

УДК 551.513,551.515,532.527

НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ЭКМАНОВСКОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В ОБОБЩЕННОМ УРАВНЕНИИ ЗАВИХРЕННОСТИ

© 2020 г. М. С. Пермяков^а, *, П. В. Журавлев^а, В. И. Семькин^а

^аТихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичёва Дальневосточного отделения Российской академии наук, ул. Балтийская, 43, Владивосток, 690041 Россия

*E-mail: permyakov@poi.dvo.ru

Поступила в редакцию 28.04.2020 г.

После доработки 17.07.2020 г.

Принята к публикации 05.08.2020 г.

Для учета изменчивости параметров планетарного пограничного слоя в обобщенном уравнении завихренности предлагаются приближения для экмановского масштаба толщины, в котором параметр Кориолиса заменяется на абсолютную завихренность. Это приводит к полуэмпирической нелинейной модели пограничного слоя, которая используется для расчета интегральных параметров пограничного слоя, входящих в обобщенное уравнение завихренности. В численных экспериментах с моделью взаимодействия пары баротропных атмосферных вихрей типа тропических циклонов демонстрируется влияние параметров нелинейной модели пограничного слоя на эволюцию поля завихренности. В частности, показано, что включение члена нелинейного трения, который определяется вторыми пространственными производными от интегральных параметров пограничного слоя, при определенных условиях может приводить к разбеганию циклонов, а исключение этого члена – к их слиянию.

Ключевые слова: экмановский пограничный слой, обобщенное уравнение вихря, нелинейное трение, пара вихрей, тропические циклоны

DOI: 10.31857/S0002351520060085

1. ВВЕДЕНИЕ

Обобщенное уравнение эволюции завихренности для баротропной модели вязкой жидкости включает члены линейного и эффективного нелинейного трения, связанные с влиянием на потоки в атмосфере или океане вращения и трения в пограничном слое (ПС) у подстилающей поверхности [1, 2]. Влиянием нелинейного трения объясняется явление циклон-антициклонной асимметрии, наблюдаемой в вихревой структуре атмосферы и океана [2–5]. В [6] это уравнение использовано в численных экспериментах для демонстрации влияния нелинейного трения на процесс слияния мезомасштабных вихрей, образующихся при распаде кольцевого вихря вследствие баротропной неустойчивости.

В [7] это уравнение обобщается на случай горизонтально неоднородного ПС, в котором его основные характеристики и интегральные параметры зависят от горизонтальных координат. В общем случае параметры ПС зависят от скорости потока или его завихренности, а модель экмановского слоя становится нелинейной. В работе [7] для иллюстрации эффектов пространственной изменчивости ПС на эволюцию вихрей в числен-

ных экспериментах использована простая зависимость вязкости жидкости k (точнее ее турбулентного аналога), которая входит в определение экмановского масштаба $h_e = \sqrt{2k/f}$, где f – параметр Кориолиса, от скорости потока. Еще одна достаточно простая нелинейная модель может быть получена заменой параметра Кориолиса f на абсолютную завихренность $\omega_a = f + \omega$ и использованием для масштаба Экмана формулы $h_{e\omega} = \sqrt{2k/(f + \omega)}$, где $\omega = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$ – относительная завихренность, u и v – компоненты скорости потока вдоль осей x и y [8–10]. Таким образом, горизонтальная изменчивость ПС в такой нелинейной модели ПС в достаточно интенсивных вихрях будет проявляться через поля $\omega = \omega(x, y)$ и $h_{e\omega} = h_{e\omega}(x, y)$. Однако, в общем случае область применения такой модели будет существенно ограничена нереально большими значениями экмановского масштаба $h_{e\omega}$ и условием $|f + \omega| \neq 0$.

В настоящей работе на основе полуэмпирических соображений предлагаются простые приближения для экмановского масштаба, устраняющие его неограниченный рост при стремлении

абсолютной завихренности к нулю, но сохраняющие эффект уменьшения толщины ПС под влиянием вращения. Эти приближения использованы для расчета интегральных параметров ПС и их пространственного распределения в обобщенном уравнении завихренности. В численных экспериментах с моделью взаимодействия двух баротропных атмосферных вихрей демонстрируется влияние параметров нелинейной модели ПС на эволюцию поля завихренности.

2. ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ЗАВИХРЕННОСТИ

В работе [7] выведено баротропное уравнение эволюции завихренности ω в слое жидкости глубиной H , в котором горизонтальная изменчивость ПС учитывается через зависимость его интегральных параметров α и β от пространственных координат:

$$\omega_t + (1 + \alpha)J(\psi, \omega) + \beta[\omega^2 + (\nabla\psi \cdot \nabla\omega)] = -2\omega[J(\psi, \alpha) + (\nabla\psi \cdot \nabla\beta)] - \Phi - R(\tau_0)/H, \quad (1)$$

где ψ – функция тока, $J(\psi, \omega) = \psi_x \omega_y - \psi_y \omega_x$ – якобиан, $\nabla \equiv (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ – оператор градиента,

$$\Phi = -\left[\left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2}\right) - 2\frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y}\right] \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}\right) + 2\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y}\right] \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2\right],$$

τ_0 – вектор напряжения трения на подстилающей поверхности, $R(V) \equiv v_x - u_y$, оператор ротора, действующего на вектор V с компонентами u и v по осям x и y . Интегральные параметры α и β определяются функциями $\varphi_1(\xi, h)$ и $\varphi_2(\xi, h)$ (профильными) для вертикального профиля компонент скорости классического экмановского решения [1, 7]: $\alpha(h) = \langle \text{Re}(\varphi(\xi, h)^2) \rangle$ и $\beta(h) = -\langle \text{Im}(\varphi(\xi, h)^2) \rangle$, где $\varphi(\xi, h) = -\frac{\text{sh}(\lambda h) - (\lambda h) \text{ch}(\lambda(\xi - h))}{\text{sh}(\lambda h) - (\lambda h) \text{ch}(\lambda h)} = \varphi_1(\xi, h) + i\varphi_2(\xi, h)$, $h(x, y) = H/h_{e\omega}(x, y)$, $\xi = z/h_e$ – безразмерная вертикальная координата, $\lambda = 1 + i$, $\langle \rangle$ – символ интегрирования по вертикальной координате ξ . Для простейшей линейной модели вязкого экмановского ПС эти параметры α и β постоянны и два первых члена в правой части (1) исчезают. В таком варианте уравнение (1) в [1] названо обобщенным уравнением эволюции завихренности, в котором третий член в левой части с коэффициентом α представляет инерционную нелинейность, связанную с экмановским слоем, а член с коэффициентом β – нелинейную часть эффективного трения. Как показано в [7], первый член в правой

части (1) можно интерпретировать как орографический (топографический) эффект ПС, поскольку горизонтальные градиенты параметров α и β определяются градиентами масштаба толщины ПС. Второй член Φ зависит от вторых пространственных производных параметров α и β , при достаточной большой их изменчивости (вследствие изменчивости $h_{e\omega} = h_{e\omega}(x, y)$) может быть источником интенсивных мелкомасштабных возмущений поля вихря. Все перечисленные члены, представляющие нелинейное трение в уравнении (1), следуют из нелинейности исходных уравнений движения при интегрировании по вертикали вторых моментов в уравнении вихря, которые появляются при представлении скорости суммой средней по вертикали и зависящих от вертикальной координаты компонент экмановского потока в ПС [1].

Функции $\alpha(h)$ и $\beta(h)$ и их горизонтальная изменчивость определяются видом профильных функций и в общем случае зависят от принятой модели ПС. Для упрощения выкладок и окончательных выражений мы далее используем точные решения, выписанные выше, но в них масштаб высоты ПС полагается функцией от абсолютной завихренности.

3. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЭКМАНОВСКОГО МАСШТАБА

В классической краевой линейной задаче Экмана для горизонтально однородных течений вязкой жидкости над подстилающей поверхностью на вращающейся Земле выделяется характерный масштаб $h_e = \sqrt{2k/f}$, который используется для нормировки вертикальной координаты в известных точных решениях задачи. Масштаб h_e качественно правильно учитывает влияние вращения на высоту области наиболее значительных изменений в вертикальных профилях компонент скорости потоков у поверхности, но нереально возрастает при $f \rightarrow 0$. Попытки учета горизонтальной неоднородности потоков приводят к нелинейным задачам, точное решение которых получить невозможно, а приближенные решения обычно ищутся только для малых чисел Россби $r = \omega/f \ll 1$ [10]. Однако в реальных атмосферных вихрях типа тропических циклонов число Россби может превышать 10. Поэтому мы, упрощая модель ПС, для расчета интегральных параметров $\alpha(h)$ и $\beta(h)$ в обобщенном уравнении вихря будем использовать известные точные решения задачи Экмана [1], выписанные выше, с масштабом толщины $h_{e\omega} = \sqrt{2k/(f + \omega)} = h_e \sqrt{1/(1 + r)}$.

Далее мы модифицируем соотношение $h_{e\omega} = h_e \cdot \sqrt{1/(1 + r)}$ таким образом, чтобы оно давало

ограниченные значения h_{e0} при любых значениях числа Россби r , сохраняя при этом эффект уменьшения масштаба толщины ПС при увеличении относительной завихренности (при увеличении r) вне зависимости от ее знака. Здесь мы руководствуемся практическими соображениями гладкого сопряжения режимов с малыми и большими r , аналогичных тем, которые используются в [11] при выводе полуэмпирических формул для характерных масштабов, объединяющих различные режимы ПС. Так, предполагая, что реальные масштабы пограничного слоя h ограничены некоторой заданной высотой H (например, высотой однородной атмосферы), мы определим новый масштаб ПС h соотношением $h^{-1} = h_{ew}^{-1} + H^{-1}$. Для безразмерного масштаба, нормированного на обычный масштаб Экмана $h_e = \sqrt{2k/f}$, получаем

$$h^*(r) = \frac{H/h_e}{1 + (H/h_e)\sqrt{1+r}} = \frac{H^*}{1 + H^*\sqrt{1+r}},$$

где введена безразмерная предельная высота $H^* = H/h_e = \varepsilon^{-2}$, $\varepsilon = (H^*)^{-2}$ – число Экмана. Далее аппроксимируем эту функцию при малых r такой ограниченной функцией, которая исключает разрыв производной по r при $r = -1$. Для этого используем простейшую рациональную функцию, удовлетворяющую указанным требованиям:

$$h^*(r, H^*, \bar{a}) = \frac{H^* + a_0(1+r)^2}{1 + a_1(1+r)^2 + a_2(1+r)^4}. \quad (2)$$

Здесь коэффициенты a_0, a_1, a_2 вычисляются методом наименьших квадратов для отклонений $h^*(r, H^*, \bar{a})$ от $h^*(r)$ для заданного значения параметра H^* . Для используемых далее в численных экспериментах значений H^* a_0, a_1, a_2 даются в табл. 1. На рис. 1 показан вид функции $h^*(r, H^*, \bar{a})$ для $H^* = 8$.

Таким образом, соотношение (2) дает нам полуэмпирическую нелинейную модель экмановского ПС, в которой вертикальный масштаб определяется двумя внешними параметрами: числом Россби r и безразмерной высотой H^* (или числом Экмана $\varepsilon = (H^*)^{-2}$). Выбор значения H^* определяет диапазон изменчивости h^* и, как следствие, диапазон значений интегральных параметров α и β в уравнении завихренности (1). Такая изменчивость α и β может оказывать значительное влияние на эволюцию поля завихренности, учитывая наличие вторых пространственных производных в члене Φ в правой части (1), что будет далее показано в численных экспериментах с моделью взаимодействия двух баротропных вихрей.

В численных экспериментах, так же как и в [7], в расчетах для параметров $\alpha(h)$ и $\beta(h)$ были использованы простые рациональные функции, ап-

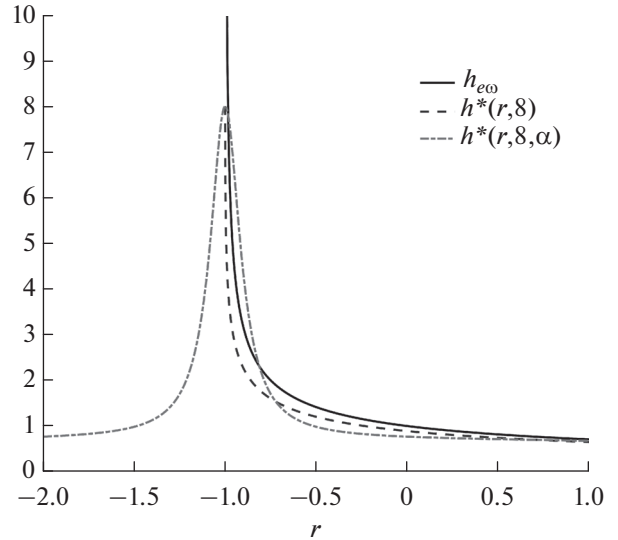


Рис. 1. Функция $h^*(r, H^*, \bar{a})$ для $H^* = 8$ в сравнении с функциями h_{e0} и $h^*(r, H^*)$.

проксимирующие сложные аналитические выражения для них в диапазоне характерных для атмосферы значений параметра h :

$$\alpha(h) = \alpha^{\max} \cdot f_1(h, \bar{a}), \quad \beta(h) = b^{\max} f_2(h, \bar{b}),$$

$$f_1(h, \bar{a}) = \frac{1 + a_0 h + a_1 h^2}{1 + a_2 h + a_3 h^2 + a_4 h^3},$$

$$f_2(h, \bar{b}) = \frac{b_0 + b_1 h}{1 + b_2 h + b_3 h^2},$$

где $\bar{a} = (-0.304; 0.091; -0.271; 6.485 \times 10^{-3}; 0.058)$ и $\alpha^{\max} = 0.197$, $\bar{b} = (-0.489; 0.692; -0.501; 0.245)$ и $b^{\max} = 0.08$. Эти функции достаточно точно аппроксимируют профильные функции $\alpha(h)$ и $\beta(h)$, являются гладкими и положительными для диапазона используемых значений h .

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Влияние предложенной нелинейной модели экмановского пограничного слоя на динамику вихревых образований демонстрируется в численных экспериментах на примере задачи о взаимодействии пары идентичных баротропных атмо-

Таблица 1. Коэффициенты a_0, a_1, a_2 в (2) для разных значений H^*

H^*	a_0	a_1	a_2
2	13.53	25.52	0.32
5	42.51	63.97	1.14
8	72.17	101.46	2

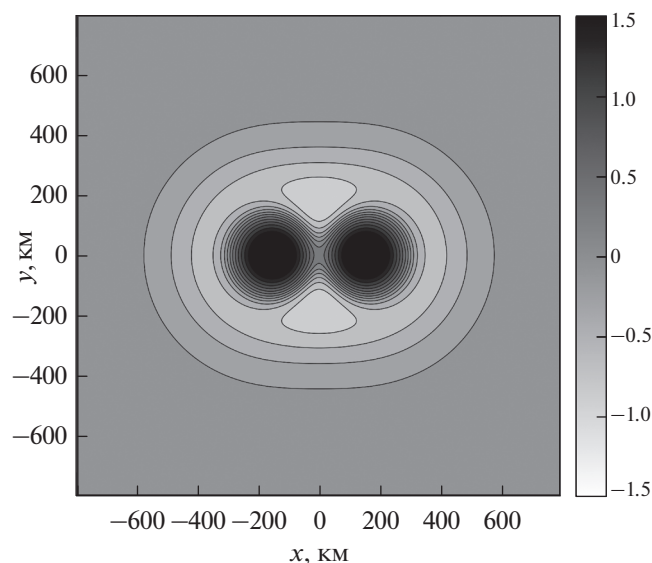


Рис. 2. Начальное поле завихренности пары одинаковых вихрей с расстоянием между центрами 300 км.

сферных вихрей типа тропических циклонов. Даже в простейших постановках таких задач для идеальной жидкости можно видеть большое разнообразие эволюции вихрей в зависимости от расстояния между ними, их размерами и соотношения интенсивностей [12]. Ставить и решать более реалистичные задачи взаимодействия атмосферных и океанских вихрей, оставаясь в рамках квазидвумерных численных моделей, позволяют модели вязкой жидкости, включающие члены нелинейного трения в ПС в уравнении завихренности (1) с использованием при этом нелинейной модели экмановского ПС, описанной выше.

Во всех численных экспериментах начальное поле завихренности задавалось в квадратной области $[1600 \times 1600 \text{ км}]$ в виде суммы завихренности двух одинаковых вихрей, с центрами на оси x , расположенных симметрично относительно центра области на расстоянии 300 км. Завихренность в вихрях задается функцией расстояния r от их центра [7, 13]:

$$\omega(r) = (2V_m/r_m) \times [1 - 0.5(r/r_m)^b] \exp\{b^{-1}[1 - (r/r_m)^b]\}, \quad (3)$$

где V_m – максимум тангенциальной составляющей скорости ветра, r_m – радиус максимального ветра, b – параметр, определяющий изменение тангенциальной составляющей скорости ветра вдоль радиуса. В экспериментах приняты значения $b = 1.5$, $V_m = 15 \text{ м/с}$, $r_m = 100 \text{ км}$, характерные для атмосферных мезомасштабных вихрей в тропиках типа тропических циклонов. Начальное поле завихренности показано на рис. 2.

Уравнение (1) решалось псевдоспектральным методом на равномерной сетке с числом узлов 256×256 с двойными периодическими граничными условиями. Интегрирование по времени на срок 5 суток проводилось методом Адамса–Бэшфорта второго порядка. Для ограничения роста возмущений малых масштабов, приводящего к неустойчивости счета, в пространстве волновых чисел применялся фильтр [14]:

$$F(K, K_0, \alpha, M) = \begin{cases} 1, & K \leq K_0, \\ \exp[-\alpha(K - K_0)^M], & K > K_0, \end{cases}$$

где K – волновое число, K_0 – волновое число среза фильтра, α и M – параметры, определяющие степень подавления компонент с волновыми числами более K_0 . В расчетах использовались следующие значения: $\alpha = 18.4$, $M = 4$ и $K_0 = 2/3$. Данный фильтр применялся к полю завихренности на каждом шаге интегрирования по времени. В процессе проведения численных экспериментов наблюдалась численная неустойчивость, связанная с большой пространственной изменчивостью $h^*(x, y)$, и, как следствие, с высокой изменчивостью члена Φ в (1). Для подавления этой неустойчивости к полям $h^*(x, y)$ и $\Phi(x, y)$ на каждом шаге интегрирования применялся простой фильтр скользящего среднего с окном размером 5×5 . В дополнение к экмановскому трению на подстилающей поверхности учитывалось квадратичное трение с помощью аэродинамической формулы $\tau_{CD} = \rho C_D |\mathbf{V}| \mathbf{V}$, где $C_D = C_0 + C_V |\mathbf{V}|$, $C_0 = 10^{-3}$, $C_V = 10^{-4}$ [7], которое служит еще одним механизмом подавления вычислительной неустойчивости.

Для иллюстрации влияния нелинейной модели пограничного слоя и дополнительных нелинейных членов в (1), учитывающих горизонтальную неоднородность его интегральных характеристик, на эволюцию поля завихренности пары вихрей были проведены эксперименты с $f = 5 \times 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ и $H = 10 \text{ км}$ со следующими наборами параметров:

- 1) постоянные параметры α и β , соответствующие $h_e \sim 600 \text{ м}$;
- 2) модель с масштабом $h^*(r, H^*, \bar{a})$ для $H^* = 8$, $\Phi = 0$;
- 3) три эксперимента с масштабом $h^*(r, H^*, \bar{a})$ для $H^* = 2, 5$ и 8 .

Последние три эксперимента демонстрируют влияние нелинейного члена Φ в уравнении (1) в зависимости от предельной высоты пограничного слоя.

Результаты всех пяти экспериментов в виде полей завихренности в разные моменты времени представлены на рис. 3.

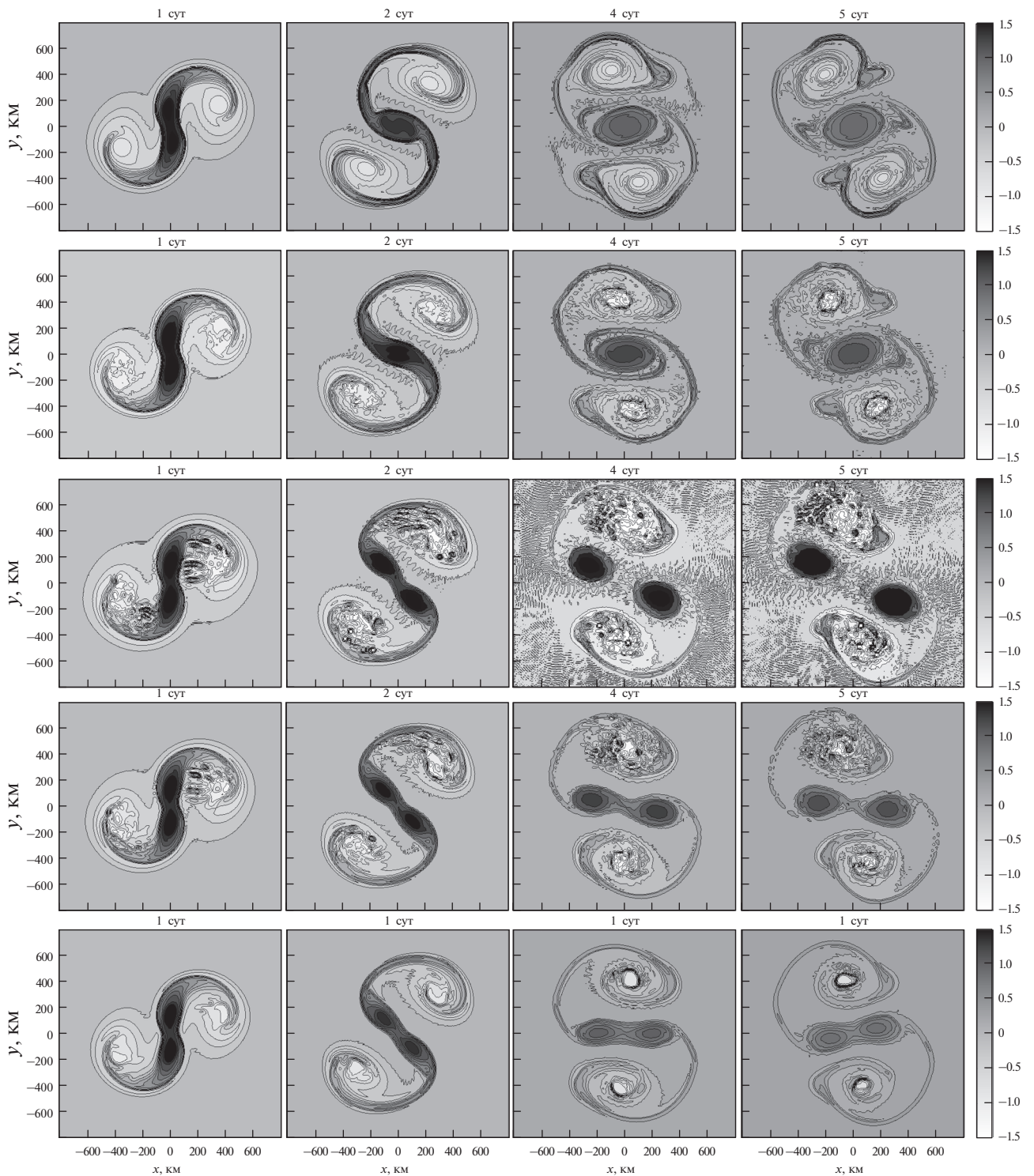


Рис. 3. Поля завихренности в экспериментах с постоянными параметрами ПС (верхний ряд), с $H^* = 8$ и $\Phi = 0$ (второй ряд), с $H^* = 8, 5$ и 2 и $\Phi \neq 0$ (третий–пятый ряды).

В течение первых суток во всех экспериментах наблюдается эффект взаимного притяжения циклонических ядер вихрей и их циклоническое вращение относительно друг друга (эффект Фуззива-

ры [15]). На вторые сутки области с отрицательной завихренностью обоих вихрей сворачиваются в отдельные антициклонические вихри-спутники. Циклонические области в первом и во втором экс-

Таблица 2. Расстояние между центрами циклонов (км) с 1 по 5 сутки

H^*	Сутки				
	1	2	3	4	5
2	288	309	387	387	350
5	288	327	425	476	500
8	288	364	470	565	675

периментах продолжают сближаться (практически сливаются) и образуется триполярная структура — циклон и два антициклона.

Поля завихренности, полученные в первом и во втором экспериментах, мало отличаются от таковых на рис. 1 в [7], где наблюдается слияние пары баротропных вихрей и образования триполярной структуры. Некоторые отличия могут быть связаны, прежде всего, с различиями в аппроксимирующих функциях для $\alpha(h)$ и $\beta(h)$ и методах численного решения уравнения (1) здесь и в [7].

Эффект включения члена Φ четко проявляется в экспериментах для всех используемых значений H^* , циклонические области после сближения в первые сутки начинают расходиться. В районах антициклонической завихренности развиваются мезо- и мелкомасштабные вихри и филаменты, в экспериментах для $H^* = 5$ и $H^* = 8$ становится заметной асимметрия. Отметим, что влияние члена Φ на структуру полей в [7] оказалось незначительным, что связано с введением сравнительно слабой изменчивости ПС через коэффициент турбулентной вязкости в экмановском масштабе h_e , который связывался с модулем скорости потока квадратичной зависимостью.

В последующие двое суток влияние члена Φ проявляется еще более четко. Тогда как в первых двух экспериментах без члена Φ в центре произошло слияние циклонов, в экспериментах с Φ они расходятся и при $H^* = 8$ видим уже два циклона на значительном расстоянии друг от друга. При этом заметно увеличивается число и интенсивности мелкомасштабных структур. В антициклонических областях наблюдается асимметрия, более заметная при больших H^* .

Скорость разбегания циклонических вихрей зависит от величины H^* — при малых значениях они расходятся медленнее. Изменения расстояния между центральной парой циклонических вихрей для серии расчетов третьего эксперимента представлены в табл. 2.

В первые сутки вихри сближаются на одинаковое расстояние независимо от значения H^* , затем начинают разбегаться. Так, для $H^* = 8$ расстояние между центрами вихрей к пятым суткам увеличилось более чем в два раза от начального (300 км) и составила около 680 км. Для $H^* = 5$ расстояние

между циклонами увеличилось до 500 км. В эксперименте для $H^* = 2$ увеличение расстояния между парой вихрей продолжается до четвертых суток интегрирования и достигает 390 км, а затем к концу пятых суток циклоны начали сближаться до 350 км.

Появление мелкомасштабных структур при включении члена Φ можно интерпретировать как проявление специфического механизма генерации квазидвумерной турбулентности, отличного от известных механизмов баротропной неустойчивости квазидвумерных потоков. Он связан с сильной нелинейностью использованной модели планетарного ПС и, как следствие, значительной пространственной изменчивостью его интегральных характеристик $\alpha(h)$ и $\beta(h)$ и с наличием вторых пространственных производных в члене нелинейного трения Φ . На реалистичность таких мелкомасштабных структур в нашей модели указывает то, что общая картина мелких вихрей и филаментов в экспериментах при $H^* = 8$ подобна мелким структурам в полях завихренности моделируемого тропического циклона, полученных в численных экспериментах с региональной моделью высокого разрешения [16].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе предложена простая полупирическая нелинейная модель экмановского пограничного слоя, устраняющая его неограниченный рост при стремлении параметра Кориолиса f или абсолютной завихренности ω_a к нулю. Эта модель использована в обобщенном уравнении завихренности для модели взаимодействия пары вихрей. Численные эксперименты показывают, что включение такой модели в обобщенное уравнение завихренности приводит к ряду новых качественных эффектов в эволюции полей завихренности: генерация интенсивных мелкомасштабных структур и увеличение расстояния между вихрями вместо их слияния. Такие эффекты в значительной степени зависят от безразмерных чисел Россби и Экмана, поэтому необходимо более детальное исследование их влияния на эволюцию полей завихренности в задачах взаимодействия баротропных вихрей.

Работа выполнена в рамках госзадания ТОИ ДВО РАН тема № 0271-2019-0011 (рег. номер АААА-А17-117030110037-8) при финансовой поддержке РФФИ по проектам № 18-05-80011 и № 19-55-10001.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козлов В.Ф. Модель двухмерного вихревого движения жидкости с механизмом вовлечения // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 6. С. 49–56.

2. *Калашиник М.В., Чхетиани О.Г.* О нелинейном затухании вихревых течений во вращающейся жидкости // Докл. АН. 2014. Т. 456. № 6. С. 717–722.
3. *Козлов В.Ф., Гурулев А.Ю.* Об одном нелинейном механизме формирования циклон-антициклонной асимметрии в океане // Изв. РАН. ФАО. 1992. Т. 28. № 4. С. 406–415.
4. *Пономарев В.М., Хапаев А.А., Якушкин И.Г.* Нелинейное экмановское трение и асимметрия циклонических и антициклонических когерентных структур в геофизических течениях // Докл. АН. 2009. Т. 425. № 6. С. 821–826.
5. *Кострыкин С.В., Хапаев А.А., Якушкин И.Г.* Вихревые структуры в квазидвумерных течениях вязкой вращающейся жидкости // ЖЭТФ. 2011. Т. 139. Вып. 2. С. 395–407.
6. *Маликова Н.П., Пермяков М.С.* Влияние экмановского пограничного слоя на эволюцию вихревых образований // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 6. С. 90–93.
7. *Пермяков М.С., Семькин В.И., Маликова Н.П.* Учет горизонтальной неоднородности планетарного пограничного слоя в модели двумерного движения жидкости // Изв. РАН. ФАО. 2018. Т. 54. № 5. С. 497–504.
8. *Syono S.* On the structure of atmospheric vortices // J. Meteor. 1951. V. 8. P. 103–110.
9. *Harada A.* Evidence of Ekman pumping working in a small scale cyclonic vortex // J. Meteor. Society of Japan. 1982. V. 60. № 3. P. 876–881.
10. *Pedlosky J.* On the weakly nonlinear Ekman layer: Thickness and Flux // J. Physic. Oceanog. 2008. V. 38. P. 1334–1339.
11. *Зелитинкевич С.С.* Атмосферная турбулентность и планетарные пограничные слои. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 251 с.
12. *Sokolovskiy M.A., Verron J.* The formation of new quasi-stationary vortex patterns from the interaction of two identical vortices in a rotating fluid // Ocean Dynamics. 2018. V. 68. № 6. P. 723–733.
13. *DeMaria M., Schubert W.H.* Experiments with a spectral tropical cyclone model // J. Atmospheric Sciences. 1984. V. 41. № 5. P. 901–924.
14. *Arbic B.K., Flierl G.R.* Effects of mean flow direction on energy, isotropy, and coherence of baroclinically unstable beta-plane geostrophic turbulence // J. Phys. Oceanography. 2004. V. 34. № 1. P. 77–93.
15. *Fujiwhara S.* The natural tendency towards symmetry of motion and its application as a principle in meteorology // Quart. J. Roy. Meteor. Soc. 1921. V. 47. P. 287–293.
16. *Nicholls M.E., Montgomery M.T.* An examination of two pathways to tropical cyclogenesis occurring in idealized simulations with a cloud-resolving numerical model. // J. Atmos. Chem. Phys. 2013. V. 13. P. 5999–6022.

Non-Linear Model of the Ekman Boundary Layer in the Generalized Vorticity Equation

M. S. Permyakov^{1,*}, P. V. Zhuravlev¹, and V. I. Semykin¹

¹*Il'ichev Pacific Oceanological Institute FEB RAS, Baltiyskaya Street, 43, Vladivostok, 690041 Russian Federation*

**e-mail: permyakov@poi.dvo.ru*

Approximations are proposed for the Ekman thickness scale, in which the Coriolis parameter is replaced by absolute vorticity to consider the variability of the parameters of the planetary boundary layer in the generalized vorticity equation. This leads to a semi-empirical nonlinear model of the boundary layer, which is used to calculate the integral parameters of the boundary layer included in the generalized vorticity equation. In numerical experiments with the interaction model of a pair of barotropic atmospheric vortices such as tropical cyclones, the influence of the parameters of the nonlinear boundary layer model on the evolution of the vorticity field is demonstrated. In particular, it is shown that the inclusion of the nonlinear friction term, which is determined by the second spatial derivatives of the integral parameters of the boundary layer, under certain conditions can lead to the divergence of cyclones, and the exclusion of this term can lead to their merging.

Keywords: Ekman boundary layer, generalized vortex equation, nonlinear friction, vortex pair, tropical cyclones