используемых при осреднении [24]. В результате использования данного подхода можно с хорошей точностью аппроксимировать как отдельные статистические характеристики (среднее состояние, дисперсию, моды изменчивости), так и саму инвариантную меру рассматриваемой системы, связанную с понятием климата [25]. В случае моделей динамики атмосферы доказательного обоснования метода не существует, однако в ряде работ (например, [26]) высказывается предположение, что при вычислении макроскопических характеристик хаотической системы с большим числом степеней свободы ее можно считать гиперболической (т.н. “хаотическая гипотеза”). Применительно к моделям динамики атмосферы задача поиска периодических траекторий нетривиальна, поскольку сводится к решению сильно нелинейной системы дифференциальных уравнений высокой размерности (равной размерности фазового пространства системы) с плохим начальным условием. Вопрос существования периодических решений в фазовом пространстве атмосферных моделей, наличие связей между характерными режимами циркуляции и периодическими орбитами, возможность аппроксимации циркуляции с помощью периодических движений проводилось на примере моделей баротропной динамики атмосферы (океана) в работах [27–32]. В настоящей работе мы рассмотрим возможность использования периодических траекторий для аппроксимации статистических характеристик моделей динамики атмосферы более подробно, рассмотрев также квазигеострофическую модель атмосферы (т.н. модель Маршалла–Молтени [33]) и привлекая для анализа более полный набор орбит. В частности, будут сделаны выводы о структуре ведущих мод изменчивости и их связи с регулярными периодическими движениями.

Работа построена следующим образом. Во второй главе формулируются рассматриваемые модели, анализируются их статистические характеристики в сравнении с данными наблюдений. В третьей главе рассматривается методика построения периодических траекторий, и приводятся результаты по аппроксимации статистик моделей с помощью периодических орбит. В четвертой главе рассмотрены особенности циркуляции в плоскости ведущих собственных мод моделей. В заключении обсуждаются результаты работы.

МОДЕЛИ ДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ

Баротропная модель атмосферы основана на двумерном уравнении Навье–Стокса в сферической геометрии в терминах функции тока ψ (в приближении антисимметрии относительно экватора) с учетом эффектов вращения и трения о подстилающую поверхность.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + J(\psi, \Delta \psi + l + kh) = \\ = -\alpha \Delta \psi + \mu \Delta^2 \psi + f_{\text{ext}}, \quad \psi(0) = \psi_0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь: ψ – безразмерная функция тока, параметр Кориолиса обозначен l , орография и ее нормировка – h и k соответственно, внешнее воздействие – f_{ext} , коэффициенты турбулентной вязкости и трения в пограничном слое обозначены μ и α соответственно, оператор Лапласа на сфере обозначен символом Δ , оператор Якоби – символом J .

Уравнение решается с помощью метода Галеркина (базисные функции – антисимметричные относительно экватора сферические гармоники) по пространству. Используются два пространственных разрешения – T12 и T21, приводящие к системе обыкновенных дифференциальных уравнений размерности 78 и 231. Для аппроксимации по времени используется схема “midpoint” (X и τ – правая часть системы и шаг по времени):

$$\psi^{j+1} = \psi^j + \tau X \left(\psi^j + \frac{\tau X(\psi^j)}{2} \right).$$

Параметры модели были заданы следующим образом. Орография была получена из реальных данных высоты поверхности Земли в Северном полушарии (антисимметрично продолженных в Южное полушарие) с помощью разложения в ряд Фурье по базисным функциям метода Галеркина. Нормирующий множитель k равен 0.14. Характерное время, соответствующее коэффициентам пограничного трения и турбулентной вязкости (для наиболее высокочастотной гармоники) составляет 25 и 5 дней соответственно. Внешнее воздействие было выбрано таким образом, чтобы среднее состояние системы было близко к среднему состоянию реальной атмосферы в январь-феврале для поля функции рассчитанной по данным реанализа NCEP/NCAR.

Методика выбора внешнего воздействия заключается в подстановке траектории реальной системы (в нашем случае данных NCEP/NCAR) в уравнение модели и вычислении остаточного слагаемого, которое после осреднения по времени и дает искомое внешнее воздействие f_{ext} :

$$\begin{aligned} f_{\text{ext}} = P_N \times \\ \times \left\{ J(\psi_c, \Delta \psi_c + l + kH) + \alpha \Delta \psi_c - \mu \Delta^2 \psi_c \right\}. \end{aligned}$$

Здесь ψ_c функция тока из массива данных NCEP/NCAR (для 250 или 300 миллибаровой поверхности для модели грубого (T12) и “высокого” (T21) пространственных разрешений), P_N – оператор проектирования на фазовое пространство системы. Более подробное описание данной процедуры можно найти в работах [34, 35]. При построении модели использовались данные архива для декабрь–январей–февралей 1979–2009 гг.

Линеаризация уравнения относительно среднего состояния $\bar{\psi}$ имеет следующий вид

$$\frac{\partial \psi'}{\partial t} = -\Delta^{-1} (J(\psi', \Delta \bar{\psi} + l + kh) + J(\bar{\psi}, \Delta \psi')) - \alpha \psi' + \mu \Delta \psi' \equiv A \psi', \psi'(0) = \psi'_0. \quad (2)$$

Квазигеострофическая бароклиническая модель атмосферы [33] включает три уравнения для эволюции потенциальной завихренности q_j (в приближении антисимметрии относительно экватора) на уровнях 200, 500 и 800 мб (индексы 1, 2 и 3 соответственно). При этом учитываются эффекты вращения, взаимодействия между уровнями и трения о подстилающую поверхность.

$$\frac{\partial q_j}{\partial t} + J(\psi_j, q_j) = -D_j + F_j, \quad \psi_j(0) = \psi_{j0}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (3)$$

Выражения для потенциальной завихренности имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} q_1 &= \Delta \psi_1 - (\psi_1 - \psi_2)/R_1^2 + l, \\ q_2 &= \Delta \psi_2 + (\psi_1 - \psi_2)/R_1^2 - (\psi_2 - \psi_3)/R_2^2 + l, \\ q_3 &= \Delta \psi_3 + (\psi_2 - \psi_3)/R_2^2 + l(1 + H/H_0). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь R_1 и R_2 – радиусы деформации Россби для соответствующих уровней (равные 700 км и 450 км соответственно), ψ - функция тока, l – параметр Кориолиса, H и H_0 – орография и ее максимальное значение. Диссипационные слагаемые D_j определяются выражениями

$$\begin{aligned} -D_1 &= (\psi_1 - \psi_2)/(\tau_R R_1^2) - R^8 \Delta^4 q'_1 / (\tau_H \lambda_{\max}^4), \\ -D_2 &= -(\psi_1 - \psi_2)/(\tau_R R_1^2) + (\psi_2 - \psi_3)/(\tau_R R_2^2) - \\ &\quad - R^8 \Delta^4 q'_2 / (\tau_H \lambda_{\max}^4), \\ -D_3 &= -(\psi_2 - \psi_3)/(\tau_R R_2^2) - \\ &\quad - EK_3 - R^8 \Delta^4 q'_3 / (\tau_H \lambda_{\max}^4). \end{aligned} \quad (5)$$

τ_R обозначает время релаксации вертикального температурного профиля (равное 30 суткам); τ_H – временной масштаб гипердиффузии (1.33 суток); R – радиус Земли; λ_{\max} – абсолютное значение наибольшего собственного числа оператора Лапласа в модели (для разрешения T18 оно

равно $\lambda_{\max} = 18 \times 19$). Далее, $EK_3 = \nabla(k_{surf} \nabla \psi_3)$ – оператор, описывающий трение о поверхность; $k_{surf} = (1 + 0.5LS + 0.5FH(h))/\tau_E$, где LS это доля поверхности Земли в ячейке сетки, $FH(h) = 1 - \exp(-h/1000m)$, τ_E – временной масштаб экмановского трения, выбранный равным 1.5 суток. $\dot{q}_i = q_i - f$, $i = 1, 2$, и $\dot{q}_3 = q_3 - f(1 + h/H_0)$.

Процедура выбора правой части аналогична процедуре, используемой для баротропной модели. Для каждого из уравнений F_j определяется подстановкой данных функции тока на поверхностях 200, 500, 800 мб из архива реанализа NCEP/NCAR и соответствующим осреднением:

$$F_j = \overline{J(\psi_{Cj}, q_{Cj})} + D_{Cj}.$$

На рис. 1 представлены статистические характеристики рассматриваемых моделей в сравнении с данными наблюдений. Первая строка – средние состояния баротропной модели низкого разрешения, баротропной модели T21, модели Маршала–Молтени (уровень 1, соответствующий 200 мб) и функции тока на поверхности 250 мб по данным архива NCEP/NCAR. Во второй строке – поля среднеквадратических отклонений (в данных NCEP/NCAR предварительно отфильтровывались частоты короче трех и длиннее 90 сут).

Отметим, что при построении внешних воздействий для модели T12 использовались данные функции тока 250 мб (для T21 – 300 мб), именно поэтому ее среднее состояние наиболее близко к наблюдениям. Кроме того видно, что все модели занижают дисперсию поля функции тока, при этом бароклиническая модель является наиболее реалистичной. В третьей и четвертой строках рис. 1 показаны первая и вторая ведущие естественные ортогональные функции (ЕОФ) моделей и данных. При построении ЕОФ для данных снова проводится фильтрация с окном 3–90 дней. Видно, что первая ЕОФ данных, идентифицируемая как круговая мода, хорошо воспроизводится баротропными моделями. Вторая ЕОФ поля наблюдений, имеющая структуру, сходную с РНА близка к первой ЕОФ бароклинической модели и имеет некоторое сходство со вторыми ЕОФ баротропных моделей. Вторая ЕОФ бароклинической модели идентифицируется как “волна три”, также выделяющаяся при анализе данных наблюдений. Отсутствие круговой моды в ведущих ЕОФ1 и ЕОФ2 бароклинической модели связано с тем, что ее данные не фильтруются и содержат значительную долю короткопериодной бароклинической изменчивости (это необходимо для унификации анализа моделей в следующих главах).

Рассмотрим далее структуру линейных мод циркуляции на уровне 250 мб. Как показано в работе [36], линеаризация баротропного уравнения

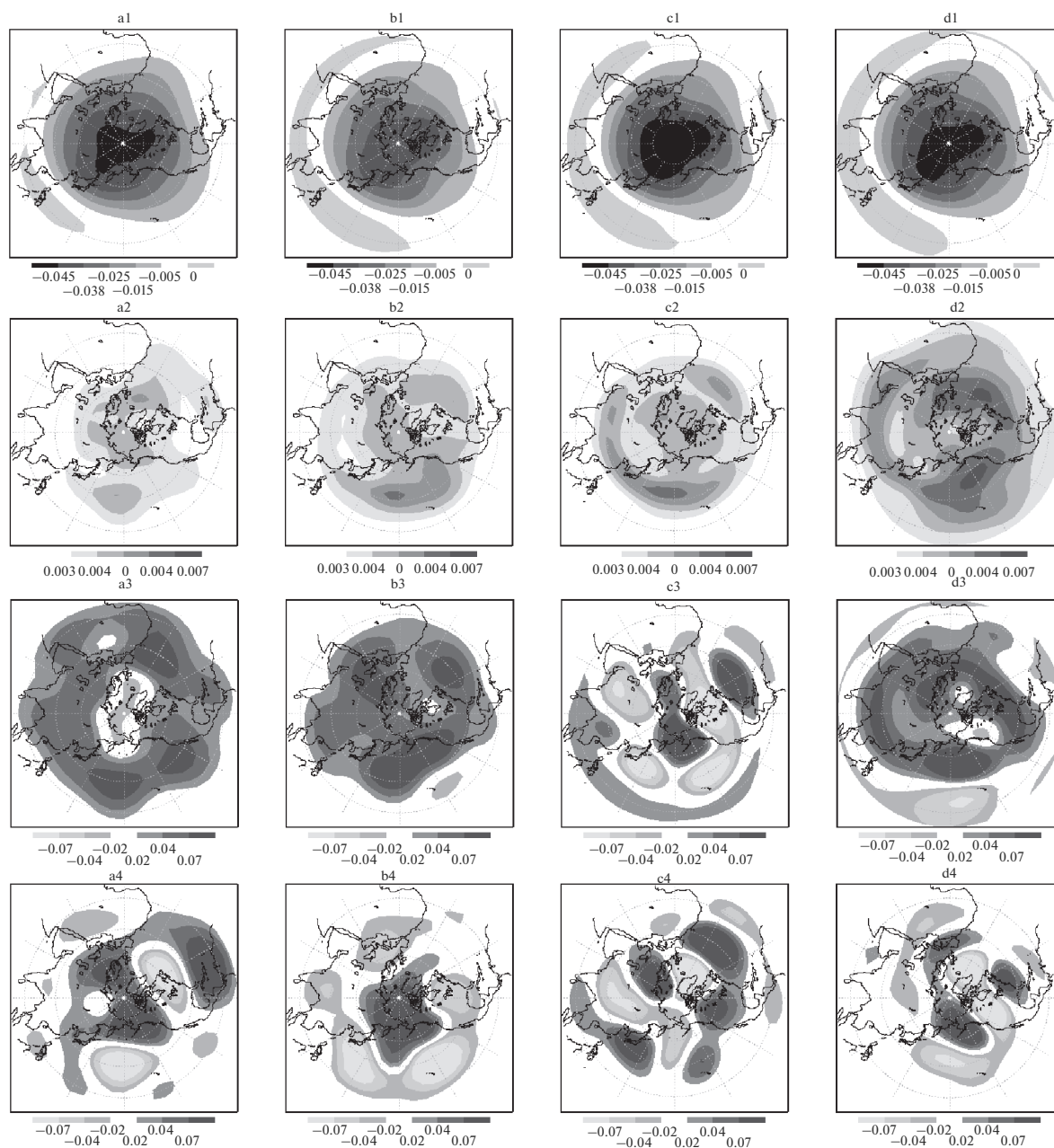


Рис. 1. Статистические характеристики моделей и данных реанализа NCEP/NCAR. a1–a4: среднее состояние (функция тока), среднеквадратичное отклонение (функция тока), первая и вторая ЕОФ баротропной модели T12. b1–b4: те же характеристики для баротропной модели T21. c1–c4: то же для модели Маршала-Молтени. d1–d4: то же для данных реанализа NCEP/NCAR (функция тока поверхности 250 мб, зима (декабрь-январь-февраль) 1979–2009 гг.). Размерные величины ($\text{м}^2/\text{с}$) получаются умножением на 2.97×10^9 .

вихря относительно среднего состояния атмосферы на этом уровне дает наибольшие значения корреляции ведущих собственных векторов с ведущими модами изменчивости. Линейный оператор (2) имеет 6 пар неустойчивых комплексных собственных векторов, периоды которых равны 12, 8, 5, 3, 90 и 30 дням. На рис. 2 в первой строке (a1–c1) показаны мнимые части векторов, отвечающих периодам 8, 12 и 30 (собственные векто-

ры 2, 1 и 6). Второй и первый векторы (a1 и a2) имеют структуру волн “шесть” и “пять”, распространяющихся с запада на восток, в структуре шестого вектора (a3) присутствует структура типа PNA и (на севере) волна “один”. Заметим, что линеаризация уравнения (2) относительно среднего состояния реальной атмосферы (вычисленного по архиву NCEP/NCAR) дает аналогичные результаты (выделяются все перечисленные выше

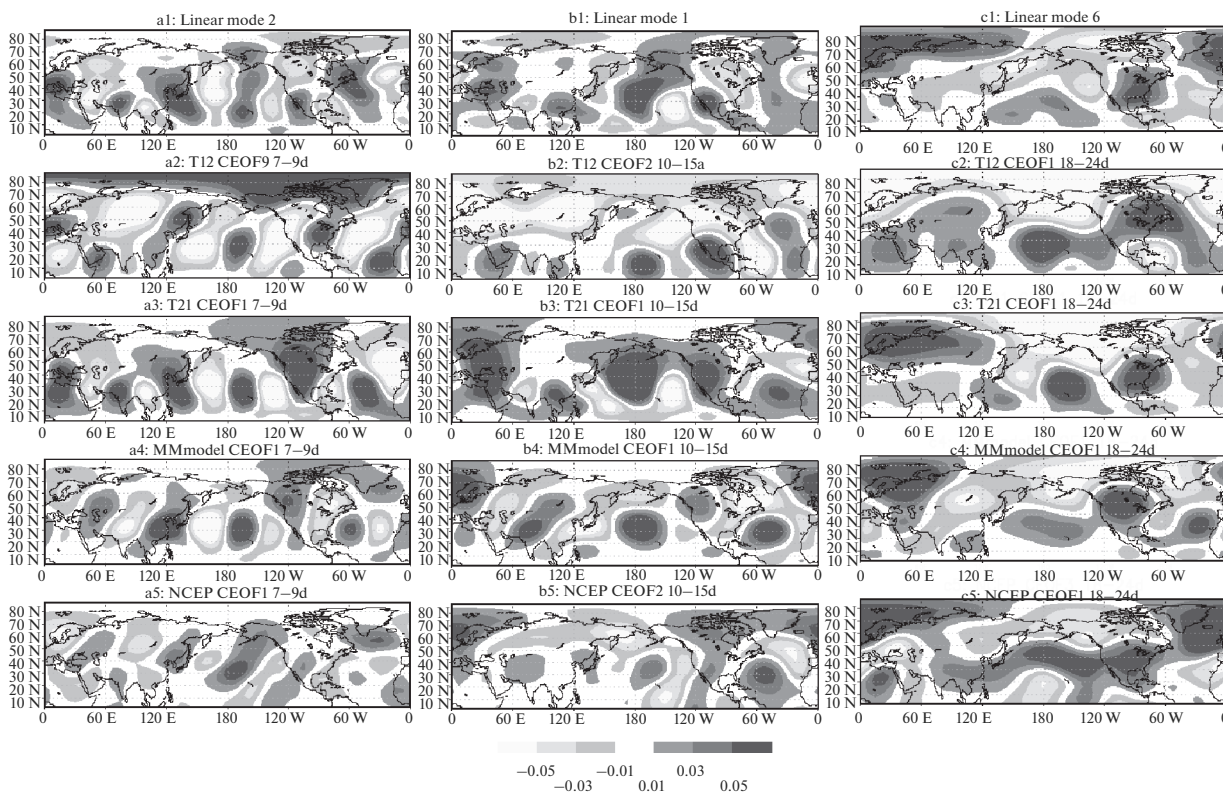


Рис. 2. Ведущие собственные моды линеаризованного относительно среднего состояния оператора баротропной модели T21 и характерные вращательные моды изменчивости моделей. a1–c1: ведущие собственные моды (вторая, первая, шестая) линейного оператора. a2–c2: девятая, вторая, первая комплексная ЕОФ баротропной модели T12 для окон фильтрации 7–9, 10–15 и 18–24 дня. a3–c3: первая комплексная ЕОФ баротропной модели T21. a4–c4: первая комплексная ЕОФ для модели Маршала–Молтени. Первая, вторая, третья комплексная ЕОФ по данным NCEP для окон фильтрации 7–9, 10–15 и 18–24 дня. Безразмерные единицы.

моды) с той лишь разницей, что среди ведущих векторов появляются и более высокочастотные моды с характерными периодами двое и трое суток и волновыми числами 7 и 8.

Регулярные колебательные процессы лучше всего выделяются с помощью построения комплексных ЕОФ. Процедура вычисления гильбертовых ЭОФ для траектории системы заключается в следующем (см. [37]). Сначала производится преобразование Фурье по времени для каждой компоненты рассматриваемого физического поля. Далее, в полученном разложении производится его сдвиг на четверть периода (90 град.) и обратное преобразование Фурье. В результате получаем исходный временной ряд $\psi(j)$ и его гильберт-преобразование $\check{\psi}(j)$. Далее необходимо составить комплексную переменную $z(j) = \psi(j) + i\check{\psi}(j)$ и вычислить для нее ковариационную матрицу. Комплекснозначные собственные векторы этой матрицы есть гильбертовы (или комплексные) ЭОФ системы, определяющие двумерные плоскости с наибольшей изменчивостью решения. На рис. 2 показан результат комплексного ЕОФ-анализа данных баротропных и

бароклининой моделей, к которым применена фильтрация с окном 7–9, 10–15 и 18–30 дней (приводится лишь одна компонента комплексной ЕОФ, имеющая наибольшую корреляцию с соответствующей линейной модой). Баротропная модель низкого разрешения (вторая строка, a2–c2) плохо разрешает высокочастотные моды, поэтому линейная мода 2 реализуется лишь в виде 9-ой по счету ЕОФ (рис. 2a2), а первая мода – в виде второй ЕОФ. 30-дневная структура 6-ой моды выделяется в первой ЕОФ. Структура изменчивости баротропной модели высокого разрешения близка к ее собственным модам, все моды выделяются в виде ведущих комплексных ЕОФ (рис. 2a3–c3). Изменчивость функции тока верхнего уровня модели Маршала–Молтени (рис. 2a4–c4) также близка к собственным модам баротропной циркуляции, представленным в виде ведущих ЕОФ с близкой структурой. Реальные данные имеют гораздо более богатую структуру изменчивости, однако собственные моды баротропной динамики здесь также выделяются (рис. 2a5–c5). Волна “шесть” реализуется в виде ведущей комплексной ЕОФ, волна “пять” в виде второй ЕОФ, а структура “волна один”-PNA – в виде третьей ЕОФ.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ СИСТЕМЫ И ЕЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

По определению, периодической орбитой является специальная траектория системы, которая через фиксированное время T (период орбиты) возвращается в свое исходное положение. В символьном виде это можно записать как

$$\psi(T) \equiv S(T, \psi(0)) = \psi(0), \tag{6}$$

где $S(T, \psi(0))$ это нелинейный оператор эволюции, определяющий состояние системы с начальным состоянием в точке $\psi(0)$ через время T . Соотношение, определяющее орбиту, является, по сути, нелинейной системой из N уравнений для $N + 1$ неизвестного, поскольку $\psi(T)$ нелинейно зависит и однозначно определяется $\psi(0)$ и T . Неоднозначность системы вызвана тем, что одна и та же орбита может быть задана различными начальными условиями, которые получаются друг из друга сдвигом вдоль периодической траектории. Для решения системы уравнений могут быть использованы различные численные методы. В данной работе мы использовали метод Ньютона с подавлением шага (см., например, [38]), при этом необходимо доопределить систему, устранив свободу выбора начального условия. Это можно сделать, добавив к системе уравнений фазовое условие, смысл которого заключается в том, что направление поиска выбирается ортогональным к направлению движения.

Кратко проиллюстрируем численную схему метода (детали можно найти в [29]). Пусть $\psi^{(k)}$ и $T^{(k)}$ являются (k) -ми приближениями для $\psi(0)$ и T . Обозначим $\psi^{(k+1)} = \psi^{(k)} + h^{(k)}$ и $T^{(k+1)} = T^{(k)} + \tau^{(k)}$. Стандартная итерация метода Ньютона основана на разложении уравнения

$$S(T^{(k+1)}, \psi^{(k+1)}) = \psi^{(k+1)}$$

в ряд Тейлора по $h^{(k)}$ и $\tau^{(k)}$ с точностью до малых первого порядка. В результате получается линейная система уравнений для $h^{(k)}$ и $\tau^{(k)}$. А именно,

$$0 = S(T^{(k+1)}, \psi^{(k+1)}) - \psi^{(k+1)} \approx S(T^{(k)}, \psi^{(k)}) - \psi^{(k)} + \left(\frac{\partial S(T, \psi)}{\partial \psi} \Big|_{(\psi, T) = (\psi^{(k)}, T^{(k)})} - E \right) h^{(k)} + \frac{\partial S(T, \psi)}{\partial T} \Big|_{(\psi, T) = (\psi^{(k)}, T^{(k)})} \tau^{(k)} = 0. \tag{7}$$

Потребуем ортогональность направления поиска $h^{(k)}$ направлению движения (правой части системы) в текущем начальном состоянии:

$$(h^{(k)}, X(\psi^{(k)})) = 0. \tag{8}$$

Система линейных уравнений в невырожденном случае однозначно определяет $h^{(k)}$ и $\tau^{(k)}$, при этом следующее приближение вычисляется как

$$\psi^{(k+1)} = \psi^{(k)} + \eta h^{(k)}, \quad T^{(k+1)} = T^{(k)} + \eta \tau^{(k)}.$$

Параметр η равен единице в стандартном методе Ньютона. Однако если линейная система плохо обусловлена, шаг $(h^{(k)}, \tau^{(k)})$ может быть большим. В этом случае разложение в ряд Тейлора с точностью до слагаемых первого порядка не имеет смысла, и метод Ньютона может расколотиться. Как показывают результаты расчетов, для рассматриваемой задачи подавление шага является обязательной процедурой. Для выбора величины η в работе была использована методика “line search”, описанной в [38]. Заметим, что каждая итерация метода Ньютона требует интегрирования линеаризованной модели в полном фазовом пространстве.

Для определения среднего значения какой-либо статистической характеристики системы $\Psi(\psi)$ модель интегрируется в течении длительного времени, Ψ оценивается в каждой точке полученной траектории и усредняется по всем моментам времени

$$\langle \Psi \rangle = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \Psi(\psi(k)), \tag{9}$$

при этом, все измерения $\psi(k)$ учитываются с одинаковым весом, равным единице.

Согласно теории гиперболических систем (см. [24]), зная набор всех периодических траекторий системы с периодом меньшим T , среднее $\langle \Psi \rangle$ можно определить, вычисляя Ψ в точках, лежащих на периодических траекториях:

$$\langle \Psi \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{W} \sum_{i=1}^{I(T)} w_i \Psi(\psi_i), \tag{10}$$

где ψ_i – периодическая точка периода $t_i < T$, $I(T)$ – общее число таких точек, каждая орбита периода t_i содержит t_i/τ периодических точек (τ – шаг по времени в модели), w_i – вес орбиты (одинаковый для всех ее периодических точек), W – суммарный вес всех периодических точек. Вес орбиты w_i определяется как

$$w_i = \exp\left(-t_i \sum_{m, \lambda(i, m) > 0} \lambda(i, m)\right), \tag{11}$$

где $\lambda(i, m)$ – положительные ляпуновские показатели орбиты, соответствующей i -ой периодической точке. Таким образом, формула имеет такой же смысл, что и стандартное определение среднего, только значение функционала для конкретной периодической точки учитывается не с одинаковым единичным весом, а с весом, пропорциональным характеристикам неустойчивости орбиты – скорости роста фазового объема вдоль ее неустойчивых направлений. Чем выше скорость роста, тем меньше вес. Слабо неустойчивые орбиты вносят определяющий вклад при вычислении среднего, что физически оправдано, поскольку траектория проводит больше времени в окрестности таких орбит.

С помощью указанных методик для каждой из моделей был найден набор орбит, который будет использован для вычисления статистических характеристик моделей наряду со стандартным определением. Для баротропной модели T12 было найдено 2322 орбиты, для ее версии разрешения T21 – 1851 орбита, для модели Маршала–Молтени – 2711 орбит. Заметим, что справедливость аппроксимации гарантируется теоремно, если изучаемая система является гиперболической и если найдены все орбиты вплоть до достаточно большого периода. Гарантировать эти факты мы, разумеется, не можем. Более того, число орбит, необходимое для корректной реконструкции траектории системы экспоненциально зависит от ее сложности, поэтому можно ожидать, что для модели Маршала–Молтени, имеющей наибольшую размерность аттрактора и наибольшую скорость нарастания ошибки, тестируемый подход даст наихудшие результаты.

Результат аппроксимации базовых статистических характеристик рассматриваемых моделей с рис. 1 (среднее состояния, изменчивость, первый и второй ведущие ЕОФ) с помощью периодических траекторий и использования представлений (10–11), представлен на рис. 3. Видно, что характеристики наиболее простой баротропной модели T12 воспроизводятся точно, в случае модели T21 занижается дисперсия, второй ЕОФ воспроизводится хуже. Для наиболее сложной модели Маршала–Молтени изменчивость еще более занижена, ведущие ЕОФ, имеющие характерный временной масштаб порядка 20-ти дней воспроизводятся плохо. Данный факт объясняется тем, что для модели Маршала–Молтени число найденных орбит с периодами более 10-ти дней мало, и при вычислении ЕОФ доминируют высокочастотные моды.

СТРУКТУРА ЦИРКУЛЯЦИИ В ПЛОСКОСТИ ВЕДУЩИХ ЕОФ

Рассмотрим далее, каким образом устроена циркуляция в плоскости собственных мод баро-

тропной циркуляции. Для этого спроектируем траекторию каждой модели на соответствующую двумерную плоскость комплексной ЕОФ с рис. 2. Таким образом, для каждой точки траектории мы получим двухкомпонентный вектор $(x_1(i), x_2(i)) \equiv r(i)$. Скорость движения на плоскости будет равна $(x_1(i+1) - x_1(i), x_2(i+1) - x_2(i))/\tau \equiv u(i)$. Угол вращения θ в двумерной плоскости за 1 шаг по времени равен (если среднее вычтено) $\theta = \arcsin[r(i+1) \times r(i) / |r(i+1)| |r(i)|]$ и соответствующий период вращения можно вычислить как $T_\theta = 2\pi\tau/\theta$. Построим далее боксовым методом плотность вероятности для проекции решения на выбранную плоскость и плотность вероятности для тех точек, скорость которых вдоль данной плоскости $u(i)$ по норме составляет как минимум 50% от полной скорости решения $(\psi(i+1) - \psi(i))/\tau$ (т.е. движение в данный момент времени происходит в основном вдоль данной плоскости).

На рис. 4a1–a3 представлены плотности вероятности проекций решения баротропной модели T21 на плоскости комплексных ЕОФ с рис. 2 (a3, b3 и c3), на рис. 4b1–b3 – проекции решения на те же плоскости, но для состояний скорость которых вдоль данной плоскости по норме превосходит 0.5 от полной нормы скорости. Время обращения T_θ для соответствующих плоскостей показано на рис. 4c1–c3. Можно сказать, что для всех проекций распределения имеют квазигансовую форму с единственным максимумом. В этом смысле, режимы циркуляции не выделяются. В то же время, если рассматриваются состояния, эволюция которых в значительной степени определяется процессом, определяющим соответствующий комплексный ЕОФ (например, распространение волны Россби с волновым числом 6, как на рис. 4a1), то плотность вероятности имеет нетривиальный характер, приобретая форму “бублика”. Траектории системы описывают регулярные вращения в фазовом пространстве вокруг начала координат.

Период вращения близок к характерному периоду собственной моды линейного оператора баротропной задачи (6–8 дней (рис. 4c1) для плоскости рис. 2a3, и 10–14 дней (рис. 4c2) для плоскости рис. 2b3). При увеличении окна фильтрации до 18–24, т.е. при рассмотрении более низкочастотных колебаний, характер циркуляции становится более сложным, регулярные движения вокруг среднего состояния перестают доминировать, в распределении периодов вращательного движения появляется асимметрия.

Похожая картина имеет место и для периодических орбит системы (рис. 5). Для короткопериодных мод изменчивости правильно выделяются

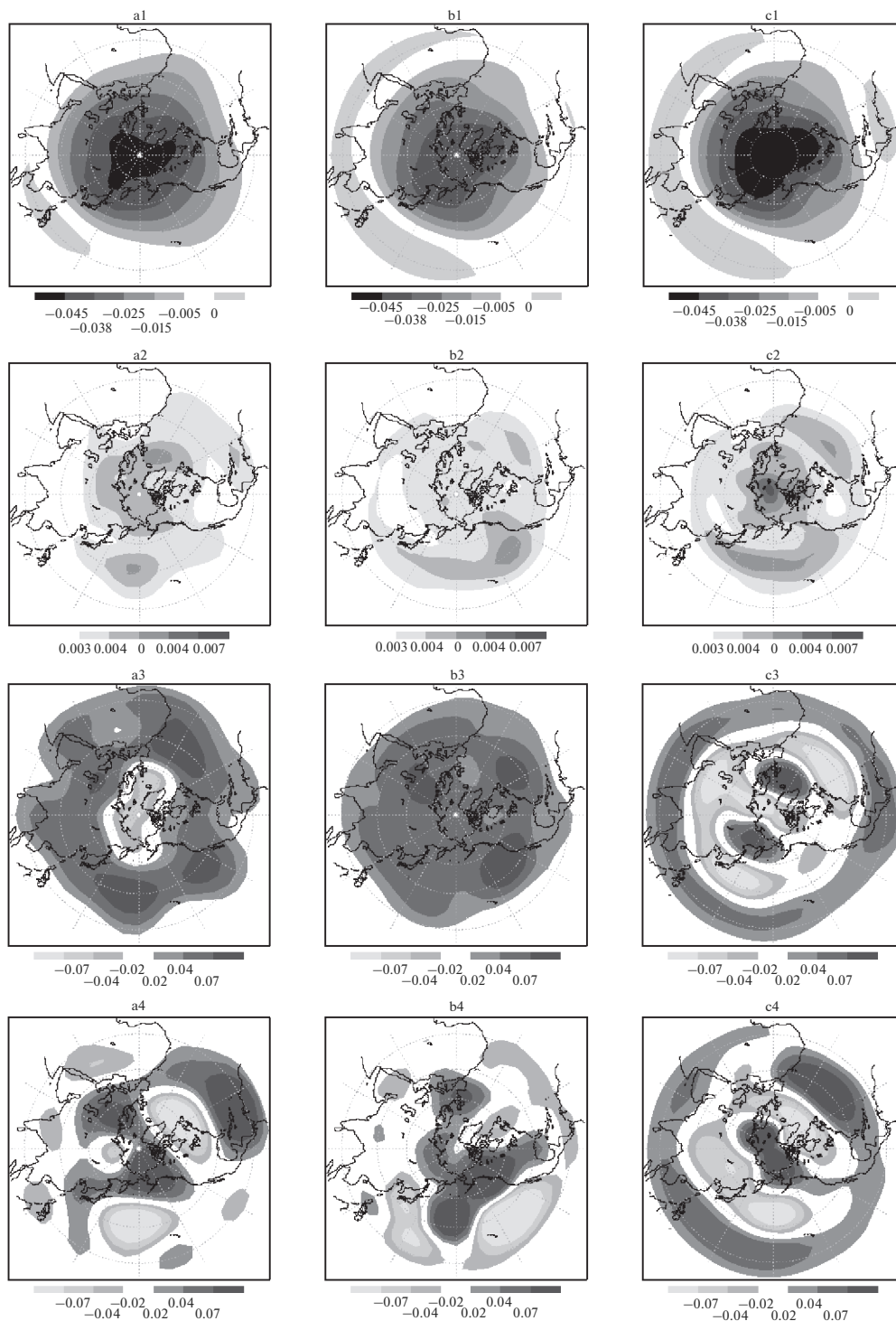


Рис. 3. Аппроксимация статистических характеристик моделей с рис. 1 с помощью периодических траекторий. a1–a4: среднее состояние (функция тока), среднеквадратичное отклонение (функция тока), первая и вторая ЕОФ баротропной модели T12. b1–b4: те же характеристики для баротропной модели T21. c1–c4: то же для модели Маршала–Молтени.

особенности структуры плотности вероятности и характерные времена. Это означает, что траектории модели действительно совершает регулярные вращательные движения вокруг начала координат

вдоль кластера соответствующих периодических траекторий. Для низкочастотных колебаний качество аппроксимации ухудшается, главным образом из за того, что количество орбит с перио-

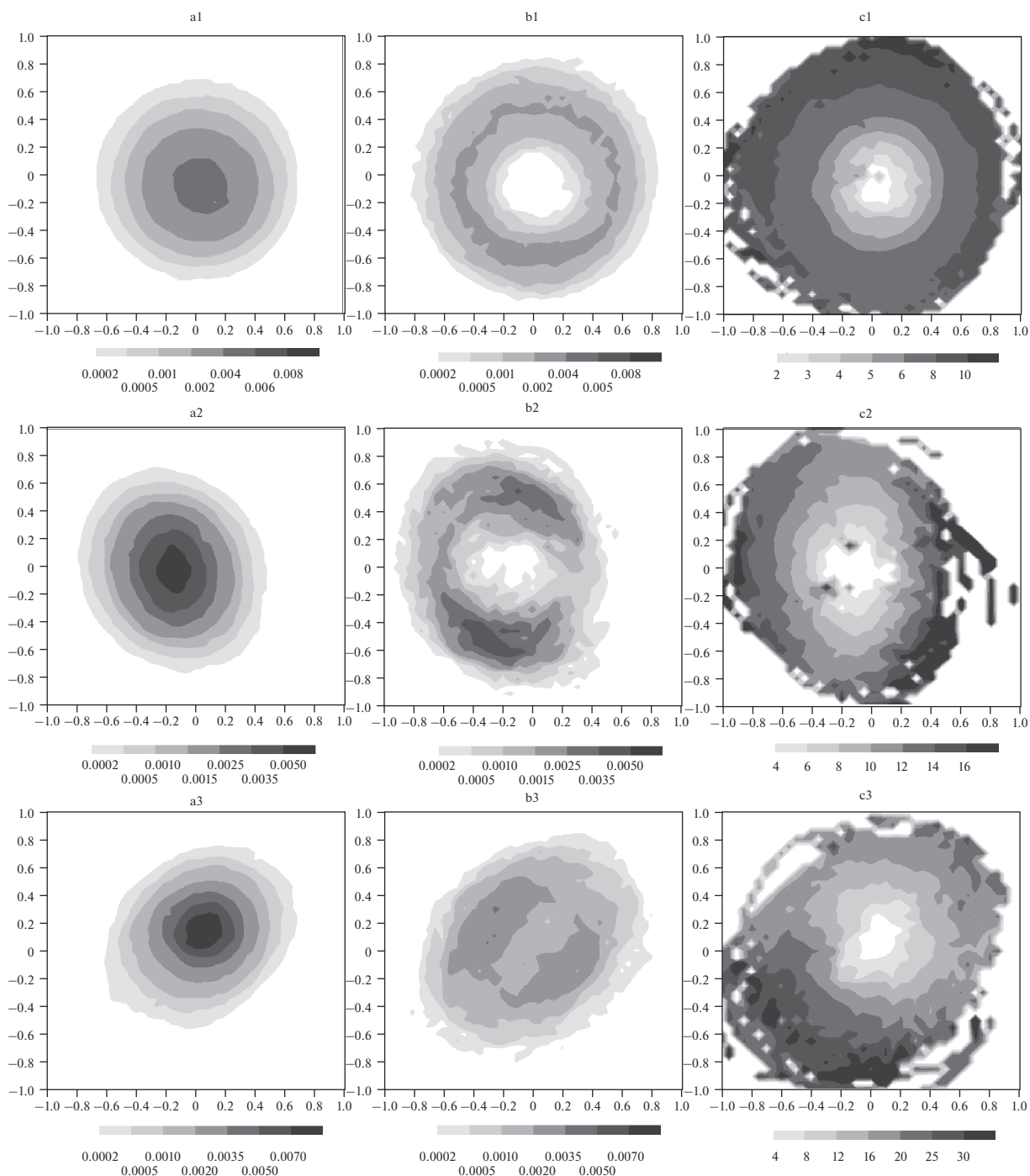


Рис. 4. Проекция плотности вероятности для плоскости ведущих вращательных мод изменчивости баротропной модели T21 (a1–a3), то же для состояний, скорость которых имеет значительную составляющую вдоль плоскости проекции (b1–b3). c1–c3 – характерный периода обращения траектории вокруг начала координат.

дом, большим 10 дней, полученное с помощью численного алгоритма недостаточно для корректного описания динамики.

Для баротропной модели T12 наблюдается похожая картина – имеют место регулярные колебательные движения для 10–15 дневных мод и слож-

ная низкочастотная динамика, колебания с характерным временем 7–9 дней в модели отсутствуют. Орбиты аппроксимируют все детали динамики с большей точностью, чем для модели T21. Модель Маршала–Молтени демонстрирует аналогичную динамику, однако, ее аппроксимация периодиче-

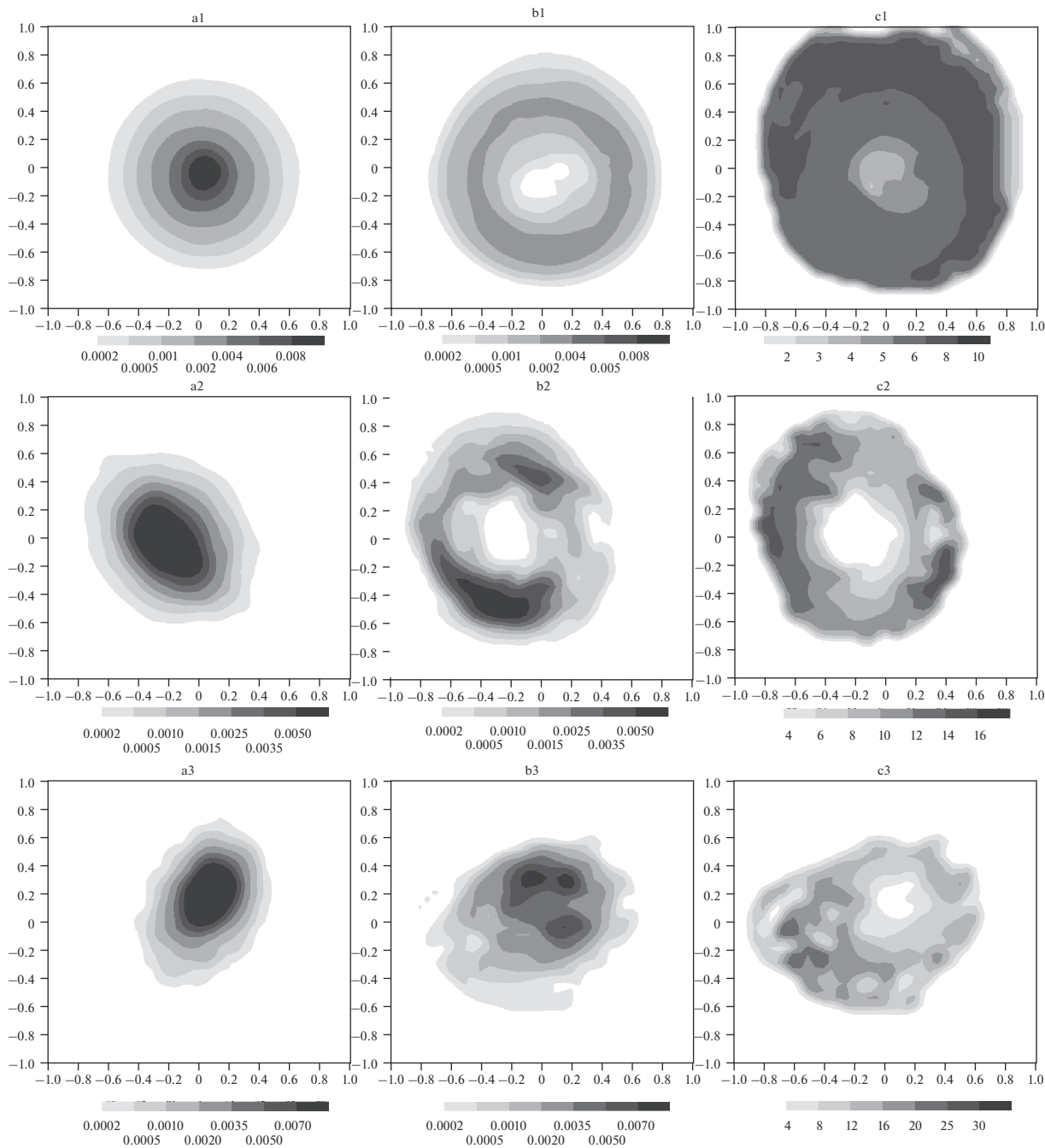


Рис. 5. То же, что и рис. 4, но полученное в результате аппроксимации периодическими орбитами.

скими движениями возможна только для наиболее высокочастотных мод (7–9 дней и короче).

Аналогичный анализ данных реальной климатической системы показывает, что и реальная циркуляция атмосферы имеет похожую структуру. Используя весь имеющийся архив NCEP/NCAR (1948–2015 г., ноябрь–март) для функции тока поверхности 250 мб были построены комплексные ЕОФ для фильтрованных дан-

ных с окнами фильтрации 4–6 и 10–15 сут. Были вычислены состояния, для которых норма проекции скорости на выбранную плоскость превышает 0.45 от нормы скорости. Далее для этих состояний были построены двумерные плотности вероятности (рис. 6a1 – для СЕОФ1 и фильтра 4–6 дней, рис. 6a2 – для СЕОФ1 и фильтра 10–15 дней) и оценено характерное время обращения вокруг среднего состояния (рис. 6b1 и рис. 6b2 соответственно).

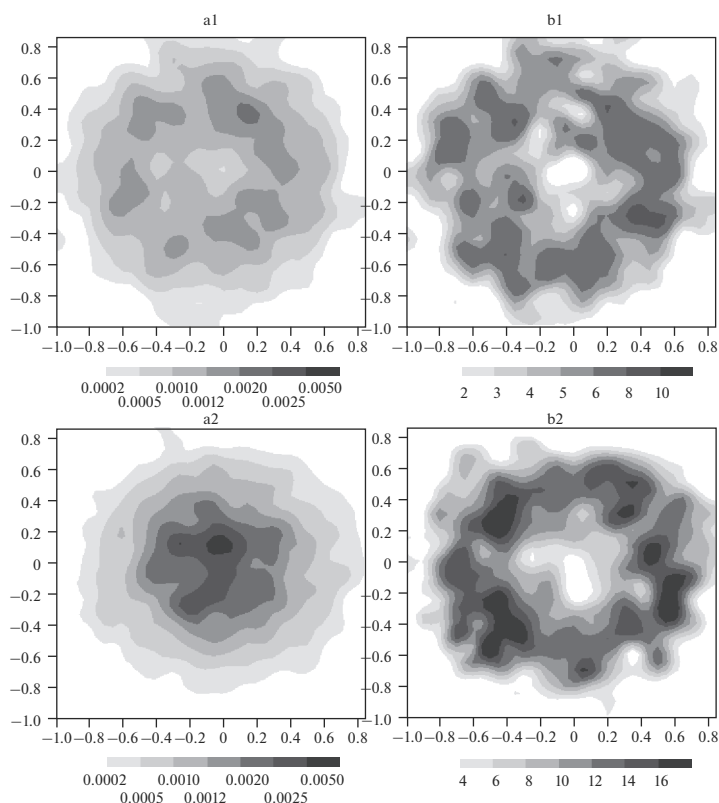


Рис. 6. Проекция плотности вероятности на плоскость SEOF1 (а) и характерное время, за которое траектория обращается вокруг начала координат вдоль плоскости SEOF1 (б) для состояний модели, фазовая скорость которых проектируется на плоскость соответствующей SEOF1 с коэффициентом корреляции выше 0.45. SEOF1 получен для фильтрованных данных с окнами фильтрации 4–6 дней (а1 и b1) и 10–15 дней (а2 и b2).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассматривается связь между собственными модами (собственными векторами линеаризованных относительно среднего состояния) моделей динамики атмосферы, ведущими модами изменчивости модельной циркуляции и неустойчивыми периодическими решениями уравнений моделей (решениями, возвращающимися в исходное состояние через заданное время).

Для поиска периодических траекторий реализован эффективный вычислительный алгоритм. Показано, что в фазовых пространствах моделей существует набор периодических решений, достаточный для аппроксимации базовых статистических характеристик моделей (среднего состояния, дисперсии, ведущих мод изменчивости). При этом, для наиболее сложной из рассматриваемых моделей (модели Маршала–Молтени) моды низкочастотной изменчивости (с периодами более двух недель) аппроксимируются недостаточно хорошо, что, по-видимому, связано с недостаточным количеством найденных орбит.

Кластеры орбит можно связать с различными колебательными процессами в фазовом пространстве рассмотренных атмосферных моделей — вол-

нами Россби различного пространственного масштаба, осцилляционными структурами типа PNA и NAO. Для высокочастотных мод изменчивости динамика системы реализуется в виде регулярно периодического движения в плоскостях комплексных естественных ортогональных функций, при этом траектория системы повторяет круговое движение орбит с тем же периодом. Плотность вероятности точек, совершающих такие вращения, имеет вид тора, который хорошо аппроксимируется при помощи периодических орбит. Как правило, плоскость регулярного движения совпадает с плоскостью наиболее неустойчивых собственных мод баротропной динамики. Интересен тот факт, что линейный характер динамики наблюдается не рядом со средним состоянием, а на некотором расстоянии от него. Это может быть интерпретировано в рамках линейного динамического стохастического подхода к описанию атмосферной циркуляции, когда динамический оператор аппроксимируется устойчивым линейным оператором и стохастическим нелинейным слагаемым, моделирующим нелинейные взаимодействия в системе. Когда состояние системы далеко от среднего, доминирует линейная часть тенденции, и наоборот для состояний близких к среднему.

В случае более низкочастотных процессов (от 14 дней и более) динамика имеет более сложный характер, не описываемый простыми двумерными вращениями. Наряду с линейными процессами (например, волна “один”, распространяющаяся с востока на запад) присутствуют и более сложные моды с нелинейной динамикой (круговая мода, НАО). При этом, возможность аппроксимации динамики периодическими траекториями все равно сохраняется. Анализ данных наблюдений показывает, что, по-видимому, такие же выводы можно сделать и для реальной атмосферной циркуляции. Проекция решения на высокочастотные моды изменчивости предполагает наличие периодических (квазипериодических) траекторий у реальной атмосферы.

Благодарности. Работа выполнена при государственной поддержке научного центра мирового уровня “Московский центр фундаментальной и прикладной математики” (разработка методов поиска периодических траекторий) и гранта РФФИ 17-55-10012 КО_а (анализ моделей).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rossby C.G., Collaborators.* Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacements of the semi-permanent centers of action // *J. Mar. Res.* 1939. V. 2. P. 38–55.
2. *Charney J.G.* The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current // *J. Meteor.* 1947. V. 4. P. 135–162.
3. *Eady E.T.* Long waves and cyclone waves // *Tellus.* 1949. V. 1. P. 33–52.
4. *Simmons A.J., Hoskins B.J.* Baroclinic instability on the sphere: Normal modes of the primitive and quasigeostrophic equations // *J. Atmos. Sci.* 1976. V. 33. P. 1454–1477.
5. *Frederiksen J.S.* A unified three-dimensional instability theory of the onset of blocking and cyclogenesis // *J. Atmos. Sci.* 1982. V. 39. P. 969–982.
6. *Дымников В.П.* О связи естественных ортогональных составляющих полей метеоэлементов с собственными функциями динамических операторов // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1988. Т. 24. № 7. С. 675–683.
7. *Hasselmann K.* PIPs and POPs: The reduction of complex dynamical systems using principal interaction and oscillation patterns // *J. Geophys. Res.* 1988. V. 93. P. 11015–11021.
8. *von Storch H.H., Bruns T., Fischer-Bruns I., Hasselmann K.* Principal oscillation pattern analysis of the 30- to 60-day oscillation in general circulation model equatorial troposphere // *J. Geophys. Res.* 1988. V. 93. P. 11022–11036.
9. *von Storch H.H., Weese U., Xu J.S.* Simultaneous analysis of space-time variability: Principal oscillation patterns and principal interaction patterns with applications to the Southern Oscillation // *Z. Meteor.* 1990. V. 40. P. 99–103.
10. *Xu J.-S.* Predicting the state of the Southern Oscillation using principal oscillation pattern analysis // *J. Climate.* 1990. V. 3. P. 1316–1329.
11. *Schnur R., Schmitz G., Grieger N., von Storch H.* Normal modes of the atmosphere as estimated by principal oscillation patterns and derived from quasigeostrophic theory // *J. Atmos. Sci.* 1993. V. 50. P. 2386–2400.
12. *Charney J.G., DeVore J.G.* Multiple Flow Equilibria in the Atmosphere and Blocking // *J. Atmos. Sci.* 1979. V. 36. P. 1205–1216.
13. *Legras B., Ghil M.* Persistent anomalies, blocking and variations in atmospheric predictability // *J. Atmos. Sci.* 1985. V. 42. P. 433–471.
14. *Mo K., Ghil M.* Cluster analysis of multiple planetary flow regimes // *J. Geophys. Res. Atmos.* 1988. V. 93. P. 10927–10952.
15. *Дымников В.П., Казанцев Е.В.* О структуре аттрактора порождаемого системой уравнений баротропной атмосферы // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* 1993. Т. 29. № 5. С. 581–585.
16. *Vautard K., Mo K., Ghil M.* Statistical significance test for transition matrices of atmospheric Markov chains // *J. Atmos. Sci.* 1990. V. 47. P. 1926–1931.
17. *Kimoto M., Ghil M.* Multiple flow regimes in the Northern Hemisphere winter. Part II: Sectorial regimes and preferred transitions // *J. Atmos. Sci.* 1993. V. 50. P. 2645–2673.
18. *Kondrashov D., Ide K., Ghil M.* Weather regimes and preferred transition paths in a three-level quasigeostrophic model // *J. Atmos. Sci.* 2004. V. 61. P. 568–587.
19. *Majda A.J., Franzke C.L., Fischer A., Crommelin D.T.* Distinct metastable atmospheric regimes despite nearly Gaussian statistics: A paradigm model // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* 2006. V. 103. P. 8309–8314.
20. *Franzke C., Crommelin D., Fischer A., Majda A.J.* A Hidden Markov Model Perspective on Regimes and Metastability in Atmospheric Flows // *J. Climate.* 2008. V. 21. P. 1740–1757.
21. *Bowen R.* Periodic points and measures for axiom A diffeomorphisms // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1971. V. 154. P. 377–397.
22. *Bowen R.* Periodic orbits for hyperbolic flows // *Amer. J. Math.* 1972. V. 94. P. 1–30.
23. *Auerbach D., Cvitanovic P., Eckmann J.-P., Gunaratne G., Procaccia I.* Exploring chaotic motion through periodic orbits // *Phys. Rev. Lett.* 1987. V. 58. P. 2387–2389.
24. *Ruelle D.* Smooth dynamics and new theoretical ideas in nonequilibrium statistical mechanics // *J. Statist. Phys.* 1999. V. 95. P. 393–468.
25. *Дымников В., Филатов А.* *Mathematics of Climate Modelling.* Birkhauser. Boston. 1997.
26. *Gallavotti G.* Chaotic dynamics, fluctuations, nonequilibrium ensembles // *Chaos.* 1998. V. 8. № 2. P. 384–392.
27. *Kazantsev E.* Unstable periodic orbits and attractor of the barotropic ocean model // *Nonlinear processes in Geophysics.* 1998. V. 5. P. 281–300.
28. *Selten F.M., G. Branstator.* Preferred regime transition routes and evidence for an unstable periodic orbit in a baroclinic model // *J. Atmos. Sci.* 2004. V. 61. P. 2267–2282.

29. *Gritsun A.* Unstable periodic trajectories of a barotropic model of the atmosphere // *Rus. J. of Num. Anal. Math. Modelling.* 2008. V. 23. № 4. P. 345–367.
30. *Грицун А.* Статистические характеристики баротропной модели атмосферы и ее неустойчивые периодические решения // *Докл. АН.* 2010. Т. 435. № 6. С. 810–814.
31. *Грицун А.* Связь периодических траекторий с модами изменчивости циркуляции в баротропной модели динамики атмосферы // *Докл. АН.* 2011. Т. 438. № 1. С. 105–109.
32. *Gritsun A.* Statistical characteristics, circulation regimes and unstable periodic orbits of a barotropic atmospheric model // *Phil. Trans. R. Soc. A* 371. 2013. 20120336.
33. *Marshall J., Molteni F.* Toward a dynamical understanding of planetary scale flow regimes // *J. Atmos. Sci.* 1993. V. 50. P. 1792–1818.
34. *Курбаткин Г.П., Синяев В.Н., Янцен А.Г.* Спектральная модель долгосрочного прогноза со среднестатистическими ограничениями // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1973. Т. 9. № 11. С. 3–8.
35. *Franzke C., Majda A., Vanden-Eijnden E.* Low-Order Stochastic Mode Reduction for a Realistic Barotropic Model Climate // *J. Atmos. Sci.* 2005. V. 62. P. 1722–1745.
36. *Дымников В.П., Грицун А.С.* Баротропная неустойчивость и структура низкочастотной изменчивости циркуляции, порождаемой двухслойной бароклинной моделью атмосферы // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* 1996. Т. 32. № 5. С. 535–538.
37. *von Storch H, Zwiers F.* Statistical analysis in climate research. Cambridge University Press. Cambridge. 1999. 484 p.
38. *Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P., Metcalf M.* Numerical Recipes in Fortran 90. Cambridge university press. 1986. 1040 p.

Variability of Extra Tropical Atmospheric Circulation and Periodical Trajectories in Simplified Atmospheric Models

A. S. Gritsun*

Institute of Numerical mathematics Russian Academy of sciences, Gubkina str., 8, Moscow, 119333 Russia

**e-mail: asgrit@mail.ru*

In this paper we investigate a possibility to approximate basic statistical characteristics of atmospheric models by its periodic trajectories – closed solutions of equations of model dynamics. This idea is borrowed from the dynamical systems theory where in several important cases (for hyperbolic systems in particular) periodic trajectories define invariant measure of the system being the mathematical analogue for the notion of the climate. We show here that this kind of approximation is possible for several atmospheric models as well. Moreover the principal modes of atmospheric variability are represented by clusters of periodic orbits positioned along leading eigen vectors of model dynamical operators linearized around corresponding model average states. Analysis of observational data shows that the same conclusion could be made for real atmospheric circulation.

Keywords: Dynamics of atmosphere, variability, circulation regimes, periodic solutions