

УДК 551.515.3: 551.515.9

О ДИНАМИКЕ ИНЕРЦИОННЫХ ЧАСТИЦ В ИНТЕНСИВНЫХ АТМОСФЕРНЫХ ВИХРЯХ

© 2021 г. Л. Х. Ингель^{a, b, *}

^aФГБУ “НПО “Тайфун”, ул. Победы, 4, Обнинск, 249038 Россия

^bИнститут физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, Пыжевский пер., 3, Москва, 119017 Россия

*e-mail: lev.ingel@gmail.com

Поступила в редакцию 23.03.2021 г.

После доработки 02.06.2021 г.

Принята к публикации 09.06.2021 г.

Аналитически исследуется движение инерционных частиц в интенсивных вихрях с вертикальной осью в поле силы тяжести. В этой задаче существен нелинейный характер гидродинамического сопротивления — его зависимость от модуля скорости движения частицы относительно среды. Разные составляющие движения взаимодействуют между собой, поскольку каждая из них влияет на коэффициент сопротивления. Найден эффективный способ приближенного аналитического решения задачи. Установлен ряд общих закономерностей динамики частиц. Сравнение результатов с имеющимися в литературе отдельными численными расчетами подтверждает адекватность модели при значениях чисел Рейнольдса до порядка 10^3 . В некоторых отношениях удовлетворительное согласие можно констатировать и для более массивных частиц. Оценена дальность переноса тяжелых частиц за пределы области интенсивных ветров. Адекватное описание движения частиц может иметь значение для правильной интерпретации результатов радарного зондирования смерчей, для оценки связанных с ними опасностей и, возможно, для моделирования динамики самих смерчей.

Ключевые слова: интенсивные атмосферные вихри, массивные частицы, гидрометеоры, перенос, центрифугирование, нелинейное сопротивление, аналитическая модель, смерчи

DOI: 10.31857/S0002351521060067

1. ВВЕДЕНИЕ

В литературе по интенсивным атмосферным вихрям (торнадо, “пыльным дьяволам”, “водяным смерчам”) в последние годы все больше внимания уделяется движению в них тяжелых частиц (гидрометеоры, брызги, поднятые в воздух частицы почвы, обломки, связанные с разрушениями — в англоязычной литературе в этой связи широко используется термин “debris”). Это связано с рядом важных приложений.

В работе [1] обращается внимание на то, что доплеровские радары фактически регистрируют не движение воздуха, а движение тяжелых частиц, которое, вообще говоря, отличается от движений воздуха. Поэтому приобретает значение вопрос о движении тяжелых частиц в смерче в условиях сильного “центрифугирования” (англ. centrifuging). Этот вопрос важен и для ряда других приложений. Утверждается, что наличие некоторого количества тяжелых частиц в смерче может заметно влиять на его динамику [2–4]. Согласно опубликованным оценкам, масса поднятой и переносимой торнадо тяжелой примеси в некоторых случаях

может достигать и превышать 10^7 кг [2, 3]. Наличие в воздухе тяжелых частиц/предметов — фактор, усиливающий ветровой напор на сооружения и другие опасности, связанные со смерчами [5, 6]. Движение частиц и их пространственное распределение несут много информации и в оптическом диапазоне. Это используется, в частности, при изучении “пыльных дьяволов” [7, 8].

Видимо, впервые возможные проявления механизма центрифугирования частиц в интенсивных атмосферных вихрях начали обсуждаться в работе [9]. Речь шла, прежде всего, о наблюдаемых полых структурах водяных смерчей (англ. waterspouts), но упоминалась также и возможность подобных проявлений и в более интенсивных торнадо. Эта работа в большой степени опиралась на лабораторные эксперименты.

В зарубежной литературе нередко цитируется работа [7], в которой выполнены весьма обстоятельные расчеты, относящиеся, прежде всего, к центрифугированию пыли в “пыльных дьяволах”. Автор поясняет, что прежде чем рассматривать движение тяжелой примеси в торнадо, целесообразно выполнить расчеты для более

простого случая пыльных вихрей, поскольку в торнадо придется принимать во внимание фазовые переходы и ряд других обстоятельств. Но в [7], как и в [9], рассмотрение ограничивается достаточно малыми частицами, сопротивление движению которых описывается линейным законом Стокса – коэффициент сопротивления не зависит от скорости движения относительно среды. Весьма содержательная теоретическая работа [10] также ограничивается динамикой концентрации “стоксовых” частиц с размерами не более первых десятков микрон. Помимо этих упрощений, упомянутые теоретические работы ограничиваются рассмотрением простейших модельных осесимметричных вихрей, не зависящих от вертикальной координаты z . Более сложные задачи обычно требуют уже численных расчетов [1, 11, 12]; правда, в нашей недавней работе [13] удалось аналитическими методами продвинуться в более сложной задаче о движении частиц больших размеров.

Но большинство публикаций пока относятся к анализу натуральных данных, результатов радиолокационного зондирования торнадо. Весьма подробные обзоры содержатся в [14, 15]. Эта область исследований активно развивается – облака переносимых смерчами частиц несут много информации, которую все в большей степени удается использовать. Появились даже аббревиатура TDS (Tornado Debris Signature) и термин debris ball.

В [13] предложен метод приближенного аналитического решения задачи о движении частиц при нелинейном законе сопротивления до значений числа Рейнольдса порядка 10^3 (для капель воды размерами до порядка 1 мм). В период выполнения [13] автору не было известно о работе [1], в которой численно исследовалась аналогичная задача для значительно более широкого диапазона чисел Рейнольдса и с более точными уравнениями и законом сопротивления, но лишь для некоторых конкретных значений параметров и двух типов модельных вихрей. В этой ситуации имеет смысл сравнить результаты двух упомянутых подходов. Удовлетворительное согласие позволило бы объединить достоинства этих подходов: указать общие закономерности динамики частиц для широкого класса вихревых движений, не ограничиваясь представленными в [1] отдельными конкретными расчетами. Этому и посвящена настоящая работа. Кроме того, сделаны оценки дальности переноса тяжелых частиц за пределы области интенсивных ветров (за счет инерции). Это также представляется актуальным в связи с отмеченными в литературе фактами выпадения переносимых частиц вне упомянутой области.

2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Три проекции уравнения вязкого движения частицы в цилиндрической системе координат можно записать в виде [13]:

$$\frac{du}{dt} = \frac{v^2}{r} - cu, \quad (1)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{uv}{r} - c[v - V(r)], \quad (2)$$

$$\frac{dw}{dt} = -g - cw. \quad (3)$$

Здесь t – время, g – ускорение свободного падения; u, v, w – радиальная, тангенциальная и вертикальная составляющие скорости частицы (вертикальная ось направлена против силы тяжести); c – коэффициент сопротивления; расстояние r от оси можно рассматривать как лагранжеву радиальную координату частицы:

$$u = \frac{dr}{dt}. \quad (4)$$

Применим это приближение подробно обсуждается в [1, 10, 13]. Распределение тангенциальной скорости в вихре $V(r)$, как уже упоминалось, считаем заданным (для определенности ограничиваемся случаями, когда значения V и v не отрицательны).

Смысл данной системы уравнений достаточно очевиден: ускорение частицы определяется алгебраической суммой сил тяжести, инерции (использована стандартная форма записи ускорений в цилиндрических координатах) и силы вязкого трения. Последняя, в свою очередь, в рассматриваемом приближении определяется значением коэффициента сопротивления и скоростью частицы относительно среды. Коэффициент сопротивления $c = \tau^{-1}$; τ – время вязкой релаксации. В случае частиц конечных размеров, помимо упомянутых выше сил, строго говоря, существуют и другие (архимедова, “подъемная сила”, “сила присоединенной массы”). Но в рассматриваемом приближении, в котором частицы предполагаются малыми, дополнительный учет упомянутых малых сил на данном этапе исследования не имеет смысла.

Масштаб времени τ в случае выполнения закона Стокса для достаточно малых частиц сферической формы выражается через коэффициент молекулярной вязкости среды η , радиус частицы R_p и ее плотность ρ_p [13]:

$$\tau_s = 2R_p^2\rho_p/9\eta, \quad c_s = 1/\tau_s. \quad (5)$$

Для частиц больших размеров и массы коэффициент сопротивления c и время τ зависят от значения числа Рейнольдса для частицы:

$$c = c(\text{Re}), \quad \text{Re} = \frac{2R_p \rho |\mathbf{v}|}{\eta} = \frac{2R_p |\mathbf{v}|}{\nu}, \quad \nu = \frac{\eta}{\rho}. \quad (6)$$

Здесь ρ — плотность среды (воздуха), ν — коэффициент ее кинематической вязкости, \mathbf{v} — вектор скорости частицы относительно среды¹:

$$|\mathbf{v}| = [u^2 + (v - V)^2 + w^2]^{1/2}. \quad (7)$$

В работе [13] была использована заимствованная из литературы модель квадратичного по скорости закона сопротивления:

$$c = \frac{1}{60} \text{Re} c_S = \frac{|\mathbf{v}|}{l}, \quad (8)$$

где масштаб длины

$$l = \frac{20 \rho_p}{3 \rho} R_p. \quad (9)$$

Для капель воды радиусом 0.5 мм в нижних слоях атмосферы $l \approx 3$ м. Эта модель, очевидно, приводит к следующему выражению для скорости установившегося оседания частицы в покоящейся среде:

$$W = (gl)^{1/2} = \left(\frac{20 \rho_p}{3 \rho} g R_p \right)^{1/2}. \quad (10)$$

Но сравнение с измеренными скоростями оседания частиц показывает, что выражение (10) приводит к довольно большому численному погрешностям. Поэтому в настоящей работе используем уточненное описание гидродинамического сопротивления, аналогичное [1]: вычисляем значения коэффициента сопротивления, опираясь на измеренные значения скорости оседания частиц W . В выражении (8) вместо (9) полагаем

$$l = W^2/g. \quad (11)$$

При известных функциях $c(\text{Re})$ и $V(r)$ система уравнений (1)–(4) для u , v , w и r замкнута, как и подсистема (1)–(3) для первых трех неизвестных. После решения упомянутой подсистемы, из уравнения (4) находится в неявном виде закон радиального движения частицы:

$$t = \int_{r_0}^r \frac{dr'}{u(r')}, \quad (12)$$

где индекс “0” обозначает значение величины в начальный момент времени $t = 0$. Ниже преимущественно будет анализироваться предельный случай относительно небольших частиц, для ко-

торых локальные ускорения малы по сравнению с силами сопротивления, тяжести и центробежной силой. В таких ситуациях производные по времени в уравнениях (1)–(3) бывают не всегда существенными, и порядок системы уравнений понижается. Поэтому остальные начальные условия будут обсуждаться ниже по мере необходимости. Отметим, что в [1] констатируется слабая зависимость движения частицы от начальных условий. (Последнее представляется нам не всегда очевидным, поскольку продолжительность реакции на изменение начальных условий в [1] иногда достигает порядка 100 с — значительное время для движения частицы в торнадо).

Поскольку центробежная сила всегда направлена к периферии, ограничиваемся здесь рассмотрением ситуаций, в которых радиальная координата частицы r монотонно растет со временем, иными словами, $u \geq 0$. В этом случае существует взаимнооднозначное соответствие между переменными r и t , так что всегда возможен переход от одной переменной к другой; $d/dt = (dr/dt) d/dr = u(d/dr)$, и уравнения (1)–(3) можно представить в виде

$$\frac{1}{2} \frac{d(u^2)}{dr} = \frac{v^2}{r} - cu, \quad (13)$$

$$u \left(\frac{dv}{dr} + \frac{v}{r} \right) = -c[v - V(r)], \quad (14)$$

$$u \frac{dw}{dr} = -g - cw. \quad (15)$$

Уравнение (14) ниже будет удобно рассматривать также в виде

$$[v - V(r)] = -\frac{u}{c} \left(\frac{dv}{dr} + \frac{v}{r} \right). \quad (16)$$

В работе [13] показано, что для относительно небольших частиц (капель воды размерами до порядка 1 мм) задача допускает существенные упрощения. Прежде всего, в уравнениях (1), (3), (13), (15) левые части относительно малы — имеет место приближенный баланс между массовыми силами в правых частях и гидродинамическим сопротивлением. Упомянутые уравнения в этом случае приближенно сводятся к алгебраическим. В тангенциальном направлении не действуют такие значительные силы, как центробежная и сила тяжести, поэтому частица приближенно отслеживает вихревое движение среды: $|\mathbf{v} - \mathbf{V}| \ll |\mathbf{V}|$. Кроме того, радиальная скорость частицы обычно много меньше тангенциальной, но много больше разности $|\mathbf{v} - \mathbf{V}|$:

$$|\mathbf{v} - \mathbf{V}| \ll |u| \ll |\mathbf{V}|. \quad (17)$$

Поэтому модуль скорости частицы относительно среды

$$|\mathbf{v}| \approx (u^2 + w^2)^{1/2}. \quad (18)$$

¹ Вместо диаметра частицы $2R$ в выражении для числа Рейнольдса можно, разумеется, использовать радиус. Поэтому, например, в некоторых публикациях значения чисел Рейнольдса при прочих равных условиях различаются в два раза.

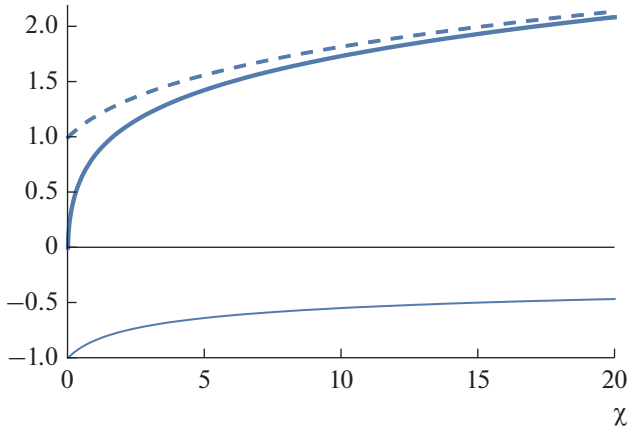


Рис. 1. Зависимости от безразмерной функции $\chi(r)$ радиальной и вертикальной скорости частицы (толстая и тонкая линии соответственно, нормированы на W) и коэффициента сопротивления (штриховая линия, нормирован на g/W).

При указанных упрощениях уравнения (13), (15) принимают вид

$$cu \approx \frac{V(r)^2}{r}, \quad cw \approx -g, \quad (19)$$

Отсюда нетрудно получить ряд универсальных соотношений, не зависящих от закона сопротивления, в частности

$$\frac{u}{w} \approx -\chi^{1/2}(r), \quad \chi(r) \equiv \left[\frac{V^2(r)}{gr} \right]^2, \quad (20)$$

$$u \approx \left\{ \frac{V[V(r) - v]}{1 + \xi} \right\}^{1/2}, \quad \xi \equiv \frac{dv/dr}{v/r} \approx \frac{dV/dr}{V/r}. \quad (21)$$

При любых реальных профилях $V(r)$ величина ξ по порядку абсолютной величины обычно не превышает единицы. В еще большей степени это относится к величине $|1 + \xi|^{1/2}$. Например, при степенном законе спада скорости в вихре $V \sim r^{-\beta}$, $\xi = -\beta$ (отметим, что при $\beta > 1$ частица опережает фоновый поток, поскольку переносит угловой момент от центра к периферии: $1 + \xi < 0$, $V - v < 0$). Поэтому, согласно (21), радиальная скорость близка по порядку величины к среднему геометрическому $|V - v|$ и V — много больше первой из этих величин, но много меньше второй.

Важная безразмерная функция $\chi(r)$ представляет собой квадрат отношения центробежной силы к силе тяжести. Соотношение (20) позволяет по измеренным значениям составляющих скорости u, w определять эту функцию и, следовательно, радиальное распределение скорости течения в вихре $V(r)$, независимо от закона сопротивления.

Нетрудно также получить соотношения

$$v \approx V \left[1 - 4\pi^2(1 + \xi) \left(\frac{\tau}{T} \right)^2 \right], \quad (22)$$

$$\tau \equiv \frac{1}{c}, \quad T \propto \frac{2\pi r}{V(r)},$$

$$\left| \frac{V - v}{u} \right| = \tau \left(\frac{dv}{dr} + \frac{v}{r} \right) \sim 2\pi \frac{\tau}{T}. \quad (23)$$

Отсюда видно, что условие выполнения использованных упрощений $|V - v| \ll |V|$, $|u|$ — достаточная малость отношения времени вязкой релаксации движения частицы τ к периоду оборота вихря T .

3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПРИ УТОЧНЕННОМ ЗАКОНЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ (8), (11) И СРАВНЕНИЕ С ЧИСЛЕННЫМИ РЕШЕНИЯМИ [1]

Из (8), (11), (18), (19) нетрудно получить:

$$c \approx \frac{g}{W} (1 + \chi(r))^{1/4}, \quad u \approx W \frac{\chi^{1/2}(r)}{(1 + \chi(r))^{1/4}}, \quad (24)$$

$$w \approx -W \frac{1}{(1 + \chi(r))^{1/4}}.$$

Эти зависимости в безразмерном виде представлены на рис. 1. Напомним, что тангенциальная скорость v при этом близка к фоновой вихревой скорости $V(r)$, которая предполагается заданной.

Выражения (24) упрощаются в предельных случаях больших и малых значений безразмерной функции $\chi(r)$. В частности, в [1] рассматриваются интенсивные вихри, в которых вблизи области максимальных ветров $\chi(r) \gg 1$. В этом предельном случае

$$c \approx \frac{g}{W} \chi(r)^{1/4}, \quad u \approx W \chi(r)^{1/4} = W \frac{V(r)}{(gr)^{1/2}}, \quad (25)$$

$$w \approx -W \chi(r)^{-1/4}.$$

Из (21)–(24) нетрудно убедиться, что используемое в настоящей работе предположение о малости величин $|(v - V)/V|$, $|(v - V)/u|$ выполняется при условии

$$\frac{WV}{gr} = \frac{W\Omega}{g} \ll 1, \quad (26)$$

где Ω — угловая скорость вихря. Если, например, характерный горизонтальный масштаб вихря порядка 40 м, максимальная скорость вихревого движения 50 м/с, то должно выполняться условие $W \ll 5$ м/с.

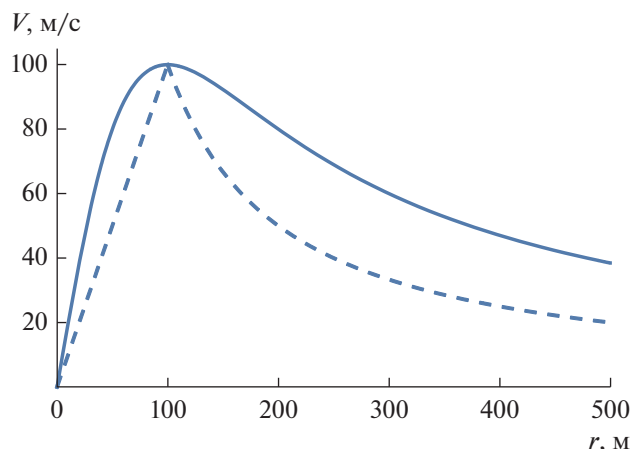


Рис. 2. Примеры радиальных профилей скорости для вихрей Фидлера и Рэнкина (сплошная и штриховая линии соответственно).

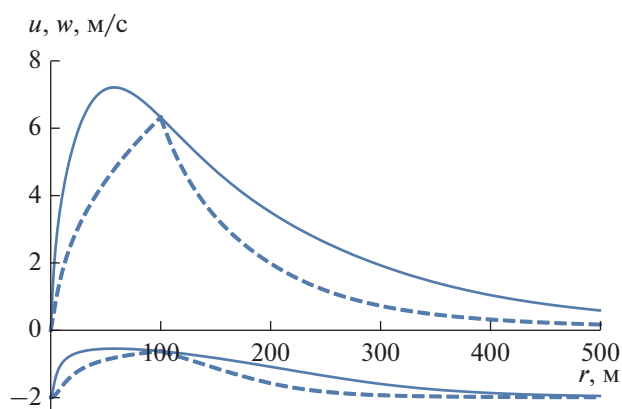


Рис. 3. Радиальные (две верхние кривые) и вертикальные (две нижние кривые) составляющие скорости частиц при $W = 2$ м/с.

Зная из (12) $r(t)$, с учетом (20), нетрудно выразить и закон вертикального движения. Радиальное распределение скорости течения в вихре $V(r)$ может быть рассчитано по данным наблюдений за любой из составляющих скорости, например,

$$V(r) \approx \left\{ gr \left[\left(\frac{W}{w(r)} \right)^4 - 1 \right] \right\}^{1/2}. \quad (27)$$

Представляет интерес сравнить эти результаты с численными решениями для поля скорости частиц, полученными в [1] без использования ряда принятых в настоящей работе упрощений.

В [1] рассчитаны примеры движения различных категорий частиц для двух моделей идеализированных вихрей. Одна из них – вихрь Рэнкина (Rankine vortex):

$$V(r) = \begin{cases} V_* r/R, & r \leq R; \\ V_* R/r, & r \geq R. \end{cases} \quad (28)$$

Другая модель – вихрь Фидлера (Fiedler vortex):

$$V(r) = \frac{2V_* Rr}{R^2 + r^2}. \quad (29)$$

Здесь R – радиус максимальной скорости, V_* – ее значение. На рис. 2 представлены радиальные профили скорости $V(r)$ для численных примеров, наиболее подробно проанализированных в [1].

В расчетах [1] рассматривается движение в таких вихрях нескольких разных категорий частиц (“объектов”). Сюда относятся, в частности:

- 1) небольшие капли дождя (диаметр порядка 0.5 мм) со скоростью оседания $W = 2$ м/с;
- 2) большие капли дождя (диаметр порядка 5 мм) или мелкий град, $W = 10$ м/с;
- 3) большие градины (диаметр порядка 5 см), а также листы фанеры, $W = 20$ м/с;
- 4) большие осколки, сравнимые по порядку величины с размерами кирпичей, $W = 40$ м/с.

В расчетах [1] предполагалось, что в начальный момент времени $t = 0$ рассматриваемые объекты движутся с той же горизонтальной скоростью, что и воздух в вихре, и что они оседают с установившейся скоростью падения. Время вязкой релаксации для рассмотренных категорий частиц, согласно [1], находится в интервале от 0.2 до 4.1 с. Отсюда в упомянутой работе сделан вывод, что через несколько десятков секунд движения частиц определяются действующими силами, а не начальными условиями.

На рис. 3 приведены примеры рассчитанных в рамках настоящей модели профилей радиальной и вертикальной составляющих скорости частицы, движущейся в вихрях, представленных на рис. 2 (тангенциальные составляющие скорости частицы, согласно настоящей модели, совпадают с профилями рис. 2). Как нетрудно убедиться, эти кривые очень близки к результатам соответствующих численных расчетов [1]. Видно, что уже относительно небольшие частицы (капли воды радиусом около 0.25 мм) заметно “центрифугируются”. Связанное с этим увеличение модуля скорости относительно среды, как отмечалось еще в [1], приводит к возрастанию коэффициента сопротивления и существенному замедлению оседания частиц. Иными словами, разные составляющие движения частиц заметно влияют друг на друга.

В табл. 1. приведены некоторые результаты расчетов в сравнении с [1]. Как и следовало ожидать, для более массивных частиц, параметры которых выходят за рамки принятых в настоящей модели допущений, результаты, вообще говоря, могут сильно отличаться от численной модели [1], свободной от ряда упрощений. Но некоторые результаты удовлетворительно согласуются даже для весьма массивных частиц, на адекватное описание динамики которых настоящая модель,

Таблица 1. Максимальные значения трех составляющих скорости переноса различных объектов (частиц) для шести вариантов профиля ветра, соответствующих различным модельным вихрям. В скобках указаны радиусы максимумов скорости. Для сравнения приведены результаты численных расчетов [1] (помечены индексом “[1]”)

Профиль ветра	W , М/с	u_{\max} , М/с	$u_{[1]}$, М/с	v_{\max} , М/с	$v_{[1]}$, М/с	w_{\max} , М/с	$w_{[1]}$, М/с
Fiedler,	2	7.2 (58 м)	7.2 (60 м)	100 (100 м)	99.6 (100 м)	-0.6 (60 м)	-0.6 (70 м)
$R = 100$ м,	10	36.0 (60 м)	28.3 (90 м)	100 (100 м)	91.2 (120 м)	-2.8 (60 м)	-3.2 (80 м)
$V_* = 100$ м/с	20	72.0 (60 м)	38.7 (130 м)	100 (100 м)	74.9 (140 м)	-5.5 (60 м)	-8.5 (120 м)
Rankine,	2	6.3 (100 м)	6.3 (100 м)	100 (100 м)	99.3 (100 м)	-0.6 (100 м)	-0.6 (100 м)
$R = 100$ м,	10	31.5 (100 м)	25.8 (110 м)	100 (100 м)	86.8 (110 м)	-3.15 (100 м)	-3.7 (110 м)
$V_* = 100$ м/с	20	63.0 (100 м)	35.2 (130 м)	100 (100 м)	68.1 (110 м)	-6.3 (100 м)	-10.0 (120 м)
Fiedler,	2	3.5 (60 м)	3.5 (50 м)	50 (100 м)	49.8 (100 м)	-1.1 (60 м)	-1.1 (60 м)
$R = 100$ м,	10	17.6 (60 м)	13.8 (90 м)	50 (100 м)	45.9 (120 м)	-5.4 (60 м)	-6.1 (80 м)
$V_* = 50$ м/с	20	35.2 (60 м)	18.9 (120 м)	50 (100 м)	38.8 (140 м)	-10.8 (60 м)	-14.7 (100 м)
Rankine,	2	3.05 (100 м)	3.1 (100 м)	50 (100 м)	49.7 (100 м)	-1.2 (100 м)	-1.2 (100 м)
$R = 100$ м,	10	15.2 (100 м)	12.4 (110 м)	50 (100 м)	44.0 (110 м)	-6.1 (100 м)	-6.8 (100 м)
$V_* = 50$ м/с	20	30.45 (100 м)	16.9 (120 м)	50 (100 м)	35.8 (110 м)	-12.2 (100 м)	-15.9 (110 м)
Fiedler,	2	5.1 (115 м)	5.1 (120 м)	100 (200 м)	99.8 (200 м)	-0.8 (115 м)	-0.8 (130 м)
$R = 200$ м,	10	25.3 (115 м)	22.1 (150 м)	100 (200 м)	95.4 (220 м)	-3.9 (115 м)	-4.3 (180 м)
$V_* = 100$ м/с	20	50.7 (120 м)	34.0 (210 м)	100 (200 м)	84.8 (260 м)	-7.8 (120 м)	-9.9 (190 м)
	40	101.35 (120 м)	40.9 (300 м)	100 (200 м)	65.1 (320 м)	-15.6 (120 м)	-27.1 (260 м)
Rankine,	20	4.5 (200 м)	4.5 (200 м)	100 (200 м)	99.7 (200 м)	-0.9 (200 м)	-0.9 (190 м)
$R = 200$ м,	10	22 (200 м)	19.9 (210 м)	100 (200 м)	92.7 (210 м)	-4.4 (200 м)	-4.7 (200 м)
$V_* = 100$ м/с	20	44.3 (200 м)	30.9 (240 м)	100 (200 м)	79.0 (220 м)	-8.85 (200 м)	-11.4 (220 м)
	40	88.5 (200 м)	36.4 (290 м)	100 (200 м)	58.8 (240 м)	-17.7 (200 м)	-30.0 (230 м)

строга говоря, не могла претендовать. Это, прежде всего, относится к расчетам тангенциального движения, которое представляется особенно важным для регистрации доплеровскими радарными и в контексте опасностей, связанных со смерчами. Например, для последних двух модельных вихрей табл. 1 отличие от [1] в расчете максимального значения тангенциальной скорости частицы находится примерно в пределах 20% даже для массивных частиц со скоростью оседания 20 м/с, т. е. на порядок больше принятых в настоящей моде-

ли ограничений относительно этого параметра. Тем более удовлетворительное согласие можно нередко констатировать для частиц со скоростью оседания 10 м/с. Следует иметь в виду, что максимумы рассматриваемых радиальных профилей составляющих скорости частиц бывают весьма размытыми (особенно $w(r)$ – кривые бывают близки к “плато”). В таких случаях кривые могут практически мало различаться, несмотря на большие формальные различия положений их максимумов.

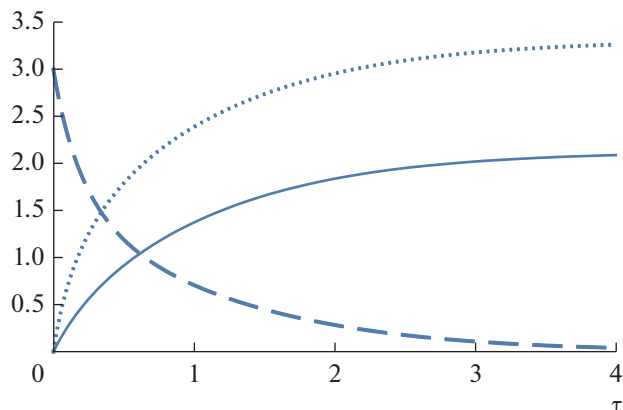


Рис. 4. Безразмерные зависимости от времени радиальной скорости частицы (штриховая линия) и радиального перемещения (сплошная линия) при $|u_0/W = 3|$. Пунктирная линия – путь, пройденный в радиальном направлении при $|u_0/W = 10|$.

4. ОЦЕНКА ДАЛЬНОСТИ РАДИАЛЬНОГО ПЕРЕНОСА ТЯЖЕЛЫХ ЧАСТИЦ

В литературе отмечается, что выпадение переносимых торнадо тяжелых частиц/предметов бывает заметно и на некотором удалении от области интенсивных ветров [1, 16]. Частицы могут выбрасываться из вихря с достаточно большими радиальными скоростями. Такой перенос, видимо, является дополнительным фактором опасности, который полезно учитывать; кроме того натурные данные о выпадении переносимого вихрем вещества на его периферии, в принципе, могут содержать дополнительную информацию о его динамике и структуре.

Для оценки дальности такого переноса имеет смысл рассмотреть задачу о движении частицы с заданной начальной скоростью, которая в простейшем случае имеет составляющие только в радиальном и вертикальном направлениях. Вдали от области интенсивных ветров вращение может не играть принципиальной роли, поэтому в рамках грубой модели можно ограничиться двумерной задачей.

Система уравнений, учитывающая нелинейное сопротивление, в этом упрощенном случае имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{g}{W^2} u (u^2 + w^2)^{1/2}, \\ \frac{dw}{dt} &= -g - \frac{g}{W^2} w (u^2 + w^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (30)$$

Перейдем к безразмерным переменным $U, \tilde{W}, \tilde{\tau}$, нормируя составляющие скорости и время на W и W/g соответственно. Пространственный мас-

штаб перемещения частицы при этом составляет W^2/g . Система уравнений приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\tilde{\tau}} &= -U (U^2 + \tilde{W}^2)^{1/2}, \\ \frac{d\tilde{W}}{d\tilde{\tau}} &= -1 - \tilde{W} (U^2 + \tilde{W}^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (31)$$

Представляет интерес, прежде всего, предельный случай, когда в начальный момент радиальная скорость частицы много больше вертикальной. В этом случае, в первых уравнениях (30), (31) можно пренебречь вертикальной скоростью, так что

$$dU/dt \approx -U^2. \quad (32)$$

Для радиальной скорости и пройденного частицей горизонтального расстояния легко получить приближенное аналитическое решение:

$$\begin{aligned} u &\approx \frac{u_0}{1 + (u_0 g / W^2) t}, \\ \Delta r &\approx \frac{W^2}{g} \ln [1 + (u_0 g / W^2) t]. \end{aligned} \quad (33)$$

Может показаться странным, что пройденный путь слабо (лишь логарифмически) зависит от начальной скорости. Это объясняется тем, что с ростом начальной скорости возрастает и сопротивление, так что скорость быстро убывает со временем, и на временах, превышающих $W^2/g u_0$, из (33) следует не зависящее от u_0 выражение $u \approx W^2/g t$. Поэтому на стадии быстрого торможения (пока радиальная скорость остается много больше вертикальной) пройденный путь не успевает превысить по порядку величины масштаба W^2/g . Затем сопротивление даже относительно усиливается по сравнению с (32), поскольку в правой части первого уравнения (31) становится заметным и вклад вертикальной скорости в коэффициент сопротивления. После переходного периода, когда обе составляющие скорости вносят в сопротивление заметный вклад, оседание выходит на стационарный режим с $|\tilde{W}| \approx 1$, и решение для радиальной скорости имеет вид

$$\begin{aligned} u &\approx W \frac{2U_0}{E(\tilde{\tau}) - U_0^2/E(\tilde{\tau})}, \\ E(\tilde{\tau}) &\equiv \left[1 + (1 + U_0^2)^{1/2} \right] \exp(\tilde{\tau}). \end{aligned}$$

На этой стадии скорость убывает со временем даже быстрее, чем в (33) – экспоненциально. Таким образом, остается в силе вывод, что пройденный в радиальном направлении путь не может превышать по порядку величины масштаб W^2/g (даже если радиальное удаление частицы происходит на

достаточной высоте и не будет быстро прервано выпадением на подстилающую поверхность).

На рис. 4 приведены примеры результатов численного решения системы (31). Видно, что радиальное удаление частиц действительно финитно (даже без учета их выпадения) и слабо зависит от начальной радиальной скорости. Даже при ее десятикратном превышении над скоростью стационарного оседания частицы, радиальный перенос лишь примерно в три раза превышает масштаб W^2/g . Например, для больших обломков со скоростью оседания $W = 30$ м/с при $u_0 = 90$ м/с их радиальный перенос, согласно рис. 4, может достигать около $2W^2/g \approx 200$ м.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренная упрощенная аналитическая модель хорошо согласуется с численными расчетами [1] при значениях числа Рейнольдса для частиц до порядка 10^3 (капли воды размерами до порядка миллиметра). Некоторые особенности движения удовлетворительно воспроизводятся и для значительно более массивных частиц. Наличие адекватной аналитической модели способствует пониманию динамики рассматриваемых процессов и позволяет существенно обобщить результаты, содержащиеся в нескольких разрозненных примерах, численно рассчитанных в [1]. Например, в упомянутой работе констатируется, что в вихрях с максимальной скоростью ветра 50 м/с тангенциальные и радиальные скорости движения частиц примерно вдвое меньше, чем в вихрях с максимальной скоростью ветра 100 м/с. В настоящей работе это непосредственно вытекает из полученных аналитических выражений (например, из (25)), справедливых не только для рассмотренных в [1] простейших модельных вихрей Рэнкина и Фидлера). Аналогичным образом, выражение (25) объясняет и обобщает те результаты [1], согласно которым радиальные скорости частиц уменьшаются с увеличением радиусов вихрей. Согласно результатам [1], для вихрей Рэнкина и Фидлера максимумы радиальной скорости частиц находятся по разные стороны от радиуса максимальных ветров, что также описывается настоящей моделью (например, рис. 3).

Модель прозрачно демонстрирует эффекты нелинейного взаимодействия разных составляющих движения частицы, поскольку коэффициент сопротивления зависит от всех составляющих движения относительно среды. Адекватное описание движения частиц может иметь значение для правильной интерпретации результатов радарного зондирования, для оценки опасностей, связанных со смерчами, и, возможно, для моделирования динамики самих смерчей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dowell D.C., Alexander C.R., Wurman J.M., Wicker L.J.* Centrifuging of hydrometeors and debris in tornadoes: Radar-reflectivity patterns and wind-measurement errors // *Mon. Wea. Rev.* 2005. V. 133. № 6. P. 1501–1524.
2. *Lewellen D.C., Gong B., Lewellen W.S.* Effects of fine scale debris on near surface tornado dynamics // *J. Atmos. Sci.* 2008. V. 65. P. 3247–3262.
3. *Bodine D.J., Maruyama T., Palmer R.D., Fulton C.J., Bluestein H.B., Lewellen D.C.* Sensitivity of tornado dynamics to debris loading // *J. Atmos. Sci.* 2016. V. 73. № 7. P. 2783–2801.
4. *Stenz R.* The impacts of hydrometeor centrifuging on tornado dynamics [Электронный ресурс]. 2017. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=44rtkbfAx0Y> (дата обращения 17.11.2020).
5. *Baker C.J., Sterling M.* Modelling wind fields and debris flight in tornadoes // *J. Wind Engineering & Industrial Aerodynamics.* 2017. V. 168. P. 312–321.
6. *Baker C.J., Sterling M.* A conceptual model for wind and debris impact loading of structures due to tornadoes // *J. Wind Engineering & Industrial Aerodynamics.* 2018. V. 175. P. 283–291.
7. *Snow J.T.* On the formation of particle sheaths in columnar vortices // *J. Atmos. Sci.* 1984. V. 41. P. 2477–2491.
8. *Zhao Y.Z., Gu Z.L., Yu Y.Z., Ge Y., Li Y., Feng X.* Mechanism and large eddy simulation of dust devils // *Atmosphere–Ocean.* 2004. V. 42. № 1. P. 61–84.
9. *Kangieser P.C.* A physical explanation of the hollow structure of waterspout tubes // *Mon. Wea. Rev.* 1954. V. 82. № 6. P. 147–152.
10. *Островский Л.А.* Динамика концентрации тяжелых и легких частиц в вихревых потоках // *Изв. АН. СССР. Физика атмосферы и океана.* 1990. Т. 26. № 12. С. 1307–1314.
11. *Плешанов А.С.* К теории гидродинамической устойчивости смерчей (торнадо). М.: Информ-энерго, 1993. 63 с.
12. *Лебедева Н.А., Осипцов А.Н.* Структура зон аккумуляции инерционной примеси в течении типа торнадо // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* 2009. № 1. С. 83–96.
13. *Ингель Л.Х.* О нелинейной динамике массивных частиц в смерчах // *Журн. технич. физики.* 2020. Т. 90. № 6. С. 900–904.
14. *Bluestein H.B.* Severe Convective Storms and Tornadoes. Observations and Dynamics. Heidelberg et al: Springer, 2013. 456 p.
15. *Bodine D.J., Kurdzo J.M.* Ground-Based Radar Technologies for Tornado Observations Remote Sensing of Clouds and Precipitation Ed. C. Andronache. Springer International Publishing, 2018. 282 p.
16. *Marshall T.P.* Tornado damage survey at Moore, Oklahoma // *Wea. Forecasting.* 2002. V. 17. P. 582–598.

On the Dynamics of Inertial Particles in Intensive Atmospheric Vortex

L. Kh. Ingel^{1, 2, *}

¹*Research and Production Association "Typhoon", Pobedy str., 4, Obninsk, 249038 Russia*

²*Obukhov Institute of Atmospheric Physics, Russian Academy of Sciences, Pyzhevskii per., 3, Moscow, 119017 Russia*

**e-mail: lev.ingel@gmail.com,*

The movement of inertial particles in intense vortices with a vertical axis in a gravity field is analyzed analytically. In this problem, the nonlinear nature of the hydrodynamic resistance is essential – its dependence on the modulus of the particle velocity relative to the medium. The different components of the movement interact with each other, since each of them affects the coefficient of resistance. An effective method for an approximate analytical solution of the problem has been found. A number of general laws of particle dynamics have been established. Comparison of the results with some numerical calculations available in the literature confirms the adequacy of the model for Reynolds numbers up to about 10^3 . In some respects, satisfactory agreement can be stated for more massive particles as well. The distance of transport of heavy particles outside the region of intense winds has been estimated. An adequate description of the motion of particles can be important for the correct interpretation of the results of radar sounding of tornadoes, for assessing the associated hazards, and, possibly, for modeling the dynamics of the tornadoes themselves.

Keywords: intense atmospheric vortices, massive particles, hydrometeors, transport, centrifuging, nonlinear resistance, analytical model, tornadoes