

УДК 532.59:534.1

ДАЛЬНИЕ ПОЛЯ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ПРИ БЫСТРЫХ ВАРИАЦИЯХ ПЛОТНОСТИ В РАДИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ ИСТОЧНИКЕ

© 2021 г. В. В. Булатов^а, *, Ю. В. Владимиров^а, **

^аИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, просп. Вернадского, 101-1, Москва, 119526 Россия

*E-mail: internalwave@mail.ru

**E-mail: vladimyura@yandex.ru

Поступила в редакцию 13.05.2021 г.

После доработки 26.05.2021 г.

Принята к публикации 09.06.2021 г.

Решена задача о дальнем поле внутренних гравитационных волн от мгновенного радиально симметричного возвышения изопикн. Рассмотрено постоянное модельное распределение частоты плавучести и с помощью преобразования Фурье–Ханкеля получено аналитическое решение задачи в виде суммы волновых мод. С помощью метода стационарной фазы получены асимптотики решений, описывающие пространственно-временные характеристики возвышения изопикн, вертикальной и горизонтальной компонент скорости. Проведено сравнение точных и асимптотических результатов, и показано, что на временах порядка десяти и более периодов Брента–Вайсяля метод стационарной фазы позволяет эффективно рассчитывать дальние волновые поля.

Ключевые слова: стратифицированная среда, внутренние гравитационные волны, частота плавучести, дальние поля, вспыхнувший источник

DOI: 10.31857/S0002351521050023

Для мониторинга и предупреждения опасных природных волновых явлений в океане, в том числе обнаружения внутренних гравитационных волн (ВГВ) большой амплитуды, необходимо проводить оперативный анализ многообразных волновых явлений с помощью различных математических моделей [1–4]. Одной из основных используемых моделей можно считать предположение о генерации пакетов ВГВ импульсным воздействием [5–9]. Для проведения расчетов необходимо подбирать параметры использованной модели так, чтобы приблизить смоделированную волновую систему ВГВ к реально наблюдаемому, в том числе по фотоснимкам из космоса, волновым картинам [7, 10–12]. Таким образом, математические модели волновой генерации могут быть не только верифицированы, но и использованы для проведения прогнозных оценок.

Основные механизмы возбуждения ВГВ в природных (океан, атмосфера Земли) и искусственных стратифицированных средах – генерация источниками возмущений различной физической природы: естественного (возмущение атмосферного давления, обтекание неровностей рельефа океана, подветренные горы) и антропогенного (морские технологические конструкции, схлопывание области турбулентного перемешивания, подводные взрывы) характеров [2, 6, 13–15]. Аналитические результаты решений задач о гене-

рации ВГВ произвольными источниками возмущений представляются в самой общей интегральной форме, и в этом случае полученные интегральные представления требуют разработки численных и асимптотических методов их исследования [5, 6]. При исследовании генерации ВГВ, возбуждаемых нелокальными источниками возмущений, наиболее распространенными являются два способа. Первый способ – численное решение системы уравнений гидродинамики, описывающей ВГВ, к недостаткам которого можно отнести ограниченность области пространства, в котором возможно численное решение задачи [5, 8, 9]. При изучении дальнего распространения ВГВ прямые численные расчеты нецелесообразны, так как вдали от источников возмущений волновые поля относительно малы по амплитуде, можно использовать линейное приближение и описать волновое поле сравнительно простыми аналитическими формулами. Создаваемые диспергирующими ВГВ волновые картины на больших расстояниях от источников возмущений (много больших характерных размеров) практически не зависят от их формы и определяются в основном законами дисперсии стратифицированной среды [1, 5, 7, 9, 16]. Поэтому второй способ состоит в том, чтобы заменить функцию, описывающую форму нелокального источника, функцией, имеющей до-

статочное простое аналитическое представление, а также использовать различные модельные представления частоты плавучести [5, 13, 17, 18].

Целью настоящей работы является построение аналитических решений, описывающих дальние поля линейных ВГВ, возбуждаемых мгновенным радиально симметричным возвышением изопикн в слое стратифицированной среды конечной толщины.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМЫ РЕШЕНИЙ

Рассматривается слой стратифицированной среды конечной толщины H . Уравнение линейных ВГВ в цилиндрических координатах (r, z) (предполагается, что зависимости от угла нет, ось z направлена вверх) для малых возмущений возвышения изопикн $\eta(r, z, t)$ в приближении Буссинеска имеет вид [1, 5]

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \eta(r, z, t) + N^2(z) \Delta \eta(r, z, t) = 0,$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r},$$

где далее частота Брента–Вяйсяля (частота плавучести) предполагается постоянной: $N^2(z) = N^2 = \text{const}$. Начальные условия для возвышения изопикн используем в виде: $\eta(r, z, 0) = \eta_0(r, z) = \Phi(r)\Pi(z)$, то есть предполагается, что начальное возмущение обладает радиальной симметрией и некоторым распределением по глубине. Начальные условия для вертикальной компоненты скорости: $W(r, z, 0) = 0$. Начальные условия для горизонтальной (радиальной) компоненты скорости: $U(r, z, 0) = 0$. Граничные условия: $\eta(r, z, t) = 0$ при $z = 0, -H$. Отметим, что горизонтальная (радиальная) компонента скорости $U(r, z, t)$ равна нулю при $r = 0$ и всех значениях t , то есть $U(0, z, t) \equiv 0$. Все искомые функции зависят от радиальной координаты r , времени t и вертикальной координаты z , зависимость от угла отсутствует. Решение полученной начально-краевой задачи строится с помощью преобразования Фурье–Ханкеля [19, 20]

$$\begin{aligned} \eta(r, z, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(z) g_n(r, t), \\ \varphi_n(z) &= \sin(b_n z), \quad b_n = \frac{\pi n}{H}, \\ a_n &= \frac{2}{H} \int_{-H}^0 \Pi(z) \varphi_n(z) dz, \end{aligned} \quad (1)$$

$$g_n(r, t) = \int_0^{\infty} A(k) k J_0(kr) \cos(\omega_n(k) t) dk,$$

$$\omega_n(k) = kN / \sqrt{k^2 + b_n^2}, \quad A(k) = \int_0^{\infty} r J_0(kr) \Phi(r) dr,$$

где J_0 – функция Бесселя нулевого порядка. Отметим, что в силу постоянства частоты плавучести функция $A(k)$ не зависит от номера моды n и $g_n(r, 0) = \Phi(r)$ для всех номеров n . Выражения для вертикальной компоненты скорости $W(r, z, t) = \frac{\partial \eta(r, z, t)}{\partial t}$ имеет вид

$$W(r, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(z) p_n(r, t), \quad (2)$$

$$p_n(r, t) = - \int_0^{\infty} A(k) k J_0(kr) \omega_n(k) \sin(\omega_n(k) t) dk.$$

Выражение для горизонтальной (радиальной) компоненты скорости $U(r, z, t)$ определяется из уравнения несжимаемости в цилиндрических координатах [1, 5]

$$\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0,$$

а также из условия, что решением уравнения [19, 20]

$$\frac{\partial Y(kr)}{\partial r} + \frac{Y(kr)}{r} = J_0(kr)$$

является функция $Y(kr) = J_1(kr)/k$, где J_1 – функция Бесселя первого порядка. В результате можно получить

$$\begin{aligned} U(r, z, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} U_n = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \psi_n(z) q_n(r, t), \\ \psi_n(z) &= \cos(b_n z), \quad d_n = b_n a_n, \end{aligned} \quad (3) \quad (3)$$

$$q_n(r, t) = \int_0^{\infty} A(k) J_1(kr) \omega_n(k) \sin(\omega_n(k) t) dk.$$

В безразмерных переменных $r^* = r\pi/H$, $z^* = z\pi/H$, $k^* = k\pi/H$, $\tau = Nt$ (знак “*” далее опускается) выражения (1)–(3) можно представить в виде

$$g_n(r, \tau) = \int_0^{\infty} A(k) k J_0(kr) \cos(\omega_n(k) \tau) dk,$$

$$p_n(r, \tau) = - \int_0^{\infty} A(k) k J_0(kr) \omega_n(k) \sin(\omega_n(k) \tau) dk,$$

$$q_n(r, \tau) = \int_0^{\infty} A(k) J_1(kr) \omega_n(k) \sin(\omega_n(k) \tau) dk, \quad (4)$$

$$\varphi_n(z) = \sin(nz), \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^0 \Pi(z) \sin(nz) dz,$$

$$\psi_n(z) = \cos(nz), \quad d_n = n a_n, \quad \omega_n(k) = k / \sqrt{k^2 + n^2}.$$

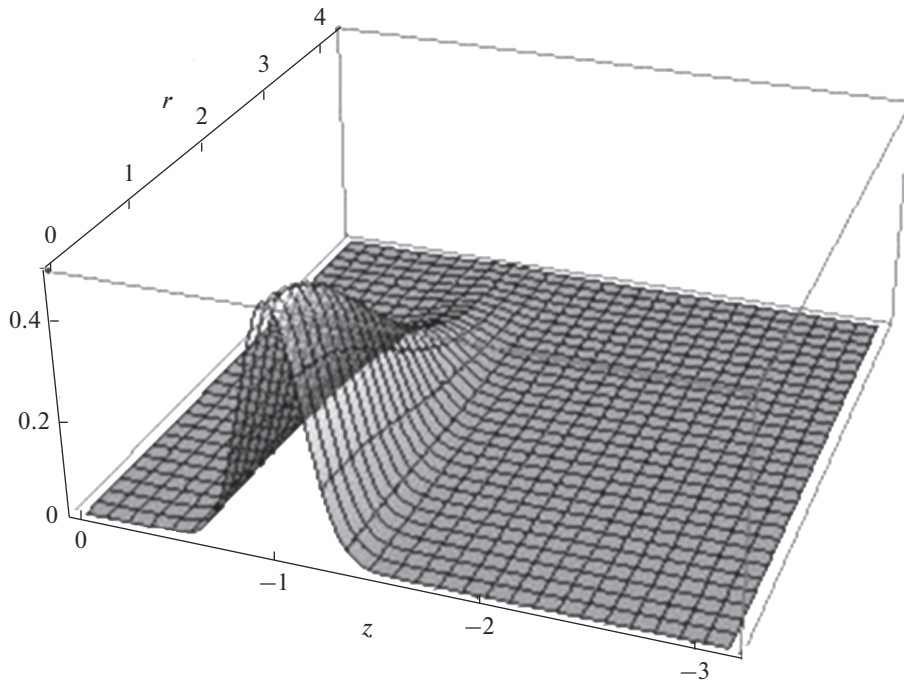


Рис. 1. Начальное распределение возвышения изопикн.

2. АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ

В заданном начальном распределении возвышения изопикн $\eta_0(r, z)$ будем считать, что функции $\Phi(r), \Pi(z)$ нормированы на свои максимальные (по модулю) значения. Далее, в качестве модельного, рассмотрим следующее радиальное распределение начального возмущения: $\Phi(r) = \exp(-r^2/4)/2$ (множитель $1/2$ используется для простоты выкладок). Тогда из (1) имеем: $A(k) = \exp(-k^2)$. Интегралы (4) при больших значениях $r \gg 1, \tau \gg 1$ можно вычислить с помощью метода стационарной фазы. С этой целью необходимо заменить функцию Бесселя на ее асимптотику: $J_0(kr) \approx \sqrt{2/\pi kr} \cos(kr - \pi/4)$ [19, 20]. Подставляя это выражение в (4), можно получить

$$g_n(r, \tau) = \sqrt{2/\pi r} \int_0^\infty \exp(-k^2) \sqrt{k} \cos(kr - \pi/4) \times \\ \times \cos(\omega_n(k)\tau) dk = I_n^+ + I_n^-, \\ I_n^\pm = \sqrt{1/2\pi r} \int_0^\infty \exp(-k^2) \sqrt{k} \cos(kr \pm \omega_n(k)\tau - \pi/4) dk.$$

При больших значениях r, τ интеграл I_n^+ экспоненциально мал, так как стационарных точек на интервале интегрирования нет. С помощью метода стационарной фазы можно получить уравнение для нахождения стационарных точек: $\omega'_n(k) = \rho, \rho = r/\tau$. Решение этого уравнения име-

ет вид: $k_n(\rho) = n\sqrt{(\rho n)^{-2/3} - 1}$. Окончательно можно получить

$$g_n(r, \tau) \approx G_n(r, \tau) \cos(\Phi_n(r, \tau)), \\ G_n(r, \tau) = \frac{n^2 \exp(n^2(1 - (n\rho)^{-2/3}))}{\sqrt{3\tau(n\rho)^{4/3}}}, \quad (5) \\ \Phi_n(r, \tau) = \tau(1 - (n\rho)^{2/3})^{3/2}.$$

Аналогично, с помощью метода стационарной фазы имеем

$$p_n(r, \tau) \approx P_n(r, \tau) \sin(\Phi_n(r, \tau)), \\ P_n(r, \tau) = -(1 - (n\rho)^{2/3})^{1/2} G_n(r, \tau), \\ q_n(r, \tau) \approx Q_n(r, \tau) \cos(\Phi_n(r, \tau)), \\ Q_n(r, \tau) = \frac{\exp(n^2(1 - (n\rho)^{-2/3}))}{\sqrt{3\rho\tau}}.$$

Полученные асимптотические формулы для функций $g_n(r, \tau), p_n(r, \tau), q_n(r, \tau)$ позволяют соответственно рассчитывать пространственно-временные характеристики возвышения изопикн, вертикальной и горизонтальной (радиальной) компоненты скорости ВГВ вдали от вспыхнувшего в начальный момент времени источника возмущений.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

На рис. 1 изображено начальное распределение возмущения – функция $\eta_0(r, z)$, где функция

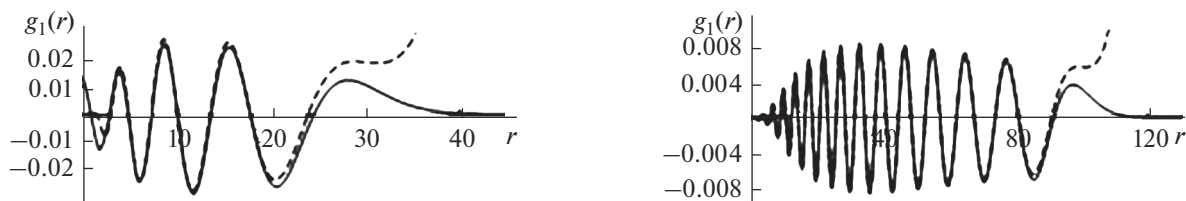


Рис. 2. Возвышение первой моды: точное решение и асимптотика стационарной фазы.

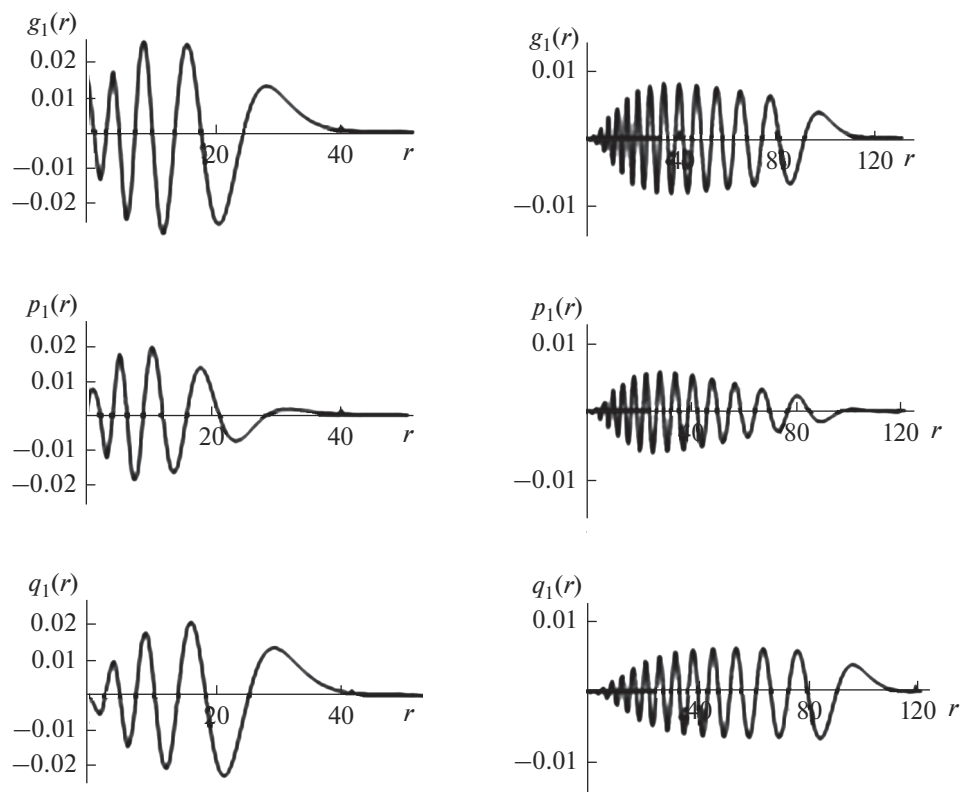


Рис. 3. Возвышение, вертикальная и радиальная компоненты скорости первой моды.

$\Pi(z)$ имеет один максимум. Для численных расчетов было использовано следующее представление этой функции: $\Pi(z) = z^\alpha(1 - z^\beta)$, значения параметров были следующие: $\alpha = 33$, $\beta = 57$. Все численные расчеты произведены с помощью вычислительной системы “Математика”. Использованные пространственные масштабы и характер изменчивости начального возмущения изопоки соответствуют типичным горизонтальным и вертикальным масштабам нелокальных источников возбуждения ВГВ в океане [2, 6, 7, 10–14]. На рис. 2 представлены результаты расчетов функции $g_1(r, \tau)$ (первая мода возвышения) при значениях $\tau = 30$ (левый рисунок) и $\tau = 70$ (правый рисунок). Сплошная линия – результаты точных численных расчетов по формуле (1), штриховая линия – расчеты по методу стационарной фазы (5).

Из представленных результатов видно хорошее совпадение точных и асимптотических формул при больших значениях r, τ . Как показывают численные расчеты, на временах порядка десяти и более периодов Брента–Вяйсяля метод стационарной фазы позволяет достаточно точно рассчитывать дальние волновые поля. На рис. 3 представлены результаты расчетов функций $g_1(r, \tau)$ (первая мода возвышения), $p_1(r, \tau)$ (первая мода вертикальной компоненты скорости), $q_1(r, \tau)$ (первая мода горизонтальной (радиальной) компоненты скорости) при $\tau = 30$ (левый рисунок) и $\tau = 70$ (правый рисунок). На рис. 4 приведены результаты расчетов первых трех мод вертикальной компоненты скорости $p_n(r, \tau)$, $n = 1, 2, 3$ и суммы мод $\Sigma = p_1 + p_2 + p_3$ при $\tau = 70$. Как показывают

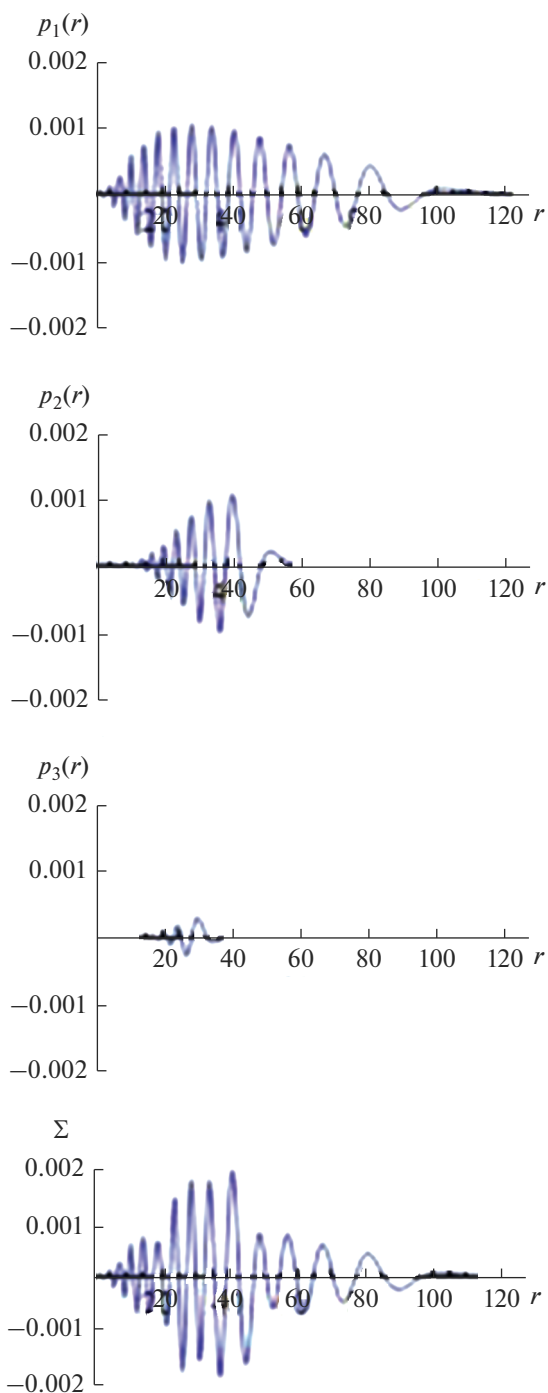


Рис. 4. Вертикальная компонента скорости первых трех мод и их сумма.

численные расчеты, основной вклад в полное волновое при больших временах поле вносят несколько низших мод. [5, 9, 13, 18]

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, для заданного начального возмущения изопикн, обладающего радиальной

симметрией и вертикальным распределением с одним максимумом с помощью метода стационарной фазы построены асимптотические решения, описывающие динамику пакетов ВГВ на больших временах. Используемое в качестве начального модельное распределение возвышения может адекватно описать различные физически обоснованные механизмы генерации пакетов ВГВ, в том числе волны больших амплитуд [6, 7, 10–13]. Полученные результаты позволяют аналитически представить как возвышение, так и все компоненты скоростей возбуждаемых ВГВ. Показано, что асимптотики стационарной фазы хорошо описывают волновые поля ВГВ на больших временах и расстояниях. Полученные асимптотические результаты с различными значениями входящих в них физических параметров дают возможность в дальнейшем провести оценку основных характеристик начального возмущения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ проект № 20-01-00111А.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.
2. Коняев К.В., Сабинин К.В. Волны внутри океана. СПб.: Гидрометеоздат, 1992. 272 с.
3. Pedlosky J. Waves in the ocean and atmosphere: introduction to wave dynamics. Berlin–Heidelberg: Springer, 2010. 260 p.
4. Sutherland B.R. Internal gravity waves. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 394 p.
5. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015. 735 с.
6. Morozov E.G. Oceanic internal tides. Observations, analysis and modeling. Berlin: Springer, 2018. 317 p.
7. Velarde M.G., Tarakanov R. Yu., Marchenko A. V. (Eds.). The ocean in motion / Springer Oceanography. Springer International Publishing AG, 2018. 625 p.
8. Гуцин В.А., Матюшин П.В. Моделирование и исследование течений стратифицированной жидкости около тел конечных размеров // Журн. вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56. № 6. С. 1049–1063.
9. Матюшин П.В. Процесс формирования внутренних волн, инициированных начальным движением тела в стратифицированной вязкой жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2019. № 3. С. 83–97.
10. Беляев М.Ю., Десинов Л.В., Крикалев С.К., Кумакишев С.А., Секерж-Зенькович С.Я. Идентификация системы океанских волн по фотоснимкам из космоса // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 1. С. 117–127.
11. Morozov E.G., Tarakanov R. Yu., Frey D.I., Demidova T.A., Makarenko N.I. Bottom water flows in the tropical fractures of the Northern Mid-Atlantic Ridge // J. Oceanography. 2018. V. 74. № 2. P. 147–167.

12. *Khimchenko E.E., Frey D.I., Morozov E.G.* Tidal internal waves in the Bransfield Strait, Antarctica // *Russ. J. Earth. Science.* 2020. V. 20. ES2006.
13. *Voelker G.S., Myers P.G., Walter M., Sutherland B.R.* Generation of oceanic internal gravity waves by a cyclonic surface stress disturbance // *Dynamics Atm. Oceans.* 2019. V. 86. P. 116–133
14. *Haney S., Young W.R.* Radiation of internal waves from groups of surface gravity waves // *J. Fluid Mech.* 2017. V. 829. P. 280–303.
15. *Wang J., Wang, S., Chen X., Wang W., Xu Y.* Three-dimensional evolution of internal waves rejected from a submarine seamount // *Physics Fluids.* 2017. V. 29. P. 106601.
16. *Свиркунов П.Н., Калашиник М.В.* Фазовые картины диспергирующих волн от движущихся локализованных источников // *Успехи физических наук.* 2014. Т. 184. № 1. С. 89–100.
17. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Аналитические решения уравнения внутренних гравитационных волн, генерируемых движущимся нелокальным источником возмущений // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 2021. Т. 61. № 4. С. 572–579.
18. *Bulatov V., Vladimirov Yu.* Generation of internal gravity waves far from moving non-local source // *Symmetry.* 2020. V. 12(11). P. 1899.
19. *Watson G.N.* A treatise on the theory of Bessel functions (Reprint of the 2nd ed.). Cambridge: Cambridge University Press, 1995. 804 p.
20. *Froman N.* Physical problems solved by the phase-integral method / *N. Froman, P. Froman.* Cambridge: Cambridge University Press, 2002. 214 p.

Far Internal Gravity Waves Fields under Fast Density Variation in Radial Symmetry Source

V. V. Bulatov^{1, *} and Yu. V. Vladimirov^{1, **}

¹*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, prosp. Vernadskogo, 101-1, Moscow, 119526 Russia*

**e-mail: internalwave@mail.ru*

***e-mail: vladimyura@yandex.ru*

The problem of the internal gravity waves far field from the instantaneous radially symmetric isopycn elevation is solved. The constant model distribution of the buoyancy frequency is considered and an analytical solution of the problem in the form of a sum of wave modes is obtained using the Fourier–Hankel transform. Using the stationary phase method, the asymptotics of the solutions are obtained that describe the space-time characteristics of the isopycn elevation, the vertical and horizontal velocity components. The exact and asymptotic results are compared. It is shown that for times of the order of several tens of Brent–Väisälä periods, the stationary phase method allows one to efficiently calculate far wave fields.

Keywords: stratified medium, internal gravity waves, buoyancy frequency, far fields, flashed source