

УДК 551.5:532.5

ЭКМАНОВСКОЕ ТРЕНИЕ И ФОРМИРОВАНИЕ ВЕРХНЕТРОПОСФЕРНЫХ ЗОНАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ

© 2020 г. М. В. Калашник^{a, b, *}

^aИнститут физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, Пыжевский пер., 3, Москва, 109017 Россия

^bНПО “Тайфун”, ул. Победы, 4, Калужская обл., г. Обнинск, 249038 Россия

*E-mail: kalashnik-obn@mail.ru

Поступила в редакцию 03.03.2020 г.

После доработки 12.05.2020 г.

Принята к публикации 03.06.2020 г.

В рамках квазигеострофической модели атмосферы с двумя горизонтальными границами (подстилающей поверхностью и тропопаузой) исследовано влияние экмановского трения на динамику зональных течений (ЗТ). Предполагается, что течения имеют нулевую потенциальную завихренность и вызваны заданными распределениями плавучести на границах. Показано, что в случае периодических распределений разнонаправленный по вертикали профиль скорости ЗТ трансформируется в однонаправленный профиль с максимумом на верхней границе и нулевой скоростью на нижней границе. В процессе трансформации скорость на верхней границе возрастает, т.е. происходит интенсификация верхнетропосферных ЗТ за счет экмановского трения. Аналогичная интенсификация происходит и в случае начальных распределений плавучести фронтального типа, индуцирующих систему из двух противоположно направленных струйных течений, расположенных в верхней и нижней половине слоя атмосферы. За счет экмановского трения осевая скорость нижнего течения падает до нуля, а скорость верхнего течения, постепенно охватывающего всю тропосферу, возрастает в два раза. Результирующее течение представляет собой прижатую к верхней границе струю, которую можно считать прототипом западного верхнетропосферного струйного течения. Важные структурные особенности такой струи, устанавливаемые в рамках полной негеострофической модели, связаны с горизонтальной асимметрией струи и формированием фронтов (поверхностей разрыва), примыкающих к верхней границе.

Ключевые слова: пограничный слой Экмана, придонное трение, верхнетропосферные струйные течения, поверхностная геострофическая модель

DOI: 10.31857/S0002351520050053

1. ВВЕДЕНИЕ

В геофизической гидродинамике атмосферу традиционно представляют слоем страфицированной вращающейся жидкости, заключенным между двумя горизонтальными границами – подстилающей поверхностью и тропопаузой [1–4]. Трение о подстилающую поверхность (поверхность Земли) приводит к формированию здесь экмановского пограничного слоя, который, посредством механизма “экмановской подкачки”, оказывает важное влияние на динамику и устойчивость атмосферных течений [5–9]. Обычно считается, что этот механизм приводит к затуханию движений в свободной атмосфере. В действительности это не так – затухают лишь движения непосредственно у поверхности. Вблизи верхней границы (тропопаузы) скорость не подвержена влиянию экмановского трения и определяется меридиональным распределением температуры. С данной особенностью может быть

связано существование интенсивных верхнетропосферных струйных течений, расположенных на высоте 8–10 км (уровне тропопаузы) и впервые обнаруженных военными летчиками в конце Второй мировой войны [10, 11]. Максимальная скорость струйных течений может достигать 100 м/с, т.е. практически на порядок превышать скорость ветра у поверхности Земли. Столь резкий рост скорости в пределах тропосферы, очевидно, не может объясняться падением фоновой плотности атмосферы с высотой (вертикальный масштаб изменения плотности порядка 100 км).

В настоящей работе исследован процесс трансформации зональных атмосферных течений (ЗТ) за счет придонного экмановского трения. Исследование выполнено в рамках так называемой поверхностной геострофической модели (SQG model, [12–14]), описывающей квазигеострофические течения с нулевой потенциальной завих-

ренностью. Динамика таких течений инициируется заданными распределениями плавучести (потенциальной температуры) на границах. С использованием точных решений модели показано, что в случае периодических по горизонтальной координате распределений разнонаправленный по вертикали профиль скорости ЗТ трансформируется в однонаправленный профиль с максимумом на верхней границе и нулевой скоростью на нижней границе. В процессе трансформации скорость на верхней границе возрастает, т.е. происходит интенсификация верхнетропосферных ЗТ за счет экмановского трения. Для начальных длинноволновых распределений плавучести фронтального типа в работе построены асимптотические решения, описывающие трансформацию системы из двух противоположно направленных струйных течений, расположенных в верхней и нижней половине слоя. Показано, что за счет придонного трения осевая скорость нижнего течения падает до нуля, а скорость верхнего течения, постепенно охватывающего всю тропосферу, вырастает в два раза. Результирующее течение представляет собой прижатую к верхней границе струю, которую можно считать прототипом западного верхнетропосферного струйного течения. В заключительном разделе статьи исследованы структурные особенности такой струи в рамках полной негеострофической модели. Основные особенности связаны с горизонтальной асимметрией профиля скорости струи и формированием фронтов (поверхностей разрыва), примыкающих к верхней границе.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается слой стратифицированной, вращающейся атмосферы с постоянной частотой плавучести N и инерционной частотой f , заключенный между двумя твердыми горизонтальными границами $z = 0, H$ (подстилающей поверхностью и тропопаузой). В квазигеострофическом приближении движения слоя описываются уравнением переноса потенциальной завихренности (ПЗ) q . Безразмерная форма уравнения имеет вид [1–3]

$$q_t + [\psi, q] = 0, \quad q = \Delta\psi = \psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz}, \quad (1)$$

где ψ – квазигеострофическая функция тока, $[\psi, q] = \psi_x q_y - \psi_y q_x$ – двумерный якобиан. В качестве вертикального и горизонтального масштаба в уравнении (1) приняты H и $D = NH/f$ (радиус деформации Россби). Масштаб времени, функции тока и плавучести соответственно $T = D/U_0$, $\psi_0 = U_0 D$ и $\sigma_0 = U_0 N$, где U_0 – характерное значение скорости. Безразмерные горизонтальные компоненты скорости u, v и возмущение плавучести σ (потенциальной температуры) связаны с функцией тока соотношениями $u = -\psi_y, v = \psi_x,$

$\sigma = \psi_z$. Уравнение (1), справедливое при малых значениях числа Россби $Ro = U_0/fD$, рассматривается в слое $0 < z < 1$, оси x и y направлены на восток и север соответственно. Отметим, что для характерных параметров тропосферы средних широт $N = 10^{-2} \text{ с}^{-1}, f = 10^{-4} \text{ с}^{-1}, H = 10 \text{ км}, U_0 = 10 \text{ м/с},$ радиус деформации $D = 1000 \text{ км},$ адвективный временной масштаб $T = D/U_0 = 1.16 \text{ сут}, Ro = 0.1.$

Будем считать верхнюю границу свободной, а нижнюю границу совпадающей с верхней границей экмановского пограничного слоя (традиционно ее переносят на уровень $z = 0$). При этом к уравнению (1) присоединяются краевые условия

$$\begin{aligned} z = 0: \quad & \psi_{zt} + [\psi, \psi_z] + r(\psi_{xx} + \psi_{yy}) = 0, \\ z = 1: \quad & \psi_{zt} + [\psi, \psi_z] = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $r = E^{1/2}/2Ro$ – коэффициент придонного трения, $E = (h_E/H)^2$ – число Экмана, $h_E = (2\nu/f)^{1/2}$ – толщина экмановского пограничного слоя с эффективным коэффициентом турбулентной вязкости ν . В размерных переменных первое краевое условие (2) следует из равенства $w_g = w_E$, где $w_g = -(f/N^2)d(\psi_z)/dt$ – вертикальная скорость в квазигеострофическом приближении [2–4], $w_E = 0.5h_E\Delta_2\psi$ – значение вертикальной скорости (скорости экмановской подкачки) на верхней границе пограничного слоя. Подробный вывод условий (2) представлен в [2]. Отметим, что для приведенных значений параметров и $h_E = 0.5 \text{ км},$ коэффициент трения $r = 4$. В отсутствие трения, условия (2) есть уравнения переноса плавучести на горизонтальных границах.

Уравнению (1) удовлетворяют течения с ПЗ $q = 0$. Динамика этих течений, аналогичных потенциальным течениям в классической гидродинамике, описывается решением уравнения Лапласа

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz} = 0, \quad (3)$$

с нестационарными краевыми условиями (2). Уравнения (2), (3) представляют собой уравнения поверхностной геострофической модели [12], в которых дополнительно учтено придонное трение. Непосредственно из (2), (3) вытекает уравнение баланса полной энергии

$$E_t = -r(\psi_x^2 + \psi_y^2) \Big|_{z=0}, \quad E = \int_0^1 (\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2) dz, \quad (4)$$

отражающее диссипативный характер придонного трения.

Отметим, что для решений уравнения Лапласа (3) (гармонических функций) значения функции тока ψ на границах выражаются через граничные значения нормальных производных $\sigma = \psi_z$

(посредством нелокального оператора типа Гильберта). Формально математически, описание трехмерной динамики течений с ПЗ $q = 0$, таким образом, сводится к решению двумерных уравнений (2) на границах. Этим объясняется название поверхностная геострофическая модель (SQG model).

Далее будем рассматривать динамику зональных течений с функцией тока $\psi = \psi(y, z, t)$, не зависящей от продольной координаты x . Для таких течений двумерный якобиан в уравнениях (2) обращается в ноль и динамика описывается простыми линейными уравнениями

$$\Delta_2 \psi \equiv \psi_{yy} + \psi_{zz} = 0, \quad 0 < z < 1, \quad (5)$$

$$z = 0: \psi_{z1} + r\psi_{yy} = 0, \quad z = 1: \psi_{z1} = 0. \quad (6)$$

Распределения скорости и плавучести в зональных течениях связаны уравнением термического ветра $u_z = -\sigma_y$. В качестве начальных условий для уравнений (5), (6) считаем заданными распределения плавучести $\sigma = \psi_z$ на границах $z = 0, 1$ в момент времени $t = 0$. Ниже анализируются решения (5), (6) для различных типов этих распределений.

3. СЛУЧАЙ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Пространственно периодическое решение уравнения Лапласа (5), пропорциональное $\cos(lz)$, можно записать в виде

$$\psi = (a_2(t) \operatorname{ch}(lz) - a_1(t) \operatorname{ch} l(z-1)) \cos(lz) / l \operatorname{sh}(l). \quad (7)$$

Здесь $a_{1,2}(t)$ – постоянные интегрирования (амплитуды), зависящие от времени параметрически. Непосредственно из (7) следует

$$\psi_z|_{z=0} = a_1(t) \cos(lz), \quad \psi_z|_{z=1} = a_2(t) \cos(lz), \quad (8)$$

т.е. решение (7) отвечает начальным периодическим распределениям плавучести с амплитудами $a_{1,2}(0)$. Подстановка (7) в краевые условия (6) дает систему дифференциальных уравнений для амплитуд

$$a_{1t} - r\alpha(l)(a_2 \operatorname{ch}^{-1}(l) - a_1) = 0, \quad a_{2t} = 0, \quad (9)$$

где обозначено $\alpha(l) = l \operatorname{cth}(l)$. Отсюда $a_2(t) = a_2(0) = \text{const}$,

$$a_1(t) = a_2(0) \operatorname{cth}^{-1}(l) + (a_1(0) - a_2(0) \operatorname{cth}^{-1}(l)) \exp(-r\alpha(l)t). \quad (10)$$

Из (10) следует, что $a_1(t) \rightarrow \bar{a}_1 = a_2(0) \operatorname{ch}^{-1}(l)$ при $t \rightarrow \infty$. Соответственно, из (7) получим $\psi(y, z, t) \rightarrow \bar{\psi}(y, z)$, где

$$\bar{\psi}(y, z) = a_2(0) \operatorname{sh}(lz) \cos(lz) / l \operatorname{ch} l. \quad (11)$$

Таким образом, на больших временах устанавливается предельное периодическое течение с функцией тока (11) и распределениями скорости и плавучести

$$\begin{aligned} \bar{u}(y, z) &= \bar{U}(z) \sin(lz), \quad \bar{U}(z) = a_2(0) \operatorname{sh}(lz) / \operatorname{ch} l, \\ \bar{\sigma}(y, z) &= \bar{\Theta}(z) \cos(lz), \quad \bar{\Theta}(z) = a_2(0) \operatorname{ch}(lz) / \operatorname{ch} l. \end{aligned} \quad (12)$$

Важная особенность предельного течения состоит в том, что $\bar{u}(y, 0) = 0$, т.е. под влиянием экмановского трения устанавливается течение с нулевой скоростью на нижней границе. Скорость на верхней границе $\bar{u}(y, 1) = a_2(0) \operatorname{th}(l) \cos(lz)$ отлична от нуля. Обратим внимание, что распределения плавучести и скорости в предельном течении сдвинуты по фазе на $\pi/2$.

Общее нестационарное решение для поля скорости можно записать в виде

$$\begin{aligned} u(y, z, t) &= U(z, t) \sin(lz), \\ U(z, t) &= (a_2(0) \operatorname{ch}(lz) - a_1(t) \operatorname{ch} l(z-1)) / \operatorname{sh} l, \end{aligned} \quad (13)$$

где $a_1(t)$ определено выражением (10) и функция $U(z, t)$ описывает вертикальный профиль скорости в фиксированный момент времени. В анализе (13) рассмотрим случай равных граничных амплитуд плавучести $a_1(0) = a_2(0) = a$. Соответствующий начальный профиль скорости

$$U(z, 0) = a \operatorname{sh}(l(z-0.5)) / \operatorname{ch}(0.5l) \quad (14)$$

отвечает разнонаправленному течению со сменой знака на уровне $z = 0.5$ (середина слоя). Скорости на верхней и нижней границах соответственно равны $U(1, 0) = a \operatorname{th}(l/2)$, $U(0, 0) = -U(1, 0)$. С учетом (10), из (13) следует, что за счет трения скорость на нижней границе $U(0, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ (рис. 1). Скорость на верхней границе растет, достигая, согласно (12), предельного значения $U(1, \infty) = a \operatorname{th}(l)$. Таким образом, можно записать

$$\bar{U}(1) = U(1, \infty) = U(1, 0) (1 + \operatorname{ch}^{-1}(l)).$$

Для длинноволновых возмущений ($l \rightarrow 0$) финальная скорость на верхней границе $U(1, \infty) \sim 2U(1, 0)$ практически в два раза превышает начальную скорость. Экмановское трение, таким образом, приводит к интенсификации течений на верхнем уровне.

В произвольный момент времени смена знака профиля скорости (13) происходит на уровне $z = z_*(t)$, где $U(z_*, t) = 0$. В случае равных амплитуд $a_1(0) = a_2(0)$ этот уровень находится из уравнения

$$\operatorname{th}(lz_*) = \operatorname{ch}(l) \left(\frac{\operatorname{ch}(l) - 1}{e^{\alpha(l)rt} + \operatorname{ch}(l) - 1} \right).$$

При $l \rightarrow 0$ отсюда асимптотически следует $z = z_*(t) = (1/2)e^{-rt}$. С течением времени $z_*(t) \rightarrow 0$, т.е. под действием трения начальное разнона-

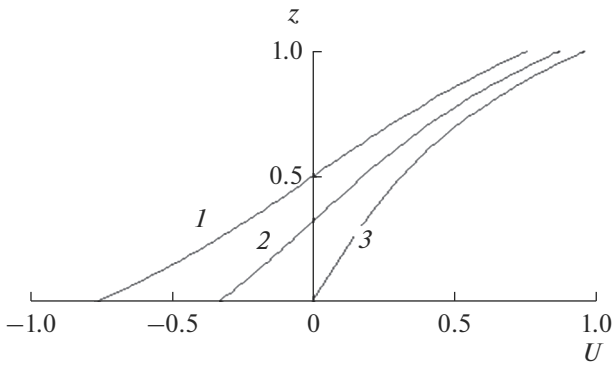


Рис. 1. Вертикальные профили скорости $U(z,t)$ в моменты времени $t = 0$ (1), $t = 0.1$ (2), $t = 1$ (3) для значения $l = 2$.

правленное течение трансформируется в однонаправленное течение с максимумом скорости у верхней границы.

Остановимся кратко на анализе профиля скорости в случае произвольных начальных значений амплитуд $a_1(0), a_2(0)$. С использованием (13) эти амплитуды можно выразить через начальные значения скорости на границах

$$\begin{aligned} a_1(0) &= (U(1,0) - U(0,0) \operatorname{ch} l) / \operatorname{sh} l, \\ a_2(0) &= (U(1,0) \operatorname{ch} l - U(0,0)) / \operatorname{sh} l. \end{aligned}$$

Для предельной скорости на верхней границе $U(1, \infty) = a_2(0) \operatorname{th}(l)$ отсюда следует

$$\begin{aligned} U(1, \infty) &= U(1,0) (1 + m \operatorname{ch}^{-1}(l)), \\ m &= -U(0,0) / U(1,0). \end{aligned} \quad (15)$$

Согласно (15), для разнонаправленных в начальный момент времени течений ($m > 0$) предельная скорость на верхней границе всегда превосходит начальную скорость, причем значение коэффициента усиления (выражение в круглых скобках) определяется начальным значением скорости $U(0,0)$ на нижней границе (и может быть очень большим). Как и ранее, с течением времени скорость на нижней границе стремится к нулю и на больших временах формируется однонаправленное предельное течение.

Аналогичным образом исследуется вертикальный профиль плавучести

$$\begin{aligned} \sigma(y, z, t) &= \Theta(z, t) \cos(ly), \\ \Theta(z, t) &= (a_2(0) \operatorname{sh}(lz) - a_1(t) \operatorname{sh} l(z-1)) / \operatorname{sh} l. \end{aligned}$$

В случае равных граничных амплитуд начальному моменту времени отвечает распределение, симметричное относительно середины слоя $\Theta(z, 0) = a \operatorname{ch}(l(z-0.5)) / \operatorname{ch}(0.5l)$ с граничными значениями $\Theta(1, 0) = \Theta(0, 0) = a$ и значением $\Theta(0.5, 0) = a / \operatorname{ch}(0.5l)$. С течением времени плавучесть на

нижней границе уменьшается до значения $\Theta(0, \infty) = a / \operatorname{ch}(l)$, а плавучесть на верхней границе не меняется. Таким образом, формируется монотонно растущий предельный вертикальный профиль плавучести (12). Отметим, что в предельном состоянии плавучесть на нижней границе отлична от нуля, в отличие от функции тока (возмущения давления), которая пропорциональна полю скорости.

Используя решение (7), можно найти также распределение вертикальной компоненты скорости. В качестве масштаба этой компоненты в квазигеострофической теории традиционно принимается $W_0 = \operatorname{Ro}(HU_0/D)$ [2–4]. При этом для зональных течений безразмерная компонента $w = w_g = -\psi_z$. С учетом (7) в случае равных амплитуд получим

$$w = W(z, t) \cos(ly),$$

$$W(z, t) = arl(1 + \operatorname{ch} l)^{-1} e^{-r\alpha(l)t} \operatorname{sh} l(z-1).$$

Максимум $W(z, t)$, достигаемый на нижней границе $z = 0$, представляет собой скорость экмановской подкачки. На верхней границе $W = 0$. По мере установления предельного течения $W(z, t) \rightarrow 0$.

Отметим, что под действием экмановского трения движения однородной (нестратифицированной) вращающейся жидкости всегда затухают. Соответствующий процесс затухания исследовался в многочисленных работах [5, 15, 16] и получил специальное название – спиндаун. Как показано выше, для стратифицированной жидкости со свободной верхней границей спиндаун заменяется процессом установления стационарного предельного течения с нулевой скоростью на нижней границе.

Приведем численную оценку характерного времени T_E установления предельного течения. Согласно (7), (10) для периодических течений в качестве этого времени можно взять $T_E = (r\alpha(l))^{-1}$ или, в размерных переменных,

$$T_E = (2H/h_E) \alpha^{-1}(l) f^{-1}, \quad \alpha(l) = Dl \operatorname{cth}(Dl), \quad (16)$$

где $D = NH/f$, l – размерное волновое число. Здесь учтены принятые ранее масштабы для времени и координат. С учетом $\alpha(l) \rightarrow 1$ при $l \rightarrow 0$, масштаб T_E принимает максимальное значение при $l = 0$ (в пределе длинных волн) $T_{E \max} = (2H/h_E) f^{-1}$. Для приведенных выше значений параметров ($H = 10$ км, $h_E = 0.5$ км, $f = 10^{-4} \text{ с}^{-1}$), получим $T_{E \max} = 4.63$ сут. Данный масштаб лишь в 4 раза превышает адвективный временной масштаб $T = D/U_0$.

Завершая данный раздел, отметим возможность простого анализа динамики зональных те-

чений с ПЗ $\neq 0$. Действительно, для таких течений из (1) следует $q_t = 0$, откуда $q = \Delta_2 \psi = q_i(y, z)$, где $q_i(y, z)$ – начальное распределение q . Решение последнего уравнения можно представить суммой поверхностного и вихревого компонентов $\psi = \psi^{(s)}(y, z, t) + \psi^{(v)}(y, z)$. Здесь компонент $\psi^{(s)}$ удовлетворяет уравнению Лапласа (5) с условиями (6). Периодические решения даются выражением (7). Вихревой компонент удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta_2 \psi = q_i$ с условиями $\psi^{(v)} = 0$ и $\psi_z^{(v)} = 0$ соответственно при $z = 0$ и $z = 1$. Если $q_i(y, z) = F(z) \cos(\lambda y)$ вихревой компонент

$$\psi^{(v)} = \cos(\lambda y) \int_0^1 G(z, \xi) F(\xi) d\xi,$$

$$G(z, \xi) = \frac{-1}{l \operatorname{ch} l} \begin{cases} \operatorname{sh}(l z) \operatorname{ch} l(\xi - 1), & 0 < z < \xi, \\ \operatorname{sh}(l \xi) \operatorname{ch} l(z - 1), & \xi < z < 1, \end{cases}$$

где $G(z, \xi)$ – функция Грина уравнения $d^2 \phi / d^2 z - l^2 \phi = F(z)$ с приведенными условиями. Таким образом, учет ненулевого распределения ПЗ сводится к добавлению к полученному нестационарному решению (7) стационарной вихревой части. Всюду далее будут рассматриваться только течения с нулевым распределением ПЗ.

4. ПРЕДЕЛЬНОЕ ТЕЧЕНИЕ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛАВУЧЕСТИ ФРОНТАЛЬНОГО ТИПА

В случае произвольных начальных распределений плавучести под действием придонного трения устанавливается предельное течение с нулевой скоростью на подстилающей поверхности. В силу условий (6) функция тока $\psi(y, z)$ предельного течения находится из решения смешанной краевой задачи для двумерного уравнения Лапласа в полосе $0 < z < 1$

$$\psi_{yy} + \psi_{zz} = 0, \quad \psi(y, 0) = 0, \quad \psi_z(y, 1) = \sigma(y), \quad (17)$$

где $\sigma(y)$ – заданное в начальный момент времени распределение плавучести (потенциальной температуры) на верхней границе. Именно это распределение определяет структуру предельного течения. Далее будем рассматривать распределение температуры фронтального типа $\sigma(y) = -a \operatorname{th}(\lambda y)$, моделирующее гладкую переходную зону от высоких температур на юге к низким температурам на севере. Здесь a – заданный перепад температур, λ^{-1} – безразмерная ширина переходной зоны.

Краевую задачу (17) удобно переформулировать в терминах скорости $u = -\psi_y$:

$$\begin{aligned} u_{yy} + u_{zz} &= 0, & u(y, 0) &= 0, \\ u_z(y, 1) &= -\sigma'(y) = a \lambda / \operatorname{ch}^2(\lambda y). \end{aligned} \quad (18)$$

Для решения этой задачи можно использовать два подхода. Первый подход состоит в использовании интегрального представления решения – свертки заданных граничных распределений с функцией Грина [17]. Вторым подходом является использование преобразования Фурье по горизонтальной координате с последующим его обращением. В терминах элементарных функций обратное преобразование Фурье (как и интегральное представление) выражается в случае $\lambda = \pi/2$, т.е. ситуации, когда ширина переходной зоны порядка две трети от радиуса деформации Россби. Для данного значения λ решение задачи (18) и соответствующее распределение плавучести (находится из уравнения термического ветра $u_z = -\sigma_y$)

$$\begin{aligned} u(y, z) &= \frac{a \sin(\pi z/2)}{\operatorname{ch}(\pi y/2) + \cos(\pi z/2)}, \\ \sigma(y, z) &= -\frac{a \operatorname{sh}(\pi y/2)}{\operatorname{ch}(\pi y/2) + \cos(\pi z/2)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Распределением (19) отвечает функция тока предельного течения (возмущение давления)

$$\psi = -\frac{4a}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{1 - \cos(\pi z/2)}{\sin(\pi z/2)} \operatorname{th}(\pi y/4) \right), \quad (20)$$

которая находится из геострофического соотношения $u = -\psi_y$.

Согласно (19) в предельном течении скорость на нижней границе $u(y, 0) = 0$, в то время как на верхней границе $u(y, 1) = a / \operatorname{ch}(\pi y/2)$. Последнее распределение отвечает локализованному струйному течению. Теневая картина изолиний поля скорости предельного течения представлена на рис. 2. Как следует из рисунка, в случае фронтального распределения температуры за счет придонного трения формируется струйное течение, прижатое к верхней границе. Данное течение можно считать аналогом верхнетропосферного струйного течения в атмосфере Земли.

Простые асимптотические выражения для предельного течения можно получить в случае медленно меняющихся по координате y распределений плавучести на верхней границе $\psi_z|_{z=1} = \sigma(\epsilon y)$, где $\epsilon \ll 1$. Переходя к медленной переменной $\xi = \epsilon y$, для функции тока из (17) получим уравнение

$$\psi_{zz} + \epsilon^2 \psi_{\xi\xi} = 0, \quad (21)$$

с краевыми условиями $\psi(\xi, 0) = 0$, $\psi_z(\xi, 1) = \sigma(\xi)$. Решение представляется в форме асимптотического разложения

$$\psi = \psi^{(0)} + \epsilon^2 \psi^{(1)} + \dots \quad (22)$$

Для нулевого приближения получим уравнение $\psi_{zz}^{(0)} = 0$ с приведенными выше краевыми услови-

ями. Ограничиваясь только этим приближением, для предельного течения найдем

$$\begin{aligned} \psi &= \psi^{(0)} = \sigma(\xi)z, \quad u = -\varepsilon\psi_\xi = -\varepsilon z\sigma_\xi, \\ \sigma &= \psi_z = \sigma(\xi). \end{aligned} \quad (23)$$

В частности, для распределения фронтального типа $\sigma(\xi) = -a \operatorname{th}(\lambda\xi)$ скорость течения $u = a\lambda\varepsilon z / \operatorname{ch}^2(\lambda\xi)$. Согласно последнему выражению скорость линейно растет с высотой. На верхней границе профиль скорости отвечает так называемой струе Бикли. Теневая картина изолиний поля скорости на плоскости (ξ, z) аналогична картине, представленной на рис. 2.

В следующем разделе исследуется нестационарный процесс установления предельного течения.

5. УСТАНОВЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ

В рамках длинноволнового приближения можно получить асимптотические решения, описывающие процесс установления предельного течения. Эти решения удовлетворяют уравнению (21) с вытекающими из (6) нестационарными краевыми условиями

$$\begin{aligned} z = 0: \quad \psi_{zt} + \varepsilon^2 r \psi_{\xi\xi} &= 0, \\ z = 1: \quad \psi_{zt} &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Поскольку в условия (24) входят распределения ψ, ψ_z , для построения нестационарных решений нужны формулы, связывающие распределения функции тока и ее нормальной производной на границах полосы. Для получения этих формул, рассмотрим вспомогательную задачу, состоящую в решении уравнения (21) с краевыми условиями

$$\psi(\xi, 0) = \varphi(\xi, t), \quad \psi_z(\xi, 1) = \theta(\xi, t) \quad (25)$$

(зависимость от времени параметрическая). Решение вспомогательной задачи ищется в форме асимптотического разложения (22). Нулевое приближение удовлетворяет уравнению $\psi_{zz}^{(0)} = 0$ с краевыми условиями условиям (25). Отсюда $\psi^{(0)} = \theta(\xi, t)z + \varphi(\xi, t)$.

Первое приближение удовлетворяет уравнению $\psi_{zz}^{(1)} = -\psi_{\xi\xi}^{(0)} = -z\theta_{\xi\xi} - \varphi_{\xi\xi}$ с условиями $\psi^{(1)} = 0$ и $\psi_z^{(1)} = 0$ соответственно при $z = 0$ и $z = 1$. Отсюда, прямым интегрированием, находится $\psi^{(1)}$. Ограничиваясь двумя первыми приближениями, для функции тока и ее производной, таким образом, найдем

$$\begin{aligned} \psi &= \theta z + \varphi + \\ &+ \varepsilon^2 \left(\left(\frac{z}{2} - \frac{z^3}{6} \right) \theta_{\xi\xi} + \left(z - \frac{z^2}{2} \right) \varphi_{\xi\xi} \right), \\ \psi_z &= \theta + \varepsilon^2 \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{z^2}{2} \right) \theta_{\xi\xi} + (1 - z) \varphi_{\xi\xi} \right). \end{aligned} \quad (26)$$

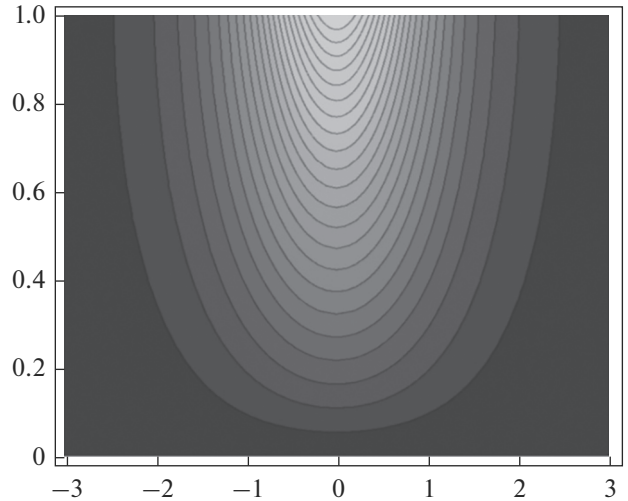


Рис. 2. Теневая картина изолиний поля скорости (19) в плоскости (y, z) .

Полагая в (26) $z = 0, 1$, окончательно получим формулы

$$\begin{aligned} \psi|_{z=1} &= \theta + \varphi + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{3} \theta_{\xi\xi} + \frac{1}{2} \varphi_{\xi\xi} \right), \\ \psi_z|_{z=0} &= \theta + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} \theta_{\xi\xi} + \varphi_{\xi\xi} \right), \end{aligned} \quad (27)$$

связывающие граничные значения $\psi|_{z=1}, \psi_z|_{z=0}$ с граничными значениями $\psi|_{z=0} = \varphi, \psi_z|_{z=1} = \theta$.

С использованием формул (25), (27) краевые условия (24) сводятся к простым уравнениям относительно граничных функций $\theta(\xi, t), \varphi(\xi, t)$. Действительно, с учетом (25) второе краевое условие (21) дает $\theta_t = 0$, т.е. $\theta = \theta(\xi, 0)$. При этом из второй формулы (24) следует $\psi_{zt}|_{z=0} = \varepsilon^2 \varphi_{\xi\xi}$. Подставляя это выражение в первое краевое условие (24) и учитывая (25), после понижения порядка получим уравнение $\varphi_t + r\varphi = 0$. Отсюда

$$\varphi(\xi, t) = \varphi(\xi, 0) \exp(-rt). \quad (28)$$

Выражения (26), где $\theta = \theta(\xi, 0)$ и $\varphi(\xi, t)$ определено (28), таким образом, дают нестационарное (асимптотическое) решение, отвечающее заданным начальным распределениям $\theta(\xi, 0), \varphi(\xi, 0)$.

В качестве примера рассмотрим случай начальных распределений $\theta(\xi, 0) = -a \operatorname{th}(\lambda\xi), \varphi(\xi, 0) = (1/2)a \operatorname{th}(\lambda\xi)$. Если ограничиться в (26) только первым приближением, то функция тока $\psi = \theta(\xi, t)z + \varphi(\xi, t)$ или $\psi = a \operatorname{th}(\lambda\xi) \left(\frac{1}{2} e^{-rt} - z \right)$. Соответственно, распределение скорости

$$u = -\varepsilon\psi_\xi = a\varepsilon\lambda \left(z - \frac{1}{2} e^{-rt} \right) / \operatorname{ch}^2(\lambda\xi). \quad (29)$$

Теневые картины изолиний поля скорости $u = u(\xi, z, t)$ (29) приведены на рис. 3 (для трех моментов времени). В начальный момент времени в

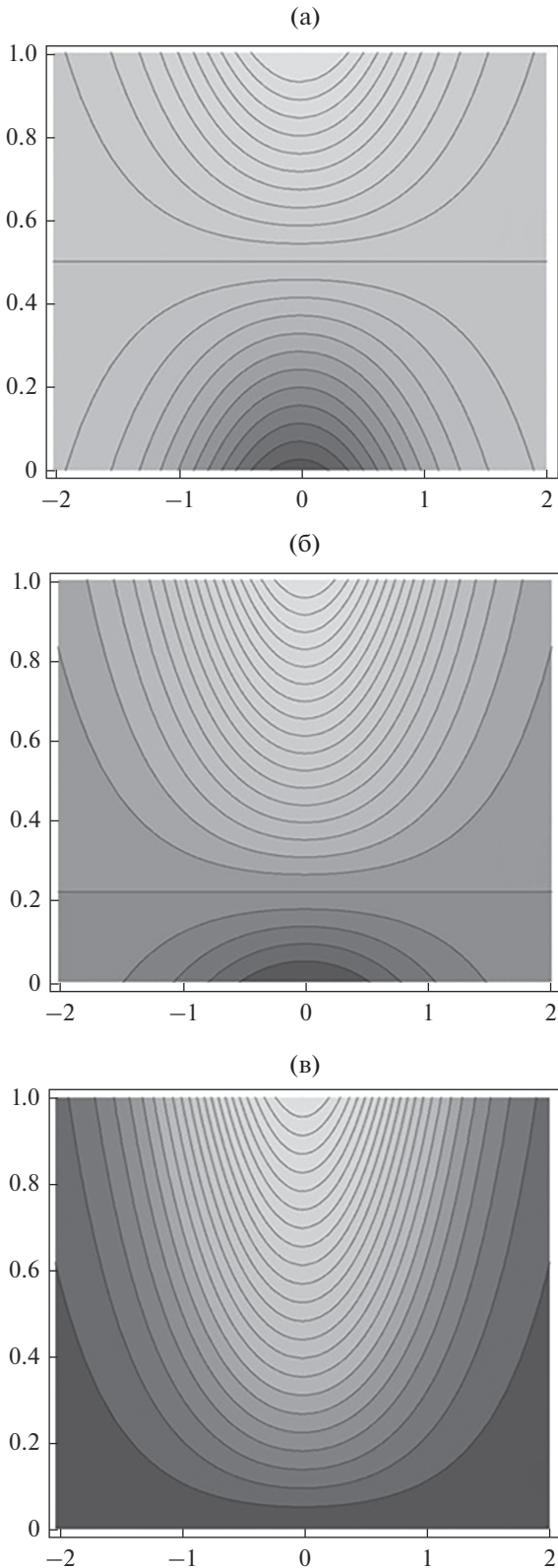


Рис. 3. Теневые картины изолиний поля скорости (29) в плоскости (ξ, z) для трех моментов времени $t = 0$ (а), $t = 0.2$ (б), $t = 1$ (в).

верхней половине слоя атмосферы имеется симметричная струя, направленная на восток, в нижней половине слоя – струя, направленная на запад. Максимальные осевые скорости течений $u_{\max} = a\epsilon\lambda/2$ (по модулю) достигаются на верхней и нижней границах. За счет придонного трения, с течением времени осевая скорость нижнего течения падает до нуля, а скорость верхнего течения, постепенно охватывающего всю тропосферу, вырастает в два раза. Согласно (29), смена направления течений происходит на уровне $z = z_*(t) = (1/2)e^{-rt}$, т.е. $z_*(0) = 1/2$ и $z_* \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, на больших временах формируется предельное верхнетропосферное струйное течение со скоростью $u = a\epsilon\lambda z / \text{ch}^2(\lambda\xi)$, направленной на восток (западное течение).

Аналогично, с использованием решения (26), можно построить картины поля плавучести $\sigma = \psi_z$ и поля вертикальной компоненты скорости $w = -\psi_{z\xi}$. Отметим, что распределение $w = -ra(\epsilon\lambda)^2(1-z)(\text{sh}(\lambda\xi)/\text{ch}^3(\lambda\xi))e^{-rt}$ несимметрично относительно оси симметрии верхнего струйного течения (в процессе его установления). В северной части струи ($\xi > 0$) имеют место опускание воздуха, в южной части струи ($\xi < 0$) – подъем.

6. ДВОЙНОЙ ЭКМАНОВСКИЙ СЛОЙ

В геофизической гидродинамике часто рассматривают ситуации, когда на верхней (частично свободной) границе слоя атмосферы также имеется пограничный слой, однако с другим коэффициентом трения [7]. В рамках SQG модели двумерные движения слоя (зональные течения) описывается уравнением Лапласа (5) с граничными условиями

$$\begin{aligned} z = 0: \quad \psi_{z\xi} + r_1\psi_{yy} &= 0, \\ z = 1: \quad \psi_{z\xi} - r_2\psi_{yy} &= 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Здесь r_1, r_2 – коэффициенты трения соответственно на нижней и верхней границах. Отрицательный знак во втором условии учитывает, что скорость экмановской подкачки на верхней границе направлена внутрь слоя.

Рассмотрим вначале случай пространственно периодических решений задачи (5), (30), которые представляются в форме (7). Подстановка (7) в условия (30) дает линейную систему

$$\begin{aligned} a_{1r} - r_1\alpha(l)(a_2 \text{ch}^{-1}(l) - a_1) &= 0, \\ a_{2r} + r_2\alpha(l)(a_2 - a_1 \text{ch}^{-1}(l)) &= 0, \end{aligned} \tag{31}$$

относительно амплитуд $a_{1,2}(t)$. Здесь $\alpha(l) = l\text{cth}l$. Обозначая $\delta = r_2/r_1$, $m = 1/\text{ch}(l)$ и переходя к нор-

мированному времени $\tau = \alpha(l)r_2 t$, систему (31) можно записать в виде

$$\delta a_{1\tau} - ma_2 + a_1 = 0, \quad a_{2\tau} + a_2 - ma_1 = 0. \quad (32)$$

Общее решение (32) есть линейная комбинация экспонент $e^{s_{1,2}\tau}$, удовлетворяющая заданным начальным условиям $a_1(0), a_2(0)$. Здесь $s_{1,2}$ – собственные значения матрицы системы,

$$s_{1,2} = (2\delta)^{-1} \left(-(1 + \delta) \pm \sqrt{(1 + \delta)^2 - 4\delta \operatorname{th}^2(l)} \right), \quad (33)$$

с асимптотиками: $s_1 \sim -\delta^{-1}, s_2 \sim -\operatorname{th}^2(l)$ при $\delta \ll 1, s_1 \sim -(\delta^{-1} + \delta), s_2 \sim -l^2/(1 + \delta)$ при $l \ll 1$. В силу отрицательности $s_{1,2}$ все периодические решения затухают.

Для значений $\delta \ll 1$, когда коэффициент трения на нижней границе много больше коэффициента трения на верхней границе, система (32) представляет собой классическую сингулярно возмущенную систему и для ее решения можно использовать стандартные асимптотические подходы (не привлекая точное решение). Асимптотическое решение имеет вид

$$a_2(\tau) = a_2(0)e^{-n\tau}, \quad a_1(\tau) = ma_2(0)e^{-n\tau} + (a_1(0) - ma_2(0))e^{-\tau/\delta}, \quad (34)$$

где обозначено $n = 1 - m^2 = \operatorname{th}^2(l)$. Второе слагаемое в выражении для $a_1(\tau)$ представляет собой погранслойную функцию, которая нужна для удовлетворения начальному условию $a_1 = a_1(0)$ при $\tau = 0$. Если пренебречь этим слагаемым, то получим регулярную часть асимптотики, которая находится, если, с учетом $\delta \ll 1$, первое уравнение системы (32) заменить уравнением $a_1 = ma_2$.

Решению (34) отвечает поле скорости $u(y, z, \tau) = U(z, \tau) \sin(ly)$, где $U(z, \tau)$ дается выражением (13), в котором $a_1(t), a_2(0)$ следует заменить на $a_1(\tau), a_2(\tau)$. В частности, на горизонтальных границах

$$U(0, \tau) = \operatorname{cth}(l)(ma_2(\tau) - a_1(\tau)), \quad U(l, \tau) = \operatorname{cth}(l)(a_2(\tau) - ma_1(\tau)). \quad (35)$$

Непосредственно из (34), (35) следует, что эволюция вертикального профиля скорости связана с двумя временными масштабами. На быстром временном масштабе $\tau_1 = \delta$, т.е. (в размерных переменных) масштабе T_E , за счет трения о нижнюю границу формируется однонаправленное течение с нулевой скоростью при $z = 0$. Далее, под действием трения о верхнюю границу, это течение медленно затухает на временном масштабе $\tau_2 = n^{-1} \gg \delta$. Это прямо следует из асимптотик $U(0, \tau) = 0, U(l, \tau) = \operatorname{th}(l)a_2(0)e^{-n\tau}$ при $\tau \gg \delta$. Отметим, что $\tau_2 = \operatorname{th}^{-2}(l) \rightarrow \infty$ при $l \rightarrow 0$, т.е. в случае

длинноволновых возмущений затухание практически отсутствует.

Аналогично предыдущему разделу, можно построить асимптотическую теорию, описывающую эволюцию длинноволновых движений, зависящих от координаты $\xi = \epsilon y$. Эта эволюция описывается решением уравнения (21) с вытекающими из (30) краевыми условиями

$$z = 0: \quad \Psi_{z\xi} + \epsilon^2 r_1 \Psi_{\xi\xi} = 0, \quad z = 1: \quad \Psi_{z\xi} - \epsilon^2 r_2 \Psi_{\xi\xi} = 0. \quad (36)$$

Асимптотическое решение уравнения (21), удовлетворяющее вспомогательным условиям (25), дается выражением (26), содержащим неизвестные функции $\theta(\xi, t), \varphi(\xi, t)$. Подстановка (26) в краевые условия (36), с учетом формул (27), приводит к системе уравнений для нахождения этих функций

$$\varphi_t + (r_1 + r_2)\varphi + r_2\theta = 0, \quad \theta_t - \epsilon^2 r_2 (\theta_{\xi\xi} + \varphi_{\xi\xi}) = 0. \quad (37)$$

Поскольку $\epsilon \ll 1$, из второго уравнения асимптотически следует $\theta_t = 0$, т.е. $\theta = \theta(\xi, 0)$. При этом, в случае $r_1 \gg r_2$, первое уравнение сводится к ранее полученному уравнению $\varphi_t + r_1\varphi = 0$. Таким образом, в этом случае на процесс затухания длинноволновых движений верхний пограничный слой практически не оказывает влияния.

Отметим, что система (33) сводится к одному уравнению второго порядка

$$\varphi_{tt} + (r_1 + r_2)\varphi_t - r_2\epsilon^2(\varphi_{i\xi\xi} + r_1\varphi_{\xi\xi}) = 0. \quad (38)$$

Легко проверяется, что данное уравнение имеет пространственно периодические решения $\varphi \sim e^{s\tau} e^{ik\xi}$, $\tau = r_2 t$, где значения s даются выражением (33) с учетом $\operatorname{th}(l) \sim l = \epsilon k$.

7. ПРЕДЕЛЬНОЕ ТЕЧЕНИЕ В НЕГЕОСТРОФИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Построенное в разделе 4 стационарное решение (19) отвечает геострофическому течению с нулевой потенциальной завихренностью. В данном разделе построен аналог этого решения в рамках полной (точной) негеострофической модели. Как и решение (19), точное решение описывает верхнетропосферную струю, скорость которой обращается в ноль на нижней границе. Принципиально новые особенности связаны с горизонтальной асимметрией струи и формированием разрывов (фронтов) для достаточно больших амплитуд распределений плавучести. Анализ этих особенностей следует работам автора [18, 19], посвященным нелинейной теории геострофического приоблачения.

В негеострофической модели рассматривается полная система уравнений динамики стратифицированной вращающейся жидкости, записанная в приближении Буссинеска [1, 3, 19]. Из этой системы следует лагранжев закон сохранения потенциальной завихренности

$$d\Omega/dt = 0, \quad \Omega = (\text{rot} \mathbf{u} + f\mathbf{k}, \nabla\sigma), \quad (39)$$

где \mathbf{u} – вектор скорости с компонентами u, v, w вдоль осей x, y, z соответственно, σ – плавучесть, \mathbf{k} – вертикальный орт, d/dt – оператор полной производной [1, 3].

Для движений, не зависящих от зональной координаты x (двумерных или зональных движений), выражение для Ω можно представить в виде

$$\Omega = f[m, \sigma], \quad m = y - f^{-1}u, \quad (40)$$

где m – так называемый геострофический момент и квадратными скобками обозначен якобиан по переменным y, z . В случае стационарных движений, распределения m, σ связаны соотношением $f m_z = \sigma_y$, следующим из уравнения термического ветра.

Будем рассматривать стационарные двумерные движения с $\Omega = \text{const}$ и удовлетворяющие условиям $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}$, $\sigma \rightarrow N^2 z$ при $|y| \rightarrow \infty$. При этом $\Omega = fN^2$. Примем в качестве масштабов z, y, m, σ соответственно $H, D, D, N^2 H$, где $D = NH/f$ (радиус деформации), H толщина слоя атмосферы. Тогда, для определения двумерных движений с однородно распределенной ПЗ получим замкнутую систему нелинейных уравнений

$$m_z = \sigma_y, \quad [m, \sigma] \equiv \frac{\partial(m, \sigma)}{\partial(y, z)} = 1. \quad (41)$$

Если в качестве масштаба скорости u принять $U_0 = Df$, то $m = y - u$.

Переходом от независимых переменных y, z к переменным m, z (аналог преобразования Лежандра) нелинейная система (41) сводится к линейной системе Коши–Римана $\sigma_z = y_m$, $\sigma_m = -y_z$. Из этой системы следует, что y, σ являются гармоническими функциями переменных m, z : $y_{zz} + y_{mm} = 0$, $\sigma_{zz} + \sigma_{mm} = 0$. С учетом $y = m + u$, скорость $u = u(m, z)$ также является гармонической функцией. Для однозначного определения этой функции будем считать, что на нижней границе скорость обращается в ноль (за счет действия экмановского трения). Кроме того, будем считать, что на верхней границе задано распределение плавучести $\sigma = \sigma(m)$. Тогда, с учетом уравнения термического ветра, для определения скорости получим смешанную краевую задачу

$$u_{zz} + u_{mm} = 0, \quad u(m, 0) = 0, \quad u_z(m, 1) = -\sigma'(m), \quad (42)$$

аналогичную задаче (18). В случае распределения $\sigma(m) = -a \text{th}(\pi m/2)$ решение имеет вид

$$u = u(m, z) = \frac{a \sin(\pi z/2)}{\text{ch}(\pi m/2) + \cos(\pi z/2)}. \quad (43)$$

Для перехода на плоскость физических переменных (y, z) к решению (43) нужно добавить соотношение $y = m + u(m, z)$. При фиксированном значении z , выражения $u = u(m, z)$, $y = m + u(m, z)$ дают параметрическое (с параметром m) представление функции $u = u(y)$. Формально математически геострофическому решению (19) отвечает предельный случай малых амплитуд $a \ll 1$, когда $y \sim m$. Отметим, что полагая в правой части (43) $m = y - u$, получим уравнение, определяющее функцию $u = u(m, z)$ в неявном виде.

Важная особенность нелинейного решения связана с формированием разрывов. В качестве примера рассмотрим распределение скорости на верхней границе, которое описывается параметрическими соотношениями

$$u = a/\text{ch}(\pi m/2), \quad y = m + a/\text{ch}(\pi m/2). \quad (44)$$

Изображая отвечающие (44) зависимости $u = u(y)$ для последовательно возрастающих значений a (рис. 4), можно установить, что при некоторой критической амплитуде $a = a_{cr}$ в распределении $u = u(y)$ формируется разрыв, расположенный при $y = y_{cr}$. Возникновение разрыва связано с появлением точки перегиба m_{cr} с горизонтальной касательной на графике функции $y = y(m)$. В этой точке выполняются условия $y_m = y_{mm} = 0$. Из второго условия следует $\text{ch}(\pi m_{cr}) = 3$ или $m_{cr} = \pi^{-1} \ln(3 + 2\sqrt{2}) = 0.561$. Из первого условия находится критическая амплитуда $a_{cr} = 4/\pi = 1.273$. Сам разрыв формируется в точке $y_{cr} = m_{cr} + a_{cr}/\text{ch}(\pi m_{cr}/2) = 1.834$. Аналогичным образом находятся критические значения параметров для каждого уровня z . Можно показать, что с ростом амплитуды разрывы впервые возникают на верхней границе (тропопаузе).

Картина изолиний поля скорости $u = u(m, z)$ для критической амплитуды $a = a_{cr}$ приведена на рис. 5. Точка сгущения изолиний на рисунке отмечает положение формирующегося разрыва. Представленная картина описывает нелинейный аналог верхнетропосферного струйного течения. Обратим внимание на горизонтальную асимметрию профиля скорости струи – на каждом уровне сдвиг скорости в северной (циклонической) части струи больше чем сдвиг скорости в южной части. Данная особенность, хорошо выражена в данных наблюдений, анализировалась в работах [10, 11].

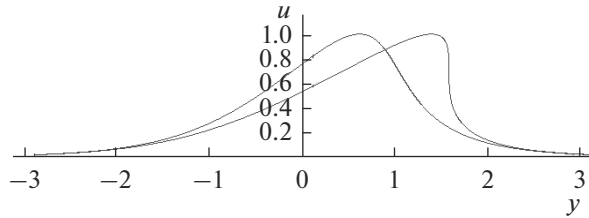


Рис. 4. Горизонтальные профили скорости (44) на верхней границе для значений амплитуд $a = 0.5$ и $a = a_{cr} = 4/\pi$.

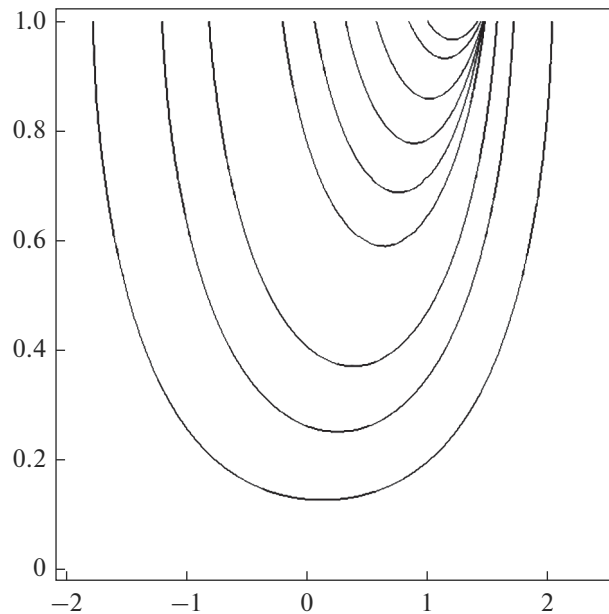


Рис. 5. Изолинии поля $\bar{u} = u/a$ (43) в плоскости (y, z) для значений $0 < \bar{u} < 1$ с шагом 0.1.

Завершим данный раздел двумя замечаниями. Первое замечание касается закона сохранения ПЗ в квазигеострофической теории. Выражение для Ω (39) можно записать в виде $\Omega = [\sigma, u] + f\sigma_z$. Полагая $\sigma = N^2z + \sigma'$ и используя квазигеострофические соотношения $fu = -\psi_y$, $\sigma' = \psi_z$, это выражение преобразуется к виду $\Omega = N^2f + N^2f^{-1}(\psi_{yy} + (N^2/f^2)\psi_{zz}) + u_z\sigma'_z$. В квазигеострофической теории пренебрегают последним слагаемым и в качестве сохраняющейся величины берут отклонение от постоянного значения $\Omega_g = q = \psi_{yy} + (N^2/f^2)\psi_{zz}$ или, в безразмерных переменных, $q = \psi_{yy} + \psi_{zz}$. Квазигеострофическое течение с нулевой ПЗ $\Omega_g = 0$, таким образом, отвечает негеострофическому течению с однородно распределенной ПЗ.

Второе замечание касается многозначного решения (43) для закритических значений амплитуд $a > a_{cr}$. Как и в теории нелинейного геострофического приспособления многозначное решение пре-

образуется в однозначное путем построения поверхности разрыва $y = y_f(z)$. Это осуществляется с использованием непрерывной части решения (43) и “физического” условия непрерывности давления при переходе через разрыв. В терминах σ, m последнее условие дается известной формулой Маргулеса $dy_f/dz = -(\sigma_2 - \sigma_1)/(m_2 - m_1)$, где $\sigma_{1,2}, m_{1,2}$ — значения переменных по разные стороны от разрыва. Детальное описание алгоритма построения поверхностей разрыва для течений с однородным распределением ПЗ дано в [19]. Использование этого алгоритма показывает, что для струйного течения (43) на небольших расстояниях от верхней границы поверхность разрыва $y = y_f(z)$ представляет собой участок прямой с тангенсом угла наклона к горизонтали порядка H/D .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках квазигеострофической модели атмосферы с двумя горизонтальными границами (подстилающей поверхностью и тропопаузой) исследовано влияние трения о подстилающую

поверхность (экмановского трения) на динамику зональных течений. Предполагается, что течения имеют нулевую ПЗ и вызываются заданными распределениями плавучести на границах. Подробно рассмотрен случай распределений плавучести фронтального типа, индуцирующих систему из двух противоположно направленных струйных течений, расположенных соответственно в верхней и нижней половине слоя атмосферы. Показано, что за счет экмановского трения, осевая скорость нижнего течения падает до нуля, а скорость верхнего течения, постепенно охватывающего всю тропосферу, вырастает в два раза. Таким образом, имеет место эффект усиления или интенсификации скорости течений на верхней границе в присутствии трения.

Следует подчеркнуть, что применительно к реальной атмосфере основным фактором, определяющим интенсивность струйных течений, является перепад температур в системе экватор – полюс. Рассмотренный диссипативный эффект служит дополнительным (и достаточно неожиданным) фактором, способствующим интенсификации течений вблизи верхней границы тропоспаузы. Здесь нужно отметить, что в геофизической гидродинамике известны примеры необычных эффектов, связанных с экмановским трением. Так, учет этого трения в моделях бароклинной неустойчивости приводит к исчезновению коротковолнового отсечения – неустойчивыми становятся все нормальные моды [7].

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке РФФ (проект 19-17-00248, разделы 1–6) и РФФИ (проект 18-05-00831, раздел 7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гилл А. Динамика атмосферы и океана. М.: Мир, 1986. Т. 2. 415 с.
2. Pedlosky J. Geophysical Fluid Dynamics. Springer-Verlag: Berlin and New York, 1987. 710 p.
3. Vallis G.K. Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics. Fundamentals and Large-Scale Circulation. Cambridge Univ. Press: Cambridge, 2006. 745 p.
4. Dolzhansky F.V. Fundamentals of Geophysical Hydrodynamics. Springer-Verlag: Berlin Heidelberg, 2013. 272 p.
5. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеиздат, 1975. 304 с.
6. Должанский Ф.В., Крымов В.А., Манин Д.Ю. Устойчивость и вихревые структуры квазидвумерных сдвиговых течений // Успехи физ. наук. 1990. Т. 160. Вып. 7. С. 1–47.
7. Willams G.P., Robinson J. Generalized Eady waves with Ekman pumping // J. Atmos. Sci. 1974. V. 31. P. 1768–1776.
8. Card P.A., Barcilon A. The Charney stability problem with a lower Ekman layer // J. Atmos. Sci. 1982. V. 39. P. 2128–2137.
9. Kostrykin S.V., Khapaev A.A., Yakushkin I.G. The influence of nonlinear bottom friction on decay properties of cyclonic and anticyclonic vortical structures in the shallow rotated fluid // J. Fluid. Mech. 2014. V. 753. P. 217–241.
10. Калашник М.В., Нерушев А.Ф., Ивангородский Р.В. Характерные масштабы и горизонтальная асимметрия струйных течений в атмосфере Земли // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2017. Т. 53. № 2. С. 179–187.
11. Воробьев В.И. Струйные течения в высоких и умеренных широтах. Л.: Гидрометеиздат, 1960. 234 с.
12. Held I.M., Pierrehumbert R.T., Garner S.T., Swanson K.L. Surface quasigeostrophic dynamics // J. Fluid. Mech. 1995. V. 282. P. 1–20.
13. Badin G. Surface semi-geostrophic dynamics in the ocean // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 2013. V. 107. P. 526–540.
14. Kalashnik M.V., Kurgansky M.V., Kostrykin S.V. Instability of Surface Quasigeostrophic Spatially Periodic Flows // J. Atmos. Sci. 2020. V. 77. P. 239–255.
15. Калашник М.В., Чхетиани О.Г. О нелинейном затухании вихревых течений во вращающейся жидкости // Докл. РАН. 2014. Т. 456. № 6. С. 717–722.
16. Незлин М.В., Снежкин Е.Н. Вихри Россби и спиральные структуры. М.: Наука, 1990. 238 с.
17. Алгазин О.Д., Конаев А.В. Решение смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа в многомерном слое // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Естественные науки”. 2015. № 1. С. 3–13.
18. Калашник М.В. Формирование фронтов и струйных течений при геострофическом приспособлении в стратифицированной вращающейся жидкости // Докл. РАН. 1997. Т. 357. №2. С. 247–251.
19. Kalashnik M.V. Geostrophic adjustment and frontogenesis in the continuously stratified fluid // Dynamics of Atmospheres and Oceans. 2004. V. 38. № 1. P. 1–37.

Ekman Friction and the Formation of Upper Tropospheric Zonal Flows

M. V. Kalashnik^{1, 2,*}

¹Obukhov Institute of Atmospheric Physics, Russian Academy of Sciences, Pyzhevskii per., 3, Moscow, 119017 Russia

²Research and Production Association Typhoon, ul. Pobedy, 4, Obninsk, 249038 Russia

*e-mail: kalashnik-obn@mail.ru

In the framework of a quasi-geostrophic model of the atmosphere with two horizontal boundaries (underlying surface and tropopause), the influence of Ekman friction on the dynamics of zonal flows (ZF) is studied.

It is assumed that the flows have zero potential vorticity and are caused by the distribution of buoyancy at the boundaries. It is shown that in the case of periodic distributions, the vertically oppositely directed velocity profile of the ZF transforms into a unidirectional profile with a maximum at the upper boundary and zero velocity at the lower boundary. In the process of transformation, the velocity at the upper boundary increases, i.e. intensification of the upper tropospheric ZF occurs due to Ekman friction. A similar intensification occurs in the case of initial distributions of buoyancy of the frontal type, inducing a system of two oppositely directed jet flows located in the upper and lower half of the atmosphere. Due to the Ekman friction, the axial velocity of the lower stream drops to zero, and the speed of the upper stream, gradually covering the entire troposphere, doubles. The resulting flow is a stream pressed to the upper boundary, which can be considered the prototype of the western upper tropospheric jet stream. Important structural features of such a jet, established within the framework of a complete non-geostrophic model, are associated with the horizontal asymmetry of the jet and the formation of fronts (rupture surfaces) adjacent to the upper boundary.

Keywords: Ekman boundary layer, bottom friction, upper tropospheric jet flows, surface geostrophic model