

УДК 551.465

## ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЗАВИХРЕННОСТЬ В ОКЕАНЕ: ПОДХОДЫ ЭРТЕЛЯ И РОССБИ С ОЦЕНКАМИ ДЛЯ ЛОФОТЕНСКОГО ВИХРЯ

© 2021 г. В. В. Жмур<sup>a, b</sup>, Е. В. Новоселова<sup>a</sup>, Т. В. Белоненко<sup>a, \*</sup>

<sup>a</sup>Санкт-Петербургский государственный университет,  
Университетская наб., 7–9, Санкт-Петербург, 199034 Россия

<sup>b</sup>Институт океанологии им. П.П. Шишова РАН, Нахимовский просп., 36, Москва, 117997 Россия

\*e-mail: t.v.belonenko@spbu.ru

Поступила в редакцию 06.03.2021 г.

После доработки 10.04.2021 г.

Принята к публикации 09.06.2021 г.

В работе рассматривается понятие “потенциальная завихренность в океане”, включая историю появления этого термина. Обсуждаются различные аспекты и основные формулы, по которым на практике проводятся расчеты потенциальной завихренности, а также условия выполнения закона ее сохранения. Рассматриваются два подхода к потенциальной завихренности: по формулам Россби и Эртеля. Для иллюстрации основных выводов приводятся оценки потенциальной завихренности для квазипостоянного антициклонического Лофотенского вихря Норвежского моря. Для расчетов используются данные глобального океанического реанализа GLORYS12V1. Установлено, что потенциальная завихренность по Эртелю является кинематической характеристикой и определяет ядро вихря, в котором значения характеристики нулевые, а на периферии ядра, где наблюдается сгущение изопикн, значения могут достигать величин  $-1.0 \times 10^{-10} \text{ м}^{-1} \text{ с}^{-1}$ . Построены вертикальные и горизонтальные разрезы относительной и потенциальной завихренности. Установлено, что при расчете потенциальной завихренности суммарный вклад членов, отвечающих за горизонтальные составляющие, существенно меньше, чем слагаемое с вертикальными составляющими. В отличие от потенциальной завихренности по Эртелю, потенциальная завихренность по Россби в квазигеострофическом приближении является динамической характеристикой. Основной вклад дает относительная завихренность, которая характеризует вращение частиц. Объемная потенциальная завихренность характеризует мощность вихря. Наибольшее по величине значение потенциальной завихренности соответствует горизонту 500 м и составляет  $-1.3 \times 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ ; на горизонтах ниже 1000 м величины не превышают  $1.0 \times 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ , а на горизонте 3000 м  $-0.5 \times 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ . Объемная потенциальная завихренность для Лофотенского вихря равна  $-9.82 \times 10^6 \text{ с}^{-1}$ . Для ядра (до 1000 м) она составляет  $-2.28 \times 10^8 \text{ с}^{-1}$ .

**Ключевые слова:** потенциальная завихренность, Россби, Эртель, закон сохранения, Лофотенский вихрь

**DOI:** 10.31857/S0002351521050151

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Потенциальная завихренность ( $PV$ ) — центральное понятие гидродинамики и физической океанографии, характеризующее многие процессы динамики атмосферы и океана. Обзор литературных источников показывает, что разные авторы трактуют  $PV$  по-разному, используя разные формулы для расчетов  $PV$ . Это говорит о том, что на практике  $PV$  не является простой характеристикой. В нашей работе мы попытались проанализировать существующие подходы и продемонстрировать их на примере оценок  $PV$  для квазипо-

стоянного антициклонического Лофотенского вихря, расположенного в Норвежском море.

Роль  $PV$  была впервые показана Карлом-Густавом Россби в 1930-х гг. прошлого века [1–3]. Ключевыми свойствами  $PV$  являются обратимость, материальная инвариантность и выполнение теоремы о непроницаемости (the impenetrability theorem). Обратимость подразумевает, что вихревые потоки импульса в океане тесно связаны с изоэнтропическими вихревыми потоками  $PV$ , в том числе из-за сильно нелинейных возмущений. Материальная инвариантность означает постоянство  $PV$  для жидких частиц. Теорема о не-

проницаемости [4, 5] утверждает, что отсутствует чистый перенос  $PV$  через изопикнические (или изэнтропические) поверхности [6]. В этом случае выполняется закон сохранения: если изопикнические поверхности замкнуты (нет областей их выхода на поверхность), объемный интеграл Эртеля, т.е.  $PV$  внутри замкнутых изопикнических поверхностей, сохраняется независимо от их эволюции. И наоборот, изменение интеграла объема  $PV$  в изопикническом слое возможно только тогда, когда изопикнические поверхности выходят на поверхность. Это означает, что существует связь между объемным интегралом  $PV$  и физическими полями с учетом выхода их на поверхность (или дно) [6].

Термин “потенциальная завихренность” впервые ввел Россби в своей работе 1936 г., показав, что локальная относительная завихренность связана законом сохранения с локальной толщиной изначально покоящегося слоя жидкости. Идея Россби заключалась в том, чтобы ввести величину, которая определялась бы вертикальной составляющей относительной завихренности по аналогии с тем, как потенциальная температура определяется температурой воды. Эта идея Россби сегодня признана имеющей центральное и далеко идущее значение для понимания вихревой динамики в океане. Квазигеострофическая потенциальная завихренность в океане (иногда в литературе используется также термин псевдопотенциальная завихренность) ассоциируется с именем Россби [7].

Вклад Россби и Эртеля хорошо отражен в фундаментальной обзорной статье [8]. Часто предполагается, что Россби [1–3] и Эртель [9–11] независимо друг от друга вывели закон сохранения потенциальной завихренности. Эртель в определении потенциального вихря использовал потенциальную температуру (для “сухой” атмосферы). Идею использовать плотность в случае несжимаемого движения стратифицированной (по плотности) жидкости, по всей видимости, впервые предложил К. Трусделл [12].

Однако статьи Россби, опубликованные ранее статей Эртеля, свидетельствуют о первенстве именно Россби, а не Эртеля. Тем не менее, известная теорема о сохранении потенциальной завихренности сегодня носит имя Эртеля, так как чаще всего она используется в формулировке Эртеля.

Рассматривая сохранение потенциальной завихренности, нужно различать два аспекта: сохранение  $PV$  и сохранение субстанции потенциальной завихренности. Скорость изменения  $PV$  определяется расходом вектора потока через поверхность.  $PV$  является инвариантом в том смысле, что  $PV$  в глобальном смысле (по объему Мирового океана) всегда сохраняется. Сохранение субстанции потенциальной завихренности

означает, что потенциальная завихренность каждой частицы жидкости не изменяется при движении жидкости. Это более сильный закон сохранения, который выполняется только при ограничительных условиях. Первое условие — жидкость должна быть идеальной. Молекулярная вязкость и диффузия нарушают сохранение потенциальной завихренности. Второе условие — это ограничение на уравнение состояния жидкости: жидкость должна быть однокомпонентной. Если оба условия выполняются, тогда существует такой инвариант, что потенциальная завихренность, образованная этим инвариантом, сохраняется [13]. Потенциальная завихренность всегда сохраняется для идеальных океанических движений, когда термобарический коэффициент (зависящий от изменений давления коэффициентов теплового расширения и халинного сжатия) предполагается равным нулю, как, например, для несжимаемой морской воды (несжимаемость является вполне допустимым предположением для многих океанических движений).

Однако в действительности морская вода — это жидкость, компонентами которой являются вода и соль, и поэтому, вообще говоря,  $PV$  не сохраняется (за исключением случаев, когда уравнения для температуры и солёности можно привести к одному уравнению для потенциальной плотности). Термобаричность морской воды, молекулярная вязкость, солёность и коэффициент диффузии всегда изменяют потенциальную завихренность жидкой частицы. Именно термобаричность и механизмы молекулярной диссипации изменяют потенциальную завихренность при использовании различных приближений, применяемых к динамическим уравнениям (приближения Буссинеска, мелкой воды,  $f$ - и  $\beta$ -плоскости и т.д.).

Сегодня достижения в области компьютерных технологий и развитие моделирования позволяют изучать распределения  $PV$  для различных масштабов — будь то весь Мировой океан [14], отдельные акватории [15] или фронтальные зоны в океане [16]. В каждом из таких случаев анализ распределений  $PV$  позволяет лучше понять физику анализируемых процессов.

**Целью** нашей работы является анализ основных подходов для оценки потенциальной завихренности, а также их применение для Лофотенского вихря.

## 2. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

### 2.1. Лагранжевы инварианты и условия выполнения закона сохранения $PV$

Пусть переменная  $q(x, y, z, t)$  является лагранжевым инвариантом, что означает, что физическая величина  $q(x, y, z, t)$  сохраняется для жидкой частицы во время ее движения, где  $x$  и  $y$  — гори-

зонтальные переменные,  $z$  – вертикальная,  $t$  – время; система координат правая.

Согласно теореме Эртеля, величина

$$\Omega_* = \frac{(\Omega + 2\omega)\nabla\eta}{\rho} \quad (1)$$

является лагранжевым инвариантом. Величину  $\Omega_*$ , рассчитываемую по формуле (1), назовем “потенциальной завихренностью в широком смысле”. Здесь функция  $\eta(x, y, z, t)$  – также некий лагранжевый инвариант,  $\Omega = \text{rot } \mathbf{U}$  – ротор скорости потока,  $\omega$  – угловая скорость вращения Земли,  $\rho(x, y, z, t)$  – плотность воды. Условия, при которых  $\Omega_*$  является лагранжевым инвариантом следующие:

1. Жидкость идеальная (вязкость отсутствует);
2. Массовые силы потенциальны  $\text{rot } \mathbf{F} = 0$ ;
3. Характеристика  $\eta(x, y, z, t)$  является лагранжевым инвариантом;
4. Характеристика  $\eta(x, y, z, t) = \eta(\rho, P)$  зависит от плотности  $\rho$  и давления  $P$ .

Нарушение этих условий приводит к тому, что  $\Omega_*$  перестанет сохраняться для жидкой частицы и уже не будет являться лагранжевым инвариантом. Часть этих условий можно принять, как, например, условие 2. Условие 1 считается справедливым для очень многих типов движения геофизической гидродинамике, в том числе для мезомасштабных явлений. Однако это условие нарушается в тонких придонных и приповерхностных экмановских слоях. Условие 3 самое расплывчатое: можно в качестве  $\eta$  взять энтропию, как часто делают в физике атмосфер, но тогда рассматриваются только адиабатические процессы. Но для океана в этом случае возникает проблема со свойством 4, где энтропия зависит не только от  $\rho$  и давления  $P$ , но также от солености и температуры. Однако в этом случае можно использовать другие лагранжевы инварианты, например, потенциальную плотность или потенциальную температуру, которые обладают нужными свойствами. Эртель для океана предложил в качестве функции  $\eta(x, y, z, t)$  использовать плотность  $\rho$  с дополнительным условием несжимаемости:

$$\Omega_* = \frac{(\Omega + 2\omega)\nabla\rho}{\rho} \quad (2)$$

Далее мы будем использовать выражение “потенциальная завихренность” в терминах соотношения (2), введя для него специальное обозначение  $PV$ :

$$PV = \frac{(\Omega + 2\omega)\nabla\rho}{\rho} \quad (3)$$

Условия, при которых  $PV$  по формуле (3) является лагранжевым инвариантом, следующие:

- a) жидкость идеальная (вязкость отсутствует);
- b) массовые силы потенциальны  $\text{rot } \mathbf{F} = 0$ ;
- c) жидкость несжимаемая;
- d) диффузия плотности отсутствует.

Нарушение перечисленных требований приводит к тому, что рассчитываемое по формуле (3)  $PV$  для жидких частиц не сохраняется и, следовательно, не может являться лагранжевым инвариантом [13].

С точки зрения физики потенциальная завихренность  $PV$  представляет собой лагранжев инвариант, объединяющий свойства – вращение жидкой частицы и деформацию ее формы. В геометрическом смысле это скалярное произведение векторов полного вихря и градиента логарифма плотности. Направление градиента плотности, называемое термодинамической вертикалью, слабо отличается от географической вертикали. Это дает возможность совершать различного рода упрощения математических формулировок задач.  $PV$  – это кинематическая характеристика движущейся частицы. В общем случае потенциальный вихрь не сохраняется. Однако в каких-то зонах океана это несохранение незначительно или эволюция происходит слишком медленно, так что на характерных рассматриваемых временных масштабах потенциальный вихрь частиц почти сохраняется. В этом случае можно рассматривать модели океана с сохраняющейся потенциальной завихренностью жидких частиц.

В гидродинамике под вихрем мы понимаем вращающуюся жидкость, а в качестве наиболее адекватной кинематической характеристики для описания вихрей считается ротор скорости  $\Omega = \text{rot } \mathbf{U}$ , т.е. относительная завихренность. Именно по величине  $\Omega$  мы судим о том, сильный вихрь или слабый, а по знаку вертикальной компоненты  $\Omega$  мы определяем его полярность. Однако исключительно по величине  $PV$  мы ничего не можем сказать об интенсивности вихря и даже не можем определить: циклон это или антициклон. Большая величина  $PV$  не означает, что здесь присутствует интенсивный вихрь, и, наоборот, малое значение  $PV$  не связано со слабым вихрем.

Если  $PV$  не характеризует интенсивность вихря, тогда возникает законный вопрос: какая польза от  $PV$ ? Ответ зависит от ответа еще на один вопрос: является ли  $PV$  лагранжевым инвариантом или нет? Если  $PV$  – лагранжев инвариант, т.е. сохраняется у движущейся частицы, то, нарисовав изолинии  $PV(x, y, z, t)$  (или поверхности равной потенциальной завихренности), мы выделяем области, из которых частица выйти не может. Частицы не пересекают поверхности равных значений потенциальной завихренности  $PV(x, y, z, t)$ ,

однако при своем движении частицы могут деформировать и передвигать контуры равной  $PV$ . Благодаря изолиниям  $PV(x, y, z, t)$  мы можем определить области движения частиц жидкости.

Однако, если  $PV$  не лагранжевы инвариант, т.е. не сохраняется у движущейся частицы, то, даже рассчитав поля  $PV(x, y, z, t)$ , мы не сможем найти ограничения на области движения частиц. В этом случае частицы могут пересекать изолинии  $PV(x, y, z, t)$ . Для частиц во время их перемещений изменяется величина  $PV = \frac{(\Omega + 2\omega)\nabla\rho}{\rho}$ . Это означает, что у частиц изменяется относительная завихренность  $\Omega = \text{rot } \mathbf{U}$  совместно с полем плотности в окружающем частицу пространстве. При этом уменьшение  $PV$  не обязательно сопровождается ослаблением вихря.

Таким образом, в общем случае потенциальный вихрь  $PV$  не сохраняется в областях океана, где генерируются вихри, как и не сохраняется в зонах, где вихри быстро диссипируют из-за вязкости.

## 2.2. Подход Эртеля

Основные методы расчета  $PV$  опираются на теорему Эртеля, где исходной формулой является соотношение (3). Однако в действительности расчеты по этой формуле практически никто не делает. Дело, по-видимому, в том, что при вычислении  $\nabla\rho$  по натурным данным очень неравноценны вертикальная и горизонтальная составляющие и их изменчивость. В вертикальном направлении  $\nabla\rho$  сильно изрезан, и часто требуется сглаживание, которое, в свою очередь, нивелирует некоторые движения. Один из вариантов расчета  $PV$  предполагает отдельно вычислять вертикальные и горизонтальные составляющие, а именно:

$$\begin{aligned} PV &= \frac{(\Omega + 2\omega)\nabla\rho}{\rho} = \\ &= \frac{(\Omega + 2\omega)_z \frac{\partial\rho}{\partial z}}{\rho} + \frac{(\Omega + 2\omega)_h \nabla_h \rho}{\rho}. \end{aligned} \quad (4)$$

Далее в первом слагаемом формулы (4) делают следующие подстановки:  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial z} \cong -\frac{1}{g} N^2(z)$ ,  $\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \zeta$ ,  $u$  и  $v$  – горизонтальные составляющие вектора скорости  $\mathbf{V} = \{u, v, w\}$ ,  $2\omega_z = f = 2\omega \sin \varphi$ ,  $\omega$  – угловая скорость вращения Земли,  $N$  – частота Вайсяля–Брента,  $f$  – параметр Кориолиса,  $g$  – ускорение свободного падения,  $\varphi$  –

широта. Тогда формула (4) переписывается следующим образом:

$$PV = -\frac{(f + \zeta)N^2}{g} + \frac{(\Omega + 2\omega)_h \nabla_h \rho}{\rho}. \quad (5)$$

Многие авторы при расчете  $PV$  отбрасывают горизонтальные составляющие формул (4) или (5), считая их малыми по сравнению с первым слагаемым, а также иногда меняют знак  $PV$  на противоположный для того, чтобы значения  $PV$  были положительными, что позволяет использовать для оценок логарифмическую шкалу. Рассмотрим несколько формул, по которым на практике часто рассчитывается потенциальная завихренность для вихрей.

В работе [17] при расчете  $PV$  для Лофотенского вихря авторы отбрасывают второе слагаемое и рассчитывают только вертикальную составляющую потенциальной завихренности  $q$  по формуле:

$$q = \frac{(f + \zeta) \frac{\partial\rho}{\partial z}}{\rho_0}, \quad (6)$$

где  $\rho_0$  – референтная плотность, относящаяся к поверхности. Изменение знака в формуле (6), очевидно, связано с тем, что расчеты  $PV$  по формуле (6) дают отрицательные значения (в северном полушарии), так как  $\frac{\partial\rho}{\partial z} < 0$  (ось  $z$  направлена вверх).

В работе [18] потенциальную завихренность для антициклонического вихря, расположенного в желобе Роккол (Rockall Trough), рассчитывают по более полной формуле:

$$PV = \frac{(f + \zeta)N^2}{g} + \frac{1}{\sigma_0} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial \sigma_0}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \sigma_0}{\partial y} \right). \quad (7)$$

Формула (7) является одной из форм записи формулы (5), где вместо  $\rho$  используется  $\sigma_0$  – потенциальная плотность, а горизонтальный градиент скорости записывается в виде:  $\Omega_h = \left\{ \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right\} \approx \left\{ -\frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}$ . Еще одно упрощение в формуле (7), это  $(\Omega + 2\omega)_h \approx \Omega_h$ . Обратим внимание, что в формуле (7) оба слагаемых снова взяты с обратным знаком.

Далее, учитывая, что  $b = -\frac{g\rho}{\rho_0}$  – сила плавучести, формулу (5) можно записать в другом виде:

$$PV = -\frac{(f + \zeta)N^2}{g} - \frac{(\Omega + 2\omega)_h \nabla_h b}{g}. \quad (8)$$

Здесь  $\Omega_h = \left\{ \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right\}$  – горизонтальные составляющие ротора скорости (горизонтальная завихренность). Если не учитывать вертикальную составляющую скорости  $w$  и также пренебречь членом с  $\omega_h$  в силу его малости, получим

$$\Omega_h \nabla_h b = -\frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial b}{\partial y}.$$

Тогда формулу (8) можно записать в виде:

$$PV = -\frac{(f + \zeta)N^2}{g} - \frac{(\Omega + 2\omega)_h \nabla_h b}{g} = -\frac{(f + \zeta)N^2}{g} + \frac{1}{g} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial b}{\partial y} \right). \quad (9)$$

Формула (9) чаще всего используется при расчете потенциальной завихренности для вихрей, в частности, в работе [19], где она используется в полярной системе координат  $(r, \theta)$ :

$$PV(r, z) \equiv (\nabla \times \mathbf{V} + f\mathbf{z}) \cdot \frac{\nabla b}{g} = \frac{(f + \zeta(r, z))N(r, z)^2}{g} - \frac{1}{g} \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \frac{\partial b}{\partial r}. \quad (10)$$

Здесь  $\mathbf{V}$  – поле скорости,  $b \equiv -g \frac{\rho}{\rho_0}$  – ускорение силы плавучести,  $N^2 \equiv \frac{\partial b}{\partial z}$ , а  $\zeta \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial(r\theta_0)}{\partial r}$  – относительная завихренность.

### 2.3. Недостатки формулы (9)

При замене  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \equiv -\frac{1}{g} N^2(z)$  предполагается, что возмущение частоты Вьяйсяля–Брента движением жидкости мало. Но в мезомасштабных вихрях подъем и опускание изопикн в действительности может быть очень большим, особенно в периоды зимней конвекции [20–22]. Поэтому в расчетах частоты Вьяйсяля–Брента возможны большие погрешности, которые ведут к погрешности оценок  $PV$  по формуле (9).

Кроме того, стандартная частота Вьяйсяля–Брента вычисляется в состоянии покоя [23]. При наличии движения она может также зависеть и от пространственных переменных, причем эти изменения могут быть существенными. Однако в формуле (9) все это не учитывается. Таким образом, главная возможная причина отличия соотношений (3) и (9) кроется в именно в частоте Вьяйсяля–Брента.

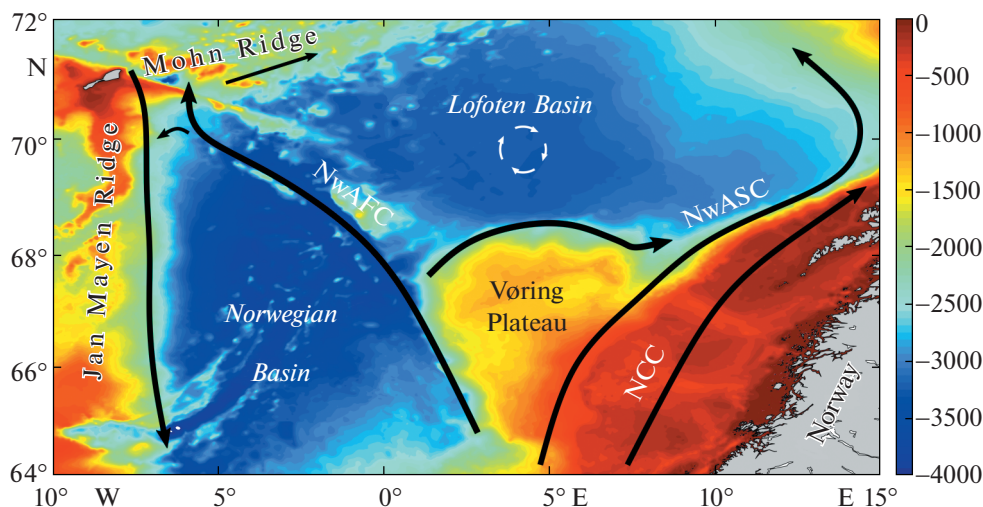
Тогда возникает резонный вопрос: а почему бы сразу не работать с исходной формулой Эртеля (3) и не переходить к другим формам записи? Очевидно, что ответ положительный, и тогда получается выражение для  $PV$ , выражающее зависимость непосредственно от градиентов плотности и скоростей течений:

$$PV = \frac{(\Omega + 2\omega) \nabla \rho}{\rho} = \frac{(\Omega + 2\omega)_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + (\Omega + 2\omega)_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + (\Omega + 2\omega)_z \frac{\partial \rho}{\partial z}}{\rho} = \frac{\left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} + 2\omega_x \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} - \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} + 2\omega_y \right) \frac{\partial \rho}{\partial y} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + f \right) \frac{\partial \rho}{\partial z}}{\rho}. \quad (11)$$

Эту формулу можно немного упростить, если система координат выбрана так, что ось  $x$  направлена на восток, ось  $y$  – на север, ось  $z$  – вверх. Тогда в северном полушарии  $2\Omega = (0, f_h, f)$ , где  $f_h = 2\omega \cos \varphi$ . Так как вертикальная составляющая скорости на несколько порядков (как минимум, на три) меньше горизонтальных, то соответствующие производные будут ничтожно малы, и тогда

$$PV = \frac{\left( -\frac{\partial v}{\partial z} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} - \left( -\frac{\partial u}{\partial z} + f_h \right) \frac{\partial \rho}{\partial y} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + f \right) \frac{\partial \rho}{\partial z}}{\rho}. \quad (12)$$

Отметим, что отклонение от условий (a–d) с учетом возможной дополнительной ошибки при вычислении частоты Вьяйсяля–Брента приводит к тому, что на практике  $PV$  у частиц не сохраняется.



**Рис. 1.** Район исследования. Цветом показан донная топография, черными стрелками – основные элементы крупномасштабной циркуляции: NwASC (Norwegian Atlantic Slope Current) – Норвежское Склонное течение, NwAFC (Norwegian Atlantic Frontal Current) – Норвежское Фронтальное течение, NCC (Norwegian Coastal Current) – Норвежское Прибрежное течение. Круговые белые стрелки показывают расположение Лофотенского вихря.

#### 2.4. $PV$ для периода глубокой конвекции

Обратим внимание, что в соотношениях (5), (9) и (12) для расчетов  $PV$  не требуется выполнения условий геострофичности и гидростатичности, вследствие чего эти формулы должны выполняться, вообще говоря, для всех движений, в том числе для вихрей и вихревых нитей. В случае зимней конвекции  $PV$ , по-видимому, формируется самой конвекцией, и закон сохранения следует заменить на закон ее эволюции. В реальности вся теория  $PV$  строится без учета вязкости и диффузии, а в периоды глубокой конвекции эти эффекты должны быть крайне важны и рассматриваться отдельно.

#### 2.5. Подход Россби:

##### квазигеострофическое приближение

Для квазигеострофического приближения (число Россби  $Ro < 1$ ) выражение (3) для потенциального вихря Эртеля значительно упрощается. В частности, для мезомасштабных (возможно, также и субмезомасштабных) явлений, потенциальный вихрь можно представить в виде функции  $\sigma$  в приближении  $f$ -плоскости:

$$\sigma = \text{rot}_z \mathbf{V} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = \nabla^2 \psi + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right), \quad (13)$$

где  $\psi$  – функция тока. Иногда вместо (13) рассматривают  $\sigma$  на  $\beta$ -плоскости:

$$\sigma_\beta = f_0 + \beta y + \nabla^2 \psi + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right). \quad (14)$$

Выражения (13) и (14) для потенциального вихря отличаются по размерности от  $PV$ , рассчитываемой по формулам (3), (5) и (9) с точностью до постоянного размерного множителя. В (13) и (14) размерность  $\sigma$  совпадает с размерностью относительной завихренности, и такой подход улучшает физическое толкование потенциальной завихренности, так как здесь большие по модулю значения  $\sigma$  соответствуют мощным вихрям и наоборот. Однако при этом подходе на практике часто возникают проблемы с расчетами частоты Вэйсяля–Брента, которая не должна обращаться в нуль.

Подчеркнем важное математическое свойство потенциального вихря в формулировке Россби – согласно (13),  $\sigma$  выражается только через одну функцию тока  $\psi$ . Поэтому соотношение (13) в случае однородной потенциальной завихренности ядра можно рассматривать как постановку задачи о нахождении и эволюции функции тока и границы вихревого ядра. Для эллипсоидальной формы ядер такая задача решается аналитически, и этот подход изложен в работах [24–31]. Аналитические соотношения, полученные в этих работах, можно использовать для качественного и количественного сравнения натуральных и теоретических характеристик вихрей.

### 3. ЛОФОТЕНСКИЙ ВИХРЬ НОРВЕЖСКОГО МОРЯ

#### 3.1. Краткая характеристика Лофотенского вихря

Лофотенский вихрь расположен в центральной глубоководной части Лофотенской котловины Норвежского моря (рис. 1). Он был обнаружен в ходе гидрографических исследований Арктиче-

ского и Антарктического научно-исследовательского института в 1970–1980-х гг. [32, 33]. В настоящее время Лофотенский вихрь представляет собой один из наиболее изученных вихрей в Мировом океане. Его существование подтверждено данными *in situ* [34], спутниковой альтиметрии [35, 36] и данными моделирования [20, 22]. Авторы [37] указывают положение Лофотенского вихря согласно данным гидродинамического моделирования в области, ограниченной  $69^{\circ}$ – $70^{\circ}$  с.ш. и  $3^{\circ}$ – $5^{\circ}$  в.д.

Квазипостоянный антициклонический Лофотенский вихрь – это конвективная линза теплой и соленой воды на глубине 200–1000 м с пространственным масштабом, достигающим на поверхности 100 км. На поверхности Лофотенский вихрь проявляется повышенными значениями дисперсии аномалий уровня океана, из-за чего Лофотенскую котловину по праву называют “hot spot” Северной Атлантики [38]. Основной причиной регенерации вихря является осенне-зимняя конвекция [21, 22, 32, 33, 39–42]. Кроме того, Лофотенский вихрь подпитывается мезомасштабными вихрями, отделяющимися от ветвей Норвежского течения [35, 36, 43, 44]. Для Лофотенского вихря характерны значительные орбитальные скорости  $0.7$ – $0.8$  м с $^{-1}$  [19, 43] и незначительный циклонический дрейф в пределах глубоководной части Лофотенской котловины.

### 3.2. Используемые данные

Для расчетов потенциальной завихренности использовались данные реанализа GLORYS12V1 (Global Ocean Physics Reanalysis), доступные на портале CMEMS (Copernicus Marine Environment Monitoring Service). Продукт GLORYS12V1 – вихреразрешающий реанализ Мирового океана с пространственным разрешением  $1/12^{\circ}$  на 50 горизонтах для периода, в который имеются альтиметрические наблюдения. Он основан на глобальной системе прогнозирования CMEMS в режиме реального времени. Моделью океанических условий выступает NEMO с форсингом ECMWF ERA-Interim. Наблюдения ассимилируются с помощью фильтра Калмана уменьшенного порядка. Данные спутниковых альтиметров (аномалия уровня моря), температура поверхности моря, концентрация морского льда и вертикальные профили температуры и солёности *in situ* ассимилируются совместно. Данный продукт включает в себя ежедневные трехмерные поля потенциальной температуры, солёности и течений, двумерные поля уровня, глубины верхнего квазигомогенного слоя, придонной потенциальной температуры, толщины льда, типов льда, скоростей дрейфа льда. Ассимилированные наблюдения: Reynolds 0.25° AVHRR-only SST, аномалии уровня со всех альтиметров, данные профилей температуры и солёности из ба-

зы CMEMS CORAv4.1, данные по льду из базы CERSAT Sea Ice concentration. Граничные условия по температуре и солёности на 1991 г. принимались по данным EN.4.2.0. Для расчетов использовались данные GLORYS12V1 за 10 июня 2010 г. Батиметрия ETOPO1, береговая линия GEBCO8.

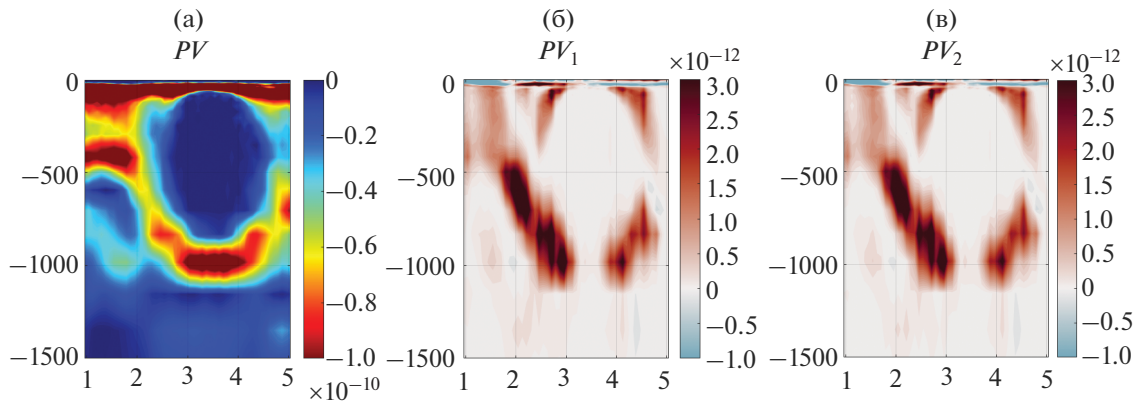
### 3.3. Оценки $PV$ для Лофотенского вихря по формуле Эртеля

Для расчетов потенциальной завихренности по формуле Эртеля использовалась формула (12). На первом этапе было проведено сравнение вклада слагаемых этой формулы, которое показало, что основной вклад дает третье слагаемое, в то время как вклад других слагаемых уступает на два порядка (рис. 2). Это означает, что на практике можно не учитывать горизонтальные изменения завихренности и силы Кориолиса, ограничиваясь оценками, которые определяются только вертикальной составляющей. Таким образом, расчеты потенциальной завихренности по Эртелю проводились по следующей формуле:

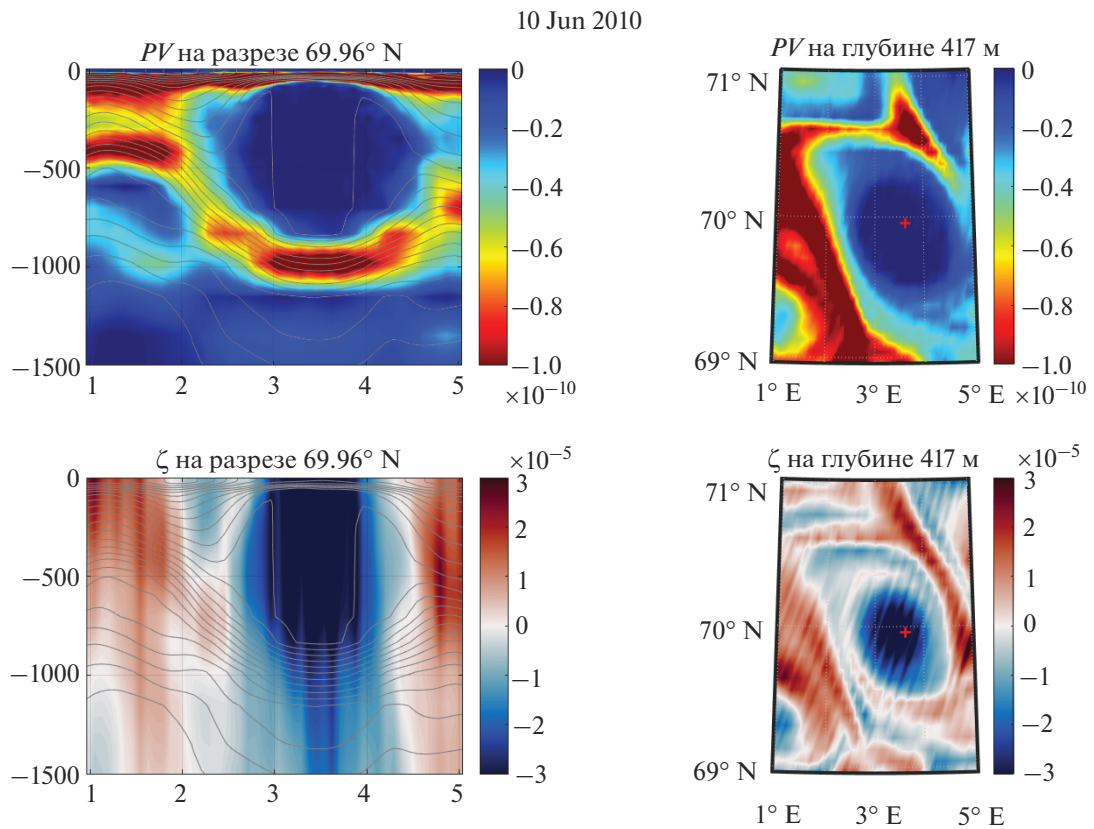
$$PV = \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + f\right) \frac{\partial \rho}{\partial z}}{\rho_0} = -\frac{(f + \zeta)N^2}{g}. \quad (15)$$

На рис. 2а и 3 видно, что на графике  $PV$  хорошо выделяется ядро Лофотенского вихря, окруженное сгущением изолиний  $PV$ . Заметим, что во всей исследуемой области  $PV < 0$ , однако в ядре имеются нулевые значения. Минимальные отрицательные значения  $PV \sim -1.0 \times 10^{-10}$  м $^{-1}$  с $^{-1}$  расположены на периферии ядра, где также наблюдается сгущение изопикн. Отметим, что в областях минимальных значений  $PV$  и сгущения изопикн наблюдаются также экстремумы слагаемых, которые обусловлены горизонтальными градиентами относительной завихренности и силы Кориолиса (2б, 2в). На рис. 3 видно, что нулевые значения  $PV$  охватывают большую площадь по сравнению с таковыми в распределении завихренности  $\zeta$ , экстремумы которой локализованы в более узкой области, что проявляется как на вертикальных, так и горизонтальных разрезах. Области положительных значений  $\zeta$ , соответствующие циклоническому вращению частиц, соответствуют минимальным значениям  $PV \sim -1.0 \times 10^{-10}$  м $^{-1}$  с $^{-1}$ . На рис. 3 хорошо видно, что нулевые значения  $PV$  выделяют замкнутое ядро в слое 100–800 м, в то время как динамический сигнал в вихре и наличие завихренности прослеживаются до самого дна (3250 м). Это подтверждает, что потенциальная завихренность Эртеля  $PV$  не связана ни с интенсивностью вихря, ни с направлением вращения частиц и является кинематической, а не динамической характеристикой вихря.





**Рис. 2.** а) оценка потенциальной завихренности  $PV$  ( $\text{м}^{-1} \text{с}^{-1}$ ) для Лофотенского вихря по формуле (12); б) остаточный вклад горизонтальных градиентов завихренности и силы Кориолиса в  $PV$ :  $PV_1 = \frac{\left(-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\frac{\partial p}{\partial x} - \left(-\frac{\partial u}{\partial z} + f_h\right)\frac{\partial p}{\partial y}}{\rho_0}$ ; в) остаточный вклад горизонтальных градиентов завихренности в  $PV$  ( $f_h = 0$ ):  $PV_2 = \frac{\left(-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial p}{\partial y}}{\rho_0}$ . Расчеты проводились по данным GLORYS12V1.



**Рис. 3.** Оценки  $PV$  ( $\text{м}^{-1} \text{с}^{-1}$ ) и относительной завихренности  $\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \zeta$  ( $\text{с}^{-1}$ ) для Лофотенского вихря по данным GLORYS12V1. Серыми линиями показаны изопикны.



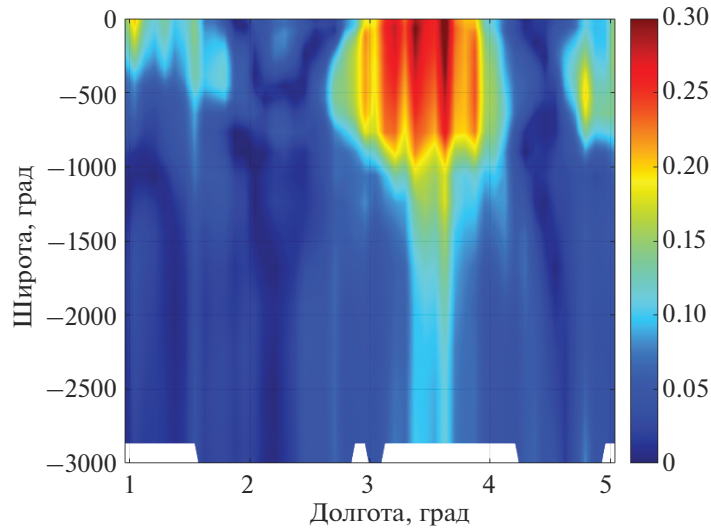


Рис. 4. Зависимость числа Россби  $\left( Ro = \left| \frac{\zeta}{f} \right| \right)$  от глубины на зональном разрезе через Лофотенскую котловину.

3.4. Расчет потенциальной завихренности для квазигеострофического приближения на  $f$ -плоскости

Расчет  $\sigma$  производился по формуле (13) в предположении выполнения гидростатического приближения и малости числа Россби. На рис. 4 показано, что число Россби для Лофотенского вихря не превышает 0.3. Частота Вайсяля–Брента и функция тока вычислялись с помощью термодинамического уравнения TEOS-10 [23], реализованного в среде Matlab. Для расчетов функции тока применялся алгоритм Каннингема [23, 45]. В следующей статье мы представим оригинальный алгоритм расчета второго слагаемого в формуле (13), который приведет к пересмотру принятого подхода.

На рис. 5 видно, что график  $\sigma$  идентичен графику относительной завихренности  $\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \zeta$  при данном подходе (рис. 3). Это означает, что изолинии  $\sigma$  и  $\zeta$  практически совпадают и, следовательно, характеристики  $\sigma$  и  $\zeta$  в вихревом ядре связаны функциональной зависимостью. Величины  $\sigma$  и  $\zeta$  в ядре везде отрицательны и достигают значений  $-3 \times 10^{-5} \text{ c}^{-1}$ .

Потенциальная завихренность  $\sigma$  характеризует вращение вихря и является динамической характеристикой. Размерность  $\sigma$  отличается от размерности  $PV$ .

3.5. Объемная потенциальная завихренность

Для Лофотенского вихря в расчетах объемной потенциальной завихренности  $\sigma_V$  боковые границы вихря определялись по нулевым значениям  $\zeta$  [46].

На рис. 6 представлены средние значения  $\sigma_V$  в Лофотенском вихре на горизонтах. Видно, что в ядре вихря максимальные по модулю средние (по площади) значения  $\sigma_V$  расположены в слое 200–800 м. Наибольшая отрицательная завихренность соответствует горизонту 500 м и составляет  $-1.3 \times 10^{-5} \text{ c}^{-1}$ . На горизонтах ниже 1000 м модуль осредненных значений  $\sigma_V$  не превышает  $1.0 \times 10^{-5} \text{ c}^{-1}$ , а

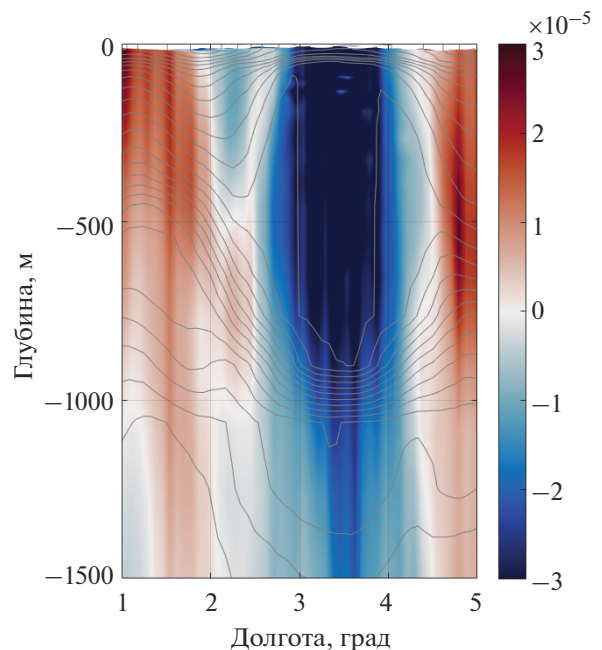


Рис. 5. Распределение  $\sigma$  ( $\text{c}^{-1}$ ) по формуле (13) за 10 июня 2010 г. Серыми линиями показаны изопоикны.

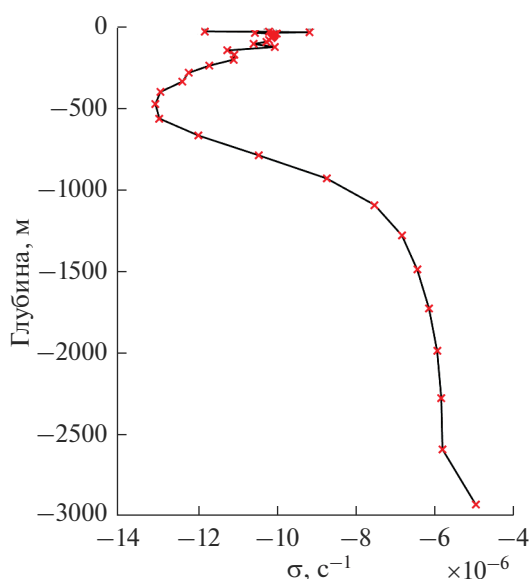


Рис. 6. Вертикальный профиль изменчивости средних значений  $\sigma$  в Лофотенском вихре на различных горизонтах (обозначены красными крестиками).

на горизонте 3000 м в два раза меньше и составляет  $0.5 \times 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ .

Так как в поверхностном слое данных GLORYS12V1 содержится большое число выбросов, расчеты объемной потенциальной завихренности  $\sigma_V$  производились от 16 м до дна (до 3000 м). Объемная потенциальная завихренность  $\sigma_V$  для вихря объема  $V$  рассчитывалась по интегральной формуле:

$$\sigma_V = \int_V \left( \nabla^2 \psi + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right) dx dy dz. \quad (16)$$

Объемная потенциальная завихренность  $\sigma_V$  для Лофотенского вихря равна  $-9.82 \times 10^6 \text{ с}^{-1}$ . Для ядра (до 1000 м) объемная  $\sigma_V$  составляет  $-2.28 \times 10^8 \text{ с}^{-1}$ .

Объемная потенциальная завихренность  $\sigma_V$  характеризует мощность вихря.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассматривается ключевое понятие гидродинамики и физической океанографии — потенциальная завихренность. Обсуждаются основные формулы, которые используются при расчетах потенциальной завихренности, а также условия для их применения. Показано, что, согласно известной теореме Эртеля, потенциальная завихренность частиц, не пересекающих изопикнические поверхности, в глобальном смысле сохраняется, хотя на практике условия выполнения этой теоремы часто не выполнимы.

Представлены два основных подхода к оценкам потенциальной завихренности: по формуле Эртеля и по формуле Россби для квазигеострофического приближения. Показано, что в обоих случаях основной вклад вносит слагаемое, связанное с вертикальной составляющей ротора скорости. Важно отметить, что эти характеристики потенциальной завихренности имеют различную размерность.

Оценки потенциальной завихренности проводились для акватории квазипостоянного антициклонического Лофотенского вихря, расположенного в Норвежском море. Показано, что потенциальная завихренность в подходе Эртеля характеризует ядро вихря с нулевыми значениями потенциальной завихренности, окруженное сгущениями изолиний со значениями потенциальной завихренности  $\sim -1.0 \times 10^{-10} \text{ м}^{-1} \text{ с}^{-1}$ , расположенными на периферии ядра. Значения потенциальной завихренности отрицательны во всей области за исключением ядра с нулевыми значениями. Потенциальная завихренность по Эртелю не связана с интенсивностью вихря, не характеризует его полярность и является кинематической, а не динамической характеристикой вихря.

В отличие от потенциальной завихренности по Эртелю, потенциальная завихренность по Россби в квазигеострофическом приближении является динамической характеристикой. Основной вклад дает относительная завихренность, которая характеризует вращение частиц. Объемная потенциальная завихренность характеризует мощность вихря. Наибольшее по модулю значение потенциальной завихренности соответствует горизонту 500 м и составляет  $-1.3 \times 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ ; на горизонтах ниже 1000 м величины по модулю не превышают  $1.0 \times 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ , а на горизонте 3000 м —  $0.5 \times 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ . Объемная потенциальная завихренность для Лофотенского вихря равна  $-9.82 \times 10^6 \text{ с}^{-1}$ . Для ядра (до 1000 м) она составляет  $-2.28 \times 10^8 \text{ с}^{-1}$ .

## ФИНАНСИРОВАНИЕ

Публикация выполнена при финансовой поддержке гранта СПбГУ № 75295423.

В.В. Жмур поддержан средствами государственного бюджета по госзаданию № 0128-2021-0002.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rossby C.-G. Dynamics of Steady Ocean Currents in the Light of Experimental Fluid Mechanics // Papers in Physical Oceanography and Meteorology. 1936. V. 5. № 1.
2. Rossby C.-G. On the mutual adjustment of pressure and velocity distributions in certain simple current systems // II. J. Mar. Res. 1938. V. 2. P. 239–263.

3. *Rossby C.-G.* Planetary flow patterns in the atmosphere // *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* 1940. V. 66. P. 68–87.
4. *Haynes P., McIntyre M.* On the evolution of vorticity and potential vorticity in the presence of diabatic heating and frictional or other forces // *J. Atmos. Sci.* 1987. V. 44. № 5. P. 828–841.
5. *Haynes P., McIntyre M.* On the conservation and impermeability theorems for potential vorticity // *J. Atmos. Sci.* 1990. V. 47. № 16. P. 2021–2031.  
[https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1990\)047<2021:OT-CAIT>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1990)047<2021:OT-CAIT>2.0.CO;2)
6. *Morel Y., Gula J., Ponte A.* Potential Vorticity diagnostics based on balances between volume integral and boundary conditions // *Ocean Modelling.* 2019. V. 138. P. 23–35.  
<https://doi.org/10.1016/j.ocemod.2019.04.004>
7. *Гневышев В.Г., Белоненко Т.В.* Парадокс Россби и его решение // *Гидрометеорология и экология.* 2020. Т. 61. С. 480–493.  
<https://doi.org/10.33933/2074-2762-2020-61-480-493>
8. *Hoskins B.J., McIntyre M.E., Robertson A.W.* On the use and significance of isentropic potential vorticity maps // *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 1985. V. 111. № 470. P. 877–946.  
<https://doi.org/10.1002/qj.49711147002>
9. *Ertel H.* Ein neuer hydrodynamischer Erhaltungssatz // *Die Naturwissenschaften.* 1942a. V. 36. P. 543–544.
10. *Ertel H.* Über hydrodynamischer Wirbelsätze // *Physikalische Zeitschrift Leipzig.* 1942b. V. 43. P. 526–529.
11. *Ertel H.* Ein neuer hydrodynamischer Wirbelsatz // *Meteorologische Zeitschrift.* 1942c. V. 59. P. 277–281.
12. *Truesdell C. A. T.* On Ertel's Vorticity Theorem // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP).* 1951. V. 2. P. 109–114.
13. *Müller P.* Ertel's potential vorticity theorem in physical oceanography // *Rev. Geophys.* 1995. V. 33. № 1. P. 67–97.  
<https://doi.org/10.1029/94rg03215>
14. *Keffer T.* The Ventilation of the World's Oceans: Maps of the Potential Vorticity Field // *J. Phys. Oceanogr.* 1985. V. 15. P. 510–523.
15. *McDowell S., Rhines P., Keffer T.* North Atlantic Potential Vorticity and Its Relation to the General Circulation // *J. Phys. Oceanogr.* 1982. V. 12. P. 1417–1436.  
[https://doi.org/10.1175/1520-0485\(1982\)012<1417:NAPVAI>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(1982)012<1417:NAPVAI>2.0.CO;2)
16. *Giordani H., Lebeaupin Brossier C., L'eger F., Caniaux G. A.* PV-approach for dense water formation along fronts: Application to the Northwestern Mediterranean // *J. Geophys. Res.: Oceans.* 2017. V. 122. № 2. P. 995–1015.  
<https://doi.org/10.1002/2016JC012019>
17. *Trodahl M., Isachsen P.E., Nils J.N., Kristensen M.* The Regeneration of the Lofoten Vortex through Vertical Alignment // *J. Phys. Oceanogr.* 2020. V. 50. P. 2689–2711.  
<https://doi.org/10.1175/JPO-D-20-0029.1>
18. *Smilenova A., Gula J., Le Corre M., Houpert L., Reecht Y.* A persistent deep anticyclonic vortex in the Rockall Trough sustained by Anticyclonic Vortices Shed From the slope current and wintertime convection // *J. Geophys. Res.: Oceans.* 2020. V. 125. № 10.  
<https://doi.org/10.1029/2019JC015905>
19. *Bosse A., Fer I., Lilly J. M., Soiland H.* Dynamical controls on the longevity of a non-linear vortex: The case of the Lofoten Basin Eddy // *Sci. Rep.* 2019. V. 9. P. 1–10.  
<https://doi.org/10.1038/s41598-019-49599-8>
20. *Колдунов А.В., Белоненко Т.В.* Гидродинамическое моделирование поля вертикальной скорости в Лофотенском вихре // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* 2020. Т. 56. № 5. С. 575–585.  
<https://doi.org/10.31857/S0002351520040045>
21. *Травкин В.С., Белоненко Т.В.* Оценка глубины зимней конвекции в Лофотенской котловине Норвежского моря и методы ее оценки // *Гидрология и экология (Ученые записки РГГМУ).* 2020. Т. 59. P. 67–83.  
<https://doi.org/10.33933/2074-2762-2020-59-67-83>
22. *Федоров А., Башмачников И., Белоненко Т.* Зимняя конвекция в Лофотенской котловине по данным буев ARGO и гидродинамического моделирования // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Науки о Земле.* 2019. Т. 64. № 3. С. 491–511.  
<https://doi.org/10.21638/spbu07.2019.308>
23. *IOC, SCOR, IAPSO.* The international thermodynamic equation of seawater – 2010: Calculation and use of thermodynamic properties. Intergovernmental Oceanographic Commission, Manuals and Guides No.56. UNESCO (English), 2010. 196 p.
24. *Жмур В.В., Панкратов К.К.* Динамика эллипсоидального приповерхностного вихря в неоднородном потоке // *Океанология.* 1989. Т. 29. № 2. С. 205–211.
25. *Жмур В.В., Щепеткин А.Ф.* Эволюция эллипсоидального вихря в стратифицированном океане в приближении f-плоскости // *Изв. АН СССР. ФАО.* 1991. Т. 27. № 5. С. 492–503.
26. *Жмур В.В.* Мезомасштабные вихри океана. М.: ГЕОС, 2011. 384 с.
27. *Meacham S.P., Pankratov K.K., Shchepetkin A.F., Zhmur V.V.* The interaction of ellipsoidal vortices with background shear flows in a stratified fluid // *Dynamics of Atmospheres and Oceans.* 1994. V. 21. № 2–3. P. 167–212.  
[https://doi.org/10.1016/0377-0265\(94\)90008-6](https://doi.org/10.1016/0377-0265(94)90008-6)
28. *Pankratov K.K., Zhmur V.V.* A dynamics of desingularized quasigeostrophic vortices // *Phys. Fluids A.* 1991. V. 3. P. 1464.
29. *Koshel K.V., Ryzhov E.A., Zhmur V.V.* Ellipsoidal vortex in a nonuniform flow: Dynamics and chaotic advections // *J. Mar. Res.* 2011. V. 69. № 2–3. P. 435–461.
30. *Koshel K.V., Ryzhov E.A., Zhmur V.V.* Diffusion – effected passive scalar transport in an ellipsoidal vortex in a shear flow // *Nonlinear Processes in Geophysics.* 2013. V. 20. P. 437–444.  
<https://doi.org/10.5194/npg-20-437-2013>
31. *Koshel K.V., Ryzhov E.A., Zhmur V.V.* Effect of the vertical component of diffusion on passive scalar transport in an isolated vortex model // *Phys. Rev.* 2015. V 92. № 5. 053021.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.92.053021>
32. *Иванов В.В., Кораблев А.А.* Формирование и регенерация внутритрипикноклинной линзы в Норвежском море // *Метеорология и гидрология.* 1995а. Т. 9. С. 102–110.
33. *Иванов В.В., Кораблев А.А.* Динамика внутритрипикноклинной линзы в Норвежском море // *Метеорология и гидрология.* 1995б. Т. 10. С. 55–62.
34. *Белоненко Т.В., Колдунов А.В., Сентябов Е.В., Карсаков А.Л.* Термохалинная структура Лофотенского

- вихря Норвежского моря на основе экспедиционных исследований и по данным гидродинамического моделирования // Вестник Санкт-Петербургского университета. Науки о Земле. Науки о Земле. 2018. Т. 63. № 4. С. 502–519.  
<https://doi.org/10.21638/spbu07.2018.406>
35. Zinchenko V.A., Gordeeva S.M., Sobko Yu.V., Belonenko T.V. Analysis of Mesoscale eddies in the Lofoten Basin based on satellite altimetry // *Fundamentalnaya i Prikladnaya Gidrofizika*. 2019. V. 12. № 3. P. 46–54.  
<https://doi.org/10.7868/S2073667319030067>
  36. Travkin V.S., Belonenko T.V. Seasonal variability of mesoscale eddies of the Lofoten Basin using satellite and model data // *Russ. J. Earth Sci.* 2019. V. 19. № 5. ES5004.  
<https://doi.org/10.2205/2019ES000676>
  37. Белоненко Т.В., Волков Д.Л., Ожигин В.К., Норден Ю.Е. Циркуляция вод в Лофотенской котловине Норвежского моря // Вестник Санкт-Петербургского университета. 2014. Т. 7. № 2. С. 108–121.
  38. Volkov D.L., Belonenko T.V., Foux V.R. Puzzling over the dynamics of the Lofoten Basin - a sub-Arctic hot spot of ocean variability // *Geophys. Res. Lett.* 2013. V. 40. № 4. P. 738–743.  
<https://doi.org/10.1002/grl.50126>
  39. Alexeev V.A., Ivanov V.V., Repina I.A., Lavrova O.Yu., Stanichny S.V. Convective structures in the Lofoten Basin based on satellite and Argo data // *Izv., Atmos. Oceanic Phys.* 2016. V. 52. № 9. P. 1064–1077.  
<https://doi.org/10.1134/S0001433816090036>
  40. Блошкина Е.В., Иванов В.В. Конвективные структуры в Норвежском и Гренландском морях по результатам моделирования с высоким пространственным разрешением // Труды Гидрометцентра России. 2016. Т. 361. С. 146–168.
  41. Yu et al. The Lofoten Basin Eddy: Three years of evolution as observed by Seagliders // *J. Geophys. Res.* 2017. V. 122. № 8. P. 6814–6834.  
<https://doi.org/10.1002/2017JC012982>
  42. Новоселова Е.В., Белоненко Т.В. Изопикническая адвекция в Лофотенской котловине Норвежского моря // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2020. Т. 13. № 3. С. 56–67.  
<https://doi.org/10.7868/S2073667320030041>
  43. Fer I., Bosse A., Ferron B., Bouruet-Aubertot P. The Dissipation of Kinetic Energy in the Lofoten Basin Eddy // *J. Physical Oceanography*. 2018. V. 48. № 6. P. 1299–1305.  
<https://doi.org/10.1175/JPO-D-17-0244.1>
  44. Gordeeva S., Zinchenko V., Koldunov A., Raj R.P., Belonenko T. Statistical analysis of long-lived mesoscale eddies in the Lofoten Basin from satellite altimetry // *Adv. Space Res.* 2020. S0273117719307070.  
<https://doi.org/10.1016/j.asr.2019.09.029>
  45. Cunningham S.A. Circulation and volume flux of the North Atlantic using synoptic hydrographic data in a Bernoulli inverse // *J. Marine Res.* 2000. V. 58. P. 1–35.  
<https://doi.org/10.1357/002224000321511188>
  46. Bashmachnikov I., Sokolovskiy M.A., Belonenko T.V., Volkov D.L., Isachsen P.E., Carton X. On the vertical structure and stability of the Lofoten vortex in the Norwegian Sea // *Deep Sea Res., Part I*. 2017. V. 128. P. 1–27.  
<https://doi.org/10.1016/j.dsr.2017.08.001>

## Potential Vorticity in the Ocean: Ertel and Rossby Approaches with Estimates for the Lofoten Vortex

V. V. Zhmur<sup>1, 2</sup>, E. V. Novoselova<sup>1</sup>, and T. V. Belonenko<sup>1, \*</sup>

<sup>1</sup>*Saint Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034 Russia*

<sup>2</sup>*Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences, Nahimovskiy prosp., 36, Moscow, 117997 Russia*

\*e-mail: t.v.belonenko@spbu.ru

The paper observes the concept of “potential vorticity in the ocean”, including the history of the appearance of this term. Various aspects and basic formulas are discussed, which are used in practice to calculate potential vorticity, and the conditions for the fulfilment of its conservation law are considered. Two approaches to potential vorticity are considered: by the Ertel and Rossby formulas. To illustrate the main conclusions, we present estimates of the potential vorticity for the quasi-permanent anticyclonic Lofoten vortex in the Norwegian Sea. We use the data of the global oceanic reanalysis GLORYS12V1 for calculations of the potential vorticity. We establish that the potential vorticity by the Ertel is a kinematic characteristic determined by the vortex core, in which the typical values are zero, while they can reach values of  $-10 \times 10^{-10} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$  at the core-periphery, where the concentration of the isopycnals is observed. The vertical and horizontal sections of the relative and potential vorticities are also constructed. It is found that the main contribution in the potential vorticity are the horizontal components while vertical components are significantly less. In contrast to the potential vorticity by Ertel, the potential vorticity by Rossby in the quasi-geostrophic approximation is the dynamic characteristic. The main contribution is made by the relative vorticity, which characterizes the rotation of the particles. The volumetric potential vorticity characterizes the vortex power. The highest potential vorticity value corresponds to the horizon of 500 m and is  $-1.3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ ; at horizons below 1000 m, the values do not exceed  $1.0 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ , and at a horizon of 3000 m it is about  $0.5 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ . The volumetric potential vorticity for the Lofoten vortex is  $-9.82 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$ . For the core (up to 1000 m), it is  $-2.28 \times 10^8 \text{ s}^{-1}$ .

**Keywords:** potential vorticity, Rossby, Ertel, conservation law, Lofoten vortex