ИЗВЕСТИЯ РАН. ФИЗИКА АТМОСФЕРЫ И ОКЕАНА, 2021, том 57, № 1, с. 74–78

УДК 551.551;536.1

О ТЕРМОДИНАМИКЕ КОЛМОГОРОВСКОГО СКЕЙЛИНГА В ТУРБУЛЕНТНОСТИ

© 2021 г. Е. Б. Гледзер*

Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, Пыжевский пер., 3, Москва, 119017 Россия

**E-mail: aegledzer@gmail.com*

Поступила в редакцию 28.05.2020 г.
После доработки 14.08.2020 г.
Принята к публикации 14.10.2020 г.

Выписаны модельные уравнения баланса энергии для турбулентности в форме первого начала термодинамики. С помощью интегрирующего множителя (обратная энергия турбулентности) получены формулы для энтропии. Для распределения энергии по закону Колмогорова–Обухова энтропия принимает такую же форму, как для идеального газа в термодинамике. Предложена возможная формула для температуры турбулентности, учитывающая основной механизм передачи энергии в турбулентности – гидродинамическую неустойчивость.

Ключевые слова: энтропия, скейлинг, турбулентный каскад

DOI: 10.31857/S0002351521010065

1. ВВЕДЕНИЕ

Известные подходы в турбулентности с использованием методов термодинамики и статистической физики, как правило, связаны с применением формул для энтропии Больцмана–Гиббса–Шеннона [1, 2], вида $S \sim \int f(x,t) \ln f(x,t)\, dx$. Сюда входит распределение вероятностей молекулярных частиц турбулентной среды, которое аппроксимируется либо максвелловским распределением с выделением скорости турбулентной составляющей потока, либо на основе модельных представлений о полях скорости и диссипации в развитой турбулентности [3–5].

При этом в таком подходе трудно обнаружить связь с каскадными процессами в турбулентности и соответствующими колмогоровскими закономерностями, а энтропия уступает по важности другим характеристикам турбулентности – распределениям вероятностей, потокам энергии, спектрам и т.д. Кроме того, не удается найти параметр, аналогичный термодинамической температуре, который аккумулировал бы в себе как энергетические характеристики турбулентности, так и меру каскадной передачи энергии по спектру масштабов. В турбулентности таким параметром служит число Рейнольдса как характеристика глубины каскада и его энергии. Однако можно ли его связать с известными термодинамическими представлениями о температуре?

Известны также аппроксимации энтропии формами Реньи и Тсаллиса [6–9], что свидетельтвует о неоднозначности при выборе форм для энтропии.

В равновесной термодинамике энтропия определяется как функция состояния с введением интегрирующего множителя из первого начала:

$$\delta Q = dE + pdV, \quad pV = (2/3)\, NE.$$

Здесь δQ – приток тепла, E – энергия (для идеального газа $E = (3/2)\, kT$), N – число молекул в объеме V, k – постоянная Больцмана. Также напомним, что $N_a k = R$ – удельная газовая постоянная, где N_a – число Авогадро. Используя нтегрирующий множитель $\frac{1}{E}$, получим полный дифференциал энтропии S как функции состояния

$$\frac{\delta Q}{E} = dS = \frac{dE}{E} + \frac{2}{3} N \frac{dV}{V}; \qquad S = S_0 + \ln E + \frac{2}{3} N \ln V. \tag{1}$$

Если газ неидеальный, т.е. внутренняя энергия E зависит и от объема V, то для того, чтобы форма $\frac{\delta Q}{T}$ была полным дифференциалом, необходимо

$$\left.\frac{\partial E}{\partial V}\right|_T = T \left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_V - T.$$

Используем далее этот подход для развитой турбулентности с учетом существенных отличий от равновесной термодинамики, в которой рассматриваются процессы с характерными временами намного больше времен релаксации. Для турбулентности существенным является сток или диссипация энергии, извне подводимой в турбулентный поток. Кроме того, взаимодействие между возмущениями различных масштабов, приводящее к возникновению потока энергии по спектру, характеризуется временными масштабами, определяемыми величиной этого потока и пространственным масштабом возмущений.

Связи величин энергии, характерных времен и масштабов, потоков энергии, выражаемые через структурные функции скорости и смещений частиц жидкости, приведены в работах [10, 11] как следствия из простейшей модели неравновесной лагранжевой динамики в конечном ансамбле частиц с притоком энергии.

2. ЭНТРОПИЯ В ТУРБУЛЕНТНОСТИ

В изотермической турбулентности вместо притока тепла δQ можно, виртуально, ввести внешний механический привод (какие-то механические мешалки, турбинки различных масштабов), который генерирует соответствующие разномасштабные движения в жидкости. Вместо внутренней энергии $E(T, V)$ молекулярного движения газа возьмем энергию турбулентных пульсаций с масштабами от минимальных $l = 0$ до масштаба l:

$$E(l, \varepsilon) = \int_k^\infty E(k)dk, \quad k = \frac{2\pi}{l},$$

где $E(k)$-спектр энергии пульсаций. Для спектра Колмогорова–Обухова $E(k) = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}$ имеем $E(l, \varepsilon) = C_0(\varepsilon l)^{2/3}$. Это энергия всех пульсаций с масштабами от $l = 0$ до l. В качестве внешнего параметра присутствует ε-поток энергии по спектру.

Механическая генерация движений с формой δQ дает изменение энергии $dE(l, \varepsilon)$ турбулентных пульсаций с масштабами l и менее. Но эта же генерация создает также сквозной по масштабам поток энергии ε, который за интервал времени $d\tau$ даст прирост энергии $\varepsilon d\tau$. Для заданного пространственного масштаба l потока ε масштаб времени τ зависит от l и ε, $\tau = \tau(l, \varepsilon)$.

Амплитуда скорости $\sqrt{E}$, задаваемая энергией E, за время τ создает ускорение $\frac{\sqrt{E}}{\tau}$ (или силу для единицы массы). Это ускорение (сила) при изменении размера возмущений на dl совершает работу, пропорциональную $\frac{\sqrt{E}}{\tau}dl$.

Все вместе: внешний привод δQ дает изменение энергии $dE(l, \varepsilon)$ прирост $\varepsilon d\tau$ при потоке энергии по спектру масштабов и, кроме того, работу $\alpha\frac{\sqrt{E}}{\tau}dl$ ($\alpha > 0$ – численный коэффициент, поскольку для работы имеется только оценка порядка величины). В результате вместо первого начала термодинамики для турбулентности имеем уравнение баланса

$$\delta Q = dE + \varepsilon d\tau + \alpha\frac{\sqrt{E}}{\tau}dl. \qquad (2)$$

Для характерного времени $\tau(l, \varepsilon)$ примем

$$\tau(l, \varepsilon) = c\frac{E}{\varepsilon}, \quad c = \text{const}. \qquad (3)$$

Это некий аналог уравнения состояния $pV = RT$ в термодинамике.

Тогда $d\tau = cdE/\varepsilon - c\left(E/\varepsilon^2\right)d\varepsilon$ и (2) примет вид

$$\delta Q = (1 + c)dE - c\frac{E}{\varepsilon}d\varepsilon + \frac{\alpha}{c}\frac{\varepsilon}{\sqrt{E}}dl. \qquad (4)$$

Как и в термодинамике (1), вводим интегрирующий множитель $\frac{A}{E}$ ($A > 0$ – нормировочная константа, которой можно воспользоваться для некоторых упрощений):

$$\frac{A\delta Q}{E} = dS = A(1 + c)d(\ln E) - Acd(\ln\varepsilon) + \frac{A\alpha}{c}\frac{\varepsilon}{E^{3/2}}dl. \qquad (5)$$

Здесь последний член может иметь дифференциальную форму, если величина $\frac{\varepsilon}{E^{3/2}}$ зависит только от масштаба l,

$$\frac{\varepsilon}{E^{3/2}} = f(l). \qquad (6)$$

Как частный случай, положим

$$\frac{\varepsilon}{E^{3/2}} = \frac{1}{C_0^{3/2}}\frac{1}{l}. \qquad (7)$$

Это соответствует колмогоровской зависимости

$$E(l, \varepsilon) = C_0(\varepsilon l)^{2/3}. \qquad (8)$$

Тогда получаем

$$\frac{A\delta Q}{E} = dS = Ad[(1 + c)\ln E - c\ln\varepsilon + q\ln l],$$
$$q = \frac{\alpha}{cC_0^{3/2}}, \quad S = S_0 + Ac\ln\left(\frac{E^{\frac{1+c}{c}}}{\varepsilon}\right) + Aq\ln l. \qquad (9)$$

С использованием (8) при исключении ε эта формула примет вид

$$S = S_0 + A\ln(E^{1-c/2}) + A\ln(l^{c+q}). \tag{10}$$

Если исключить E, то имеем

$$S = S_0 + A\frac{2}{3}\left[\ln(\varepsilon^{1-c/2}) + \ln(l^{1+c+3q/2})\right]. \tag{11}$$

Логарифмические зависимости функций S от E, ε и l соответствуют энтропии (1) для идеального газа, если учесть, что $\ln l = (1/3)\ln l^3 = (1/3)\ln V$.

Если вместо колмогоровской зависимости (8) принять в (5), (6) аномальный скейлинг

$$E(l, \varepsilon) = C_0(\varepsilon l)^{2/3}\left(\frac{l}{L}\right)^{2z/3}, \tag{12}$$

то вместо (7) имеет место

$$\frac{\varepsilon}{E^{3/2}} = \frac{1}{C_0^{3/2}}\frac{1}{l}\left(\frac{L}{l}\right)^z,$$

а для энтропии получим

$$S = S_0 + A\ln\left(E^{1-c/2}\right) + A(1+c)\ln l - \frac{Aq}{z}\left(\frac{L}{l}\right)^z. \tag{13}$$

При $z \to 0$ после перенормировки S_0 можно перейти к (9). Здесь энтропия уже не имеет форму, как для идеального газа.

Рассмотрим адиабатическую турбулентность, когда энтропия не меняется, т.е. согласно (10), (11)

$$\begin{gathered} E^{1-c/2}l^{c+q} = \text{const}, \\ \varepsilon^{1-c/2}l^{1+c+3q/2} = \text{const}. \end{gathered} \tag{14}$$

Из (14) следует, что при $c < 2$ увеличение E или ε требует уменьшения l для сохранения энтропии. Напротив, при $c > 2$ увеличение E или ε требует увеличения l. Эти два случая аналогичны процессам потока энергии, соответственно, для трехмерной (к мелким масштабам) и двумерной (в сторону крупных масштабов) турбулентности. Константа c задает характерное время для возмущений с маштабами l и потоком ε, т.е. для $c > 2$ (двумеризация) время τ – увеличенное – по сравнению с трехмерной турбулентностью при $c < 2$.

При $c = 2$ имеем вырождение: энтропия (10) зависит только от масштаба l, а при $c > 2$ (как бы двумерная турбулентность) энтропия при увеличении E для фиксированного масштаба l уменьшается (что-то вроде отрицательной теплоемкости).

3. ТЕМПЕРАТУРА ТУРБУЛЕНТНОГО КАСКАДА

Если использовать классическое соотношение $\left.\frac{\partial S}{\partial E}\right|_V = \frac{1}{\Theta}$, связывающее энтропию, энергию и температуру, то из (10), (13) получим $\Theta = \frac{E}{A(1-c/2)}$, т.е. (без учета численных констант)

$$\Theta_k = \varepsilon^{2/3}l^{2/3}\frac{1}{A(1-c/2)} \equiv \left(\frac{\varepsilon^2}{l}\right)^{\frac{1}{3}} l\frac{1}{A(1-c/2)}. \tag{15}$$

Такая форма для температуры имеет определенную привлекательность, поскольку при $c > 2$ (указанная выше тенденция к двумеризации) значение $\Theta_k < 0$, что напоминает известную отрицательную вязкость. Однако эту форму для температуры Θ для турбулентнтного каскада вряд ли можно принять: если в газах передача энергии происходит при смешении объемов с разными температурами и соответствующим их выравниванием из-за движений молекул с разными скоростями, то в турбулентности основным механизмом передачи энергии является гидродинамическая неустойчивость. При этом в равновесном состоянии энергии пульсаций разного масштаба не выравниваются. И можно говорить только о температуре как характеристике для состояния совокупности движений с масштабами в достаточно широком диапазоне (например, от колмогоровкого до l).

Есть несколько соображений, согласно которым температура турбулентности может быть линейной функцией по масштабу l, а не $l^{2/3}$, как в (15). В термодинамике работа расширения до объема V при постоянном давлении p, $\int_0^V p dv = pV$, равна NkT (T – кинетическая температура). Рассмотрим турбулентность с внешним масштабом L и потоком энергии по спектру ε. Тогда величина $a = \left(\frac{\varepsilon^2}{L}\right)^{1/3}$ по размерности – сила на единицу массы. При делении на l^2 получаем давление $p_a = \frac{a}{l^2}$, так что аналогом термодинамической величины pV для турбулентности является $p_a l^3 = al = \left(\frac{\varepsilon^2}{L}\right)^{1/3} l$, что соответствует некоторой энергетической величине – аналогу кинетической температуры. Таким образом, вместо (15) можно ввести температуру

$$\Theta_l = \left(\frac{\varepsilon^2}{L}\right)^{1/3} l. \tag{16}$$

Если в (16) $l = L$, то $\Theta_L \sim E(\varepsilon, L)$ – температура для всей области турбулентности пропорциональна колмогоровской энергии. С другой стороны, т.к. $\varepsilon \sim \frac{U^3}{L}$, то $\Theta_l \sim U^2\frac{l}{L}$, т.е. температура Θ_l – это доля полной энергии U^2, которая приходится на масштабы до l. Кроме того, согласно (16) величина $U\dfrac{\partial\Theta_l}{\partial l}$, равная переносу температуры Θ_l (т.е. энергии) по масштабу l со скоростью $U = (\varepsilon L)^{1/3}$, совпадает с величиной потока энергии по спектру ε.

Заметим, что температура Θ_k (15) по колмогоровской энергии много больше температуры Θ_l, которую, как показано ниже, можно связать числом Рейнольдса турбулентных возмущений с масштабом l: $\Theta_l \ll \Theta_k$ при $l \ll L$. Это объяснимо, поскольку каскадные процессы в турбулентности связаны с неустойчивостью гидродинамических течений, а для неустойчивости нет необходимости больших скоростей или энергий. Здесь большое значений имеет форма гидродинамического течения и, в частности, сдвиг скорости.

Характер потери устойчивости гидродинамических течений в самом простейшем виде был рассмотрен Ландау в его модели. Если $A(t)$ — амплитуда возмущений на фоне стационарного течения, то соответствущее модельное уравнение имеет вид

$$\frac{dA^2}{dt} = 2\gamma A^2 - \alpha A^4,$$

где α — постоянная Ландау, $\gamma > 0$ — инкремент неустойчивости. Постоянную α можно по размерности представить в виде $\alpha = \dfrac{\lambda_0}{U^2}$, где U — амплитуда скорости основного течения, $\lambda_0 = \mathrm{const}$. В простейшем случае $\alpha > 0$. Величина A^2 асимптотически стремится к

$$A^2 = \frac{2\gamma}{\alpha},\quad \frac{1}{\alpha} = \frac{U^2}{\lambda_0} = \frac{A^2}{2\gamma},\quad U = \pm A\sqrt{\frac{\lambda_0}{2\gamma}}.$$

Предположим, что величина U — случайная и, как крупномасштабная скорость, имеет гауссовское распределение

$$P(U) = P_0 e^{-\frac{U^2}{2D^2}} = P_0 e^{-\frac{A^2}{\gamma}\frac{\lambda_0}{4D^2}} \equiv \tilde{P}(A),$$

что дает функцию распределения A.

Распределение $\tilde{P}(A)$ можно рассматривать как микроканоническое, предполагая, что дискретный (с шагом $2\pi/L$, L — внешний масштаб турбулентности) спектр волновых чисел от $2\pi/l_k$ (l_k — колмогоровский масштаб) до $2\pi/l$ разбивается на интервалы Δk, $2\pi/L \ll \Delta k \ll 2\pi/l$. Тогда энергию A^2 можно отнести к интервалу Δk. В соответствии с распределением Гиббса формулу для $\tilde{P}(A)$, как вероятность состояния вблизи волнового числа k, можно представить в виде $\exp\left(-\dfrac{A^2}{\Theta}\right)$, где величину $\Theta = \gamma\dfrac{4D^2}{\lambda_0}$, пропорциональную инкременту, следует определить как кинетическую температуру.

Инкремент вблизи критического числа Рейнольдса, следуя Ландау, представляем в виде $\gamma = \mathrm{const}\,(\mathrm{Re} - \mathrm{Re}_{cr})$, т.е. кинетическую температуру для турбулентности можно связать с числом Рейнольдса: $\Theta \sim \mathrm{Re}$. Число Рейнольдса для пульсаций с максимальным масштабом l равно $\mathrm{Re}_l = \dfrac{Ul}{\nu}$, где U — амплитуда скорости в потоке, т.е. температура Θ пропорциональна масштабу l.

С другой стороны, неустойчивость гидродинамических течений в своей основе имеет сдвиговый характер, т.е. инкремент $\gamma \sim U(x)k \sim \Omega lk$, где l — масштаб изменения скорости по координате x, Ω — локальная завихренность, что также задает линейность по l инкремента γ.

Форма (16) для предполагаемой температуры учитывает гидродинамический характер турбулентности, связанный с каскадными процессами передачи энергии, однако никак не отражает возможность разнознакового направления каскада, как, например, формула (15), допускающая разные знаки температуры. В качестве такой формулы можно принять величину, связанную со структурной функцией третьего порядка $D_{LLL}(l) = \left\langle (u_L(x+l) - u_L(x))^3 \right\rangle$, линейной по сдвигу l

$$\Theta_L = -\frac{D_{LLL}(l)}{U},\quad U = (\varepsilon L)^{1/3}. \tag{17}$$

Для инерционного диапазона в трехмерной турбулентности имеется соотношение Колмогорова $D_{LLL}(l) = -\dfrac{4}{5}\varepsilon l$, и формула (17) с точностью до константы переходит в (16). В этом случае $D_{LLL} < 0$, так что $\Theta_L > 0$. Наоборот, для двумерной турбулентности $D_{LLL} > 0$, поскольку поток энергии направлен в сторону укрупнения масштабов, что задает отрицательную температуру $\Theta_L < 0$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Для существования энтропии с интегрирующим множителем $\sim\dfrac{1}{E}$ (как в термодинамике) необходимо, чтобы форма $\dfrac{\varepsilon}{E^{3/2}}$ зависела только от масштаба l. Отсюда $E \sim \varepsilon^{2/3} f(l)$.

2. Если $f(l) \sim l^{2/3}$ (закон Колмогорова—Обухова), то энтропия принимает такую же форму, как для идеального газа в термодинамике, с отличиями, естественно, в коэффициентах. Полученные формулы для энтропии показывают ряд свойств, аналогичных для энтропии термодинамики.

3. В турбулентности основным механизмом передачи энергии является гидродинамическая неустойчивость. Поэтому температура, аналогичная термодинамической $T \sim E$, не отражает разномасштабность турбулентности с потоками энергии по спектру. Предложена формула для кинетической температуры $\Theta_L = -\frac{D_{LLL}(l)}{U}$, включающая структурную функцию третьего порядка, связанную с величиной и направлением потока энергии по спектру масштабов турбулентного течения.

Автор благодарен Г.С. Голицыну и О.Г. Чхетиани за интерес, обсуждения и помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. М. Наука, 1964. 567 с.
2. *Зорич В.А.* Математические аспекты классической термодинамики. М.: МЦНМО, 2019. 164 с.
3. *Климонтович Ю.Л.* Турбулентное движение и структура хаоса. Новый подход к статистической теории открытых систем. М.: КомКнига, 2007. 328 с.
4. *Uruba V.* Energy and entropy in turbulence decompositions // Entropy. 2019. V. 21. P. 124. https://doi.org/10.3390/e21020124
5. *Montgomery D.* Maximal entropy in fluid and plasma turbulence: a review. In Maximum-Entropy and Bayestian Methods in Inverse Problems // Springer-Science + + Business Media. B.V. 1985. P. 455–468.
6. *Arimitsu T., Arimitsu N.* Analysis of fully developed turbulence in terms of Tsallis statistics // Phys. Rev. E. 2000. V. 61. № 3. P. 3237–3240.
7. *Arimitsu T., Arimitsu N.* Tsallis statistics and turbulence // Chaos, Solutions and Fractals. 2002. V. 13. P. 479–489.
8. *Bashkirov A.G.* On maximum entropy principle, superstatistics, power-law distridution and Renyi parameter // Physica A. 2004. V. 340. № 1–3. P. 153–162.
9. *Egolf P.W., Hutter K.* Nonlinear, Nonlocal and Fractional turbulence // Springer. 2020. 474 p. https://doi.org/10.1007/978-3-030-26033-0.
10. *Гледзер Е.Б., Голицын Г.С.* Скейлинг и конечные ансамбли частиц в движении с притоком энергии // Докл. АН. 2010. Т. 433. С. 466–470.
11. *Голицын Г.С.* Статистика и динамика природных процессов и явлений: Методы, инструментарии, результаты. М.:КРАСАНД, 2012. 400 с.

On Termodynamics of Kolmogorov's Scaling in Turbulence

E. Gledzer*

Obukhov Institute of Atmospheric Physics, Russian Academy of Sciences, Pyzhevskii per., 3, Moscow, 109017 Russia

**e-mail: aegledzer@gmail.com*

The model balance equation of turbulence is pesented as the form of the first termodynamics law. The forms for entropy are derived with the help of integrating factor. For Kolmogorov—Obukhov law the entropy has the same expression as for ideal gas. Some possible formula for turbulence temperature is proposed on the basis of hydrodynamical instability processes.

Keywords: entropy, scaling, turbulent cascade