ИЗВЕСТИЯ РАН. ФИЗИКА АТМОСФЕРЫ И ОКЕАНА, 2022, том 58, № 1, с. 10–21

УДК 551.513

О КОГЕРЕНТНЫХ И СТОХАСТИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ В ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЯХ СО СДВИГОМ СКОРОСТИ

И. Г. Якушкин*, **

Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, Пыжевский пер., 3, Москва, 119017 Россия

**e-mail: aakhapaev@gmail.com*

***e-mail: lgg@ifaran*

Поступила в редакцию 01.03.2021 г.
После доработки 30.06.2021 г.
Принята к публикации 11.08.2021 г.

В статье дается описание различных структур, образующихся при стабилизации неустойчивости в волновых и вихревых течениях идеальной жидкости. Подробно рассмотрена задача о волновых структурах в стратифицированном по плотности и скорости течении несжимаемой жидкости. Стабилизация неустойчивости происходит в результате взаимодействия неустойчивой волны с волнами, образующими с нею резонансный триплет. При этом возникают структуры регулярного и стохастического характера. В работе проанализирован и описан сценарий перехода системы в стохастический режим. Постановка соответствует атмосферным течениям при сдвиге ветра, но полученные результаты могут быть использованы и в других задачах теории нелинейных волн и вихрей. В статье показано, что структуры сходного характера возникают также в вихревых течениях, как идеальной, так и вязкой жидкости.

Ключевые слова: когерентные и стохастические структуры, сдвиговые течения, неустойчивость течений

DOI: 10.31857/S0002351521060110

1. ВВЕДЕНИЕ

Многочисленные наблюдения явлений в океане и атмосфере указывают на существование различных когерентных и стохастических пространственно-временных структур. Они могут рассматриваться как полностью или частично детерминированные образования.

Разнообразные структуры возникают при развитии и последующей стабилизации различного рода неустойчивостей в равновесных течениях [1, 2]. Подобные структуры оказывают влияние на процессы разных масштабов, от циркуляции атмосферы как целого до турбулентности. Разнообразные неустойчивости и структуры имеют сходное значение для механики, оптики, физики плазмы и астрофизики, где квадратичная нелинейность играет существенную роль [3, 4].

В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением простейших структур, связанных с квадратичной нелинейностью уравнений гидродинамики. Для течений идеальной жидкости это соответствует учету кубичных членов. Такая процедура была последовательно проведена в работах Н.Н. Романовой. Подобные структуры имеют форму триплета. При одновременном развитии неустойчивости в такой системе возникают различные колебательные режимы. К числу механизмов, ведущих к полной или частичной стабилизации, относится нелинейное взаимодействие неустойчивых мод, при котором их энергия передается вторичному течению [5–8]. Подобный механизм образования структур первоначально был исследован в работах М.И. Рабиновича и его соавторов [9, 10]. В этих работах для трехволновой модели с форсингом и линейным трением была показана возможность осуществления различных режимов, включающих стабилизацию неустойчивости и появление периодических или хаотических колебаний. Близкое экспериментальное исследование было представлено в работах Ф.В. Должанского и его соавторов [11]. В частности, рассматривались различные режимы колебаний четырех и более вихрей в прямоугольной кювете. Численное исследование было проведено для трехмодовой модели с внешней силой и линейным трением при небольших числах Рейнольдса.

Образование стабилизирующего неустойчивость резонансного триплета в сдвиговом течении идеальной жидкости происходит при определенном типе дисперсионных соотношений в линейной граничной задаче. Такая ситуация была исследована в [12, 13], где неустойчивость описывалась двумя уравнениями для близких по частоте волн Россби. В этих работах было показано, что трехволновые взаимодействия ведут к стабилизации неустойчивости и возникновению периодических колебаний.

Особый интерес для атмосферных приложений имеет анализ развития неустойчивости типа Релея–Тэйлора или Кельвина–Гельмгольца, характерный для течений со сдвигом скорости [14–16]. В атмосферных приложениях область сдвига ветра размыта и должна быть учтена конечная ширина этой области. В системе с двумя или несколькими границами с разрывами завихренности при определенных значениях волнового числа присутствуют неустойчивые "гибридные" моды, которые являются результатом взаимодействия волн на разных границах. Стабилизация неустойчивости происходит за счет нелинейного взаимодействия между компонентами течения. Для описания этого процесса используются различные подходы. Подход, развитый в работах [17, 18], рассматривает ограничение роста возмущений на границах слоев как своего рода "соударения" границ. Ограничение роста неустойчивой моды происходит также за счет взаимодействия с устойчивыми модами. Это было исследовано в работах Н.Н. Романовой с соавторами [19–21] для течения несжимаемой жидкости со сдвигом скорости и стратификацией по плотности. В этих работах было дано описание режимов периодических и стохастических колебаний, возникающих при стабилизации неустойчивости. Работы основывались на оригинальном варианте метода Гамильтона в пространстве полулагранжевых координат [22, 23].

Из результатов работ [19–21] следовало, что течения с разрывами скорости или завихренности, сходные в целом, имеют между собой важные различия. В задаче с разрывом скорости трехволновые взаимодействия ведут к временной стабилизации неустойчивости. Устойчивые волны в этом случае связаны законом сохранения энергии и поэтому передача энергии каждой из них ограничена. В задаче с разрывами завихренности устойчивые волны связаны условием сохранения "числа фотонов" (на языке оптики). Соответственно, их суммарная энергия может расти неограниченно. Это ведет к полной стабилизации неустойчивости и возникновению стационарных или квазистационарных структур, в которых может быть сильно выражена длинноволновая компонента. В зависимости от фазовых соотношений между взаимодействующими модами образующиеся структуры имеют периодический, двоякопериодический или хаотический характер.

Структуры близкого типа возникают и в других, достаточно отличающихся ситуациях. Неожиданное сходство открывается при обращении к трехмерной вихревой системе (волчок Должанского) [24, 25]. Описанные Ф.В. Должанским вихревые системы демонстрируют сходное с волновым триплетом регулярное и стохастическое поведение. Похожие структуры присутствуют также в течениях вязкой жидкости, как это следует из анализа системы с линейным трением (системы Лоренца) [24, 5].

В общем сценарии развития неустойчивости особое место занимает механизм перехода к хаосу. Хаос в простых динамических системах представляет большой интерес для многих областей науки, включая не только физику. Хаотические режимы возникают как в гамильтоновых, так и в диссипативных системах, даже при небольшом числе степеней свободы. Между этими системами существуют важные различия. В диссипативных системах траектории имеют особый характер (типа странных аттракторов) [26–28]. Тем не менее общее поведение хаотизированных структур в идеальной и вязкой жидкости оказывается сходным. Взаимодействие, ограничивающее рост неустойчивости, описывается или системой из трех уравнений, или системой шести уравнений с тремя инвариантами. Такая система, описывающая взаимодействие возмущения, отклика и фона, подобна нелинейному осциллятору. Параметры такого осциллятора могут иметь характер квазиинвариантов. Хаос возникает как результат взимодействия более быстрых и более медленных движений.

Затронутые выше вопросы освещались в различных работах, но многие детали образования структур и особенно их перехода к хаосу остаются не проясненными. Недостаточно обращалось внимание на сходство структур, образующихся в разных физических ситуациях. Обсуждению этих проблем посвящена настоящая статья. На основе работ своих коллег по Институту физики атмосферы автор рассматривает наиболее характерные черты сценария образования и хаотизации структур типа триплета в различных физических ситуациях. Рассмотренные задачи носят модельный характер и возможность обобщения результатов должна рассматриваться особо.

В разделе 2 содержится общая постановка задачи о развитии неустойчивости в сдвиговых течениях идеальной жидкости и ее конкретизация для модели трехслойного течения. В разделе 3 дается общее описание стабилизации неустойчивости для трехслойной модели и рассматриваются свойства периодического режима. В разделе 4 рассмотрен механизм перехода системы к хаотическому режиму. В разделе 5 рассматривается развитие неустойчивости, образование и хаотизация структур в трехмерных вихревых течениях идеальной жидости. Там же дано описание аналогичных процессов в вязких течениях. В заключении обсуждаются результаты работы.

2. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В ТЕЧЕНИЯХ СО СДВИГОМ СКОРОСТИ

Рассмотрим течение идеальной несжимаемой жидкости, стратифицированной в поле силы тяжести по плотности ρ и со сдвигом скорости V. Вихревой характер течения позволяет для его описания вместо скорости использовать завихренность $\mathbf{\Omega} = \mathrm{rot}\mathbf{V}$. В приближении Буссинеска, т.е. при $|\rho - \rho_0| \ll \rho_0 = \mathrm{const}$, уравнения для завихренности и плотности имеют вид:

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} - \mathrm{rot}\left[\mathbf{V}_x \times \mathbf{\Omega}\right] = \left[\mathbf{g}_x \times \nabla\rho\right], \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\mathbf{V}\cdot\nabla\rho\right) = 0. \tag{1}$$

Уравнения (1) описывают два процесса – колебания поверхности постоянной плотности, являющейся лагранжевым инвариантом, и колебания завихренности относительно этой поверхности. Из анализа линеаризованных уравнений для простейших систем следует, что при достаточно больших скоростях течения эти типы колебаний соответствют двум ветвям дисперсионного уравнения. Эти ветви описывают медленные и быстрые колебания и связаны с волновыми и вихревыми движениями в направлении основного течения и против него. Для медленного движения из первого уравнения системы (1) следует условие квазигеострофического равновесия:

$$-\mathrm{rot}\left[\mathbf{V}_x \times \mathbf{\Omega}\right] = \left[\mathbf{g}_x \times \nabla\rho\right]. \tag{2}$$

Подставляя (2) во второе уравнение системы, мы получаем описание медленных движений лагранжевых поверхностей, приводящих к образованию структур колебательного типа. Структуры образуются вблизи точки равновесия:

$$\left(\mathbf{V}\cdot\nabla\rho\right) = 0, \tag{3}$$

за счет обмена энергией между образующими триплет модами. Влияние быстрых колебаний на медленные при больших скоростях течения относительно невелико, хотя исключить его нельзя, особенно при возникновении больших градиентов возмущений плотности. Этот вопрос подробно рассматривался в работе [29], а мы вернемся к нему в разделе 5. Следует также отметить существование двух типов простейших структур. Это вихревые структуры с фиксированной границей и волновые структуры, образующиеся непосредственно на границе. Обратимся к описанию структур в двумерных течениях несжимаемой жидкости. Введем обозначения:

$$\rho = \rho(h), \quad \Omega = v(h) + \Phi(h, x),$$

$\mathrm{N}^2 = -\dfrac{g}{\rho_0}\dfrac{\partial\rho}{\partial h}$ – квадрат частоты Брента–Вяйсяля, $\mathrm{Ri} = \mathrm{N}^2\left(\dfrac{dU}{dh}\right)^2$ – число Ричардсона, основной физический параметр задачи, характеризующий степень неустойчивости течения.

Следуя [19, 21], перейдем к анализу трехслойной модели течения с постоянными значениями плотности и завихренности в отдельных слоях. Верхний и нижний слои простираются до бесконечности, а средний слой имеет конечную толщину $2H$. В каждом слое плотность имеет постоянные значения: $\rho_0 + \Delta\rho$, ρ_0, $\rho_0 - \Delta\rho$. В нижнем $(z < h_1)$ и верхнем $(z > h_2)$ слоях равновесное течение имеет постоянные значения скорости U_0 и $-U_0$, а в среднем слое меняется по линейному закону, что соответствует постоянной завихренности.

Основные параметры и переменные представимы в форме:

$$\mathrm{N}^2(h) = \sum \mathrm{N}_j^2 \delta(h - h_j), \quad \frac{dv}{dh} = \sum v_j \delta(h - h_j),$$
$$\Phi = \sum \Phi_j \delta(h - h_j), \quad \eta = \sum \eta_j \delta(h - h_j),$$
$$\mathrm{N}^2 = g\frac{\Delta\rho}{\rho}, \quad v_1 = -v_2 = -v = -\frac{U_0}{h}. \tag{4}$$
$$\mathrm{Ri} = \mathrm{R} = \frac{\mathrm{N}^2 H^2}{U_0^2}.$$

Индексы $j = 1, 2$ соответствуют границам слоев. Используя выражения (4), получаем уравнения в полулагранжевых координатах h, x относительно переменных $\Phi_j, z_j(h, x)$:

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial t} + \frac{\partial(u\Phi_j)}{\partial x} = \mathrm{N}_j^2 \frac{\partial z_j}{\partial x}, \quad \frac{\partial z_j}{\partial t} + u\frac{\partial z_j}{\partial x} = w. \tag{5}$$

где u, w – горизонтальная и вертикальная компоненты скорости течения, которые определяются обычным образом через функцию тока. Для медленных колебаний из первого уравнения системы (5) получаем условие квазиравновесия:

$$U(h_j)\frac{\partial \Phi_j}{\partial x} = N_j^2 \frac{\partial z_j}{\partial x}.$$

С учетом этого условия, переходя к Фурье представлению, из линеаризованной системы (4) получаем дисперсионное уравнение:

$$D = D_1 D_2 - \mu = 0$$
$$D_1 = \frac{\mathrm{R}|k'| + k' + 2k'(\omega' - k')}{\mathrm{R}|k'|k'},$$
$$D_2 = \frac{\mathrm{R}|k'| + k' - 2k'(\omega' + k')}{\mathrm{R}|k'|k'}, \tag{6}$$
$$\mu = \exp\left[-4|k'|\right]\omega' = \frac{\omega h}{U_0}, \quad k' = kh,$$
$$D_1(\omega, k) = D_1(-\omega, -k) = D_2(\omega, -k) = D_2(-\omega, k).$$

Выражения $D_i = 0$ описывают дисперсионные уравнения для колебаний каждой из границ, а коэффициент μ учитывает связь между границами, которая становится существенной при близости корней $D_i(\omega)$. В точке $\omega = 0$, $k = k_0 \sim (1+\mathrm{Ri})/2$ дисперсионные кривые пересекаются, и при $(k-k_0) < \mu(k_0)/2k_0$ возникает интервал неустойчивости, ширина которого зависит от числа Ричардсона [16].

Когда амплитуда пакета волн, генерируемых неустойчивой областью, растет, на нее начинает оказывать влияние взаимодействие с волнами, удовлетворяющими соотношениям синхронизма:

$$k_1 + k_2 + k_3 = 0,\ \ \omega(k_1) + \omega(k_2) + \omega(k_3) = 0. \quad (7)$$

В рассматриваемом случае дисперсионные кривые имеют падающие участки, обеспечивающие резонансы. Если точка $k_{02} > 0$ соответствует неустойчивой моде, то точки k_{01} и k_{03} имеют разные знаки и принадлежат разным ветвям полного дисперсионного уравнения. При этом удобно выбрать:

$$k_1 = k_{01} < 0,\ \ k_2 = k_{02} < 0,\ \ k_3 = k_{03} > 0.$$

Волновые пакеты с частотами, близкими к резонансным, описывают колебания границ внутреннего слоя. Суммарное колебание представим в виде:

$$d(k) = \sum\left(Z_j(k)\,a_j(k,t) + Z_j^*(-k)\,a_j^*(-k,t)\right), \quad (8)$$

где $Z_j(k)$ – нормализованные собственные векторы, соответствующие значениям частоты $\omega_j(k)$. Коэффициенты a_j задаем в виде суммы взаимодействующих волновых мод:

$$\begin{gathered} a_1(k,t) = A_1(t,k_1+k_{01})\times \\ \times\exp[-i\omega_1(k_1+k_{01})t] + A_4^*(t,k_2-k_{02}), \\ a_2(k,t) = A_3(t,k_3+k_{03})\times \\ \times\exp[-i\omega_3(k_3+k_{03})t] + A_2^*(t,k_2+k_{02}), \end{gathered} \quad (9)$$

где $|k_i| \ll |k_{0i}|$

$$\begin{gathered} \omega_1(k_1+k_{01}) - \omega_1(k_{01}) = v_1k_1, \\ \omega_3(k_3-k_{03}) - \omega_3(k_{03}-k_3) = v_3k_3, \\ \omega_2(k_2+k_{02}) = v_2k_2. \end{gathered}$$

Уравнения взаимодействующих пакетов, следуя [19–21], получаем в виде:

$$\begin{gathered} \frac{dA_1}{dt} + i\nu_1k_1A_1 = -i\frac{1}{2\pi}\int A_3^*(k_3)\,A_2(k_1-k_3)\times \\ \times\exp[i(\nu_1k_1+\nu_3k_3)t]\,dk_3, \\ \frac{dA_3}{dt} + i\nu_3k_3A_3 = -i\frac{1}{2\pi}\int A_1^*(k_1)\,A_2(k_3-k_1)\times \\ \times\exp[i(\nu_1k_1+\nu_3k_3)t]\,dk_1, \\ \frac{dA_2}{dt} + i\nu_2k_2A_2 = -iSA_4^* - i\frac{1}{2\pi}\int A_1(k_1)\,A_3(k_2-k_1)\times \\ \times\exp[-i(\nu_1k_1+\nu_3k_2-\nu_2k_1)t]\,dk_1, \\ \frac{dA_4}{dt} - i\nu_2k_2A_4 = iSA_2^*(k_2), \\ S = \mu F,\ \ F(k) = \mu(k)|k|\frac{2}{\left(D_{1\omega}(k)\,D_{2\omega}(-k)\right)^{1/2}}. \end{gathered} \quad (10)$$

Выражения (8–10) описывают согласующее граничные условия взаимодействие волн на двух границах.

3. СДВИГОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В ТРЕХСЛОЙНОЙ СРЕДЕ

Особое значение для исследования различных типов структур имеет задача о взаимодействии волн на строго резонансных частотах. Переходя к такой постановке задачи, зададим искомые величины в системе уравнений (10) в виде резонансного триплета:

$$A_i = B_i\delta(k-k_1),\ \ B_{2,4} = \frac{b_{2,4}S}{(v_1v_3)^{1/2}},$$

$$B_{1,3} = \frac{b_{1,3}S^2}{\left(v_{1,3}|v_1-v_3|\right)^{1/2}},\ \ t' = St.$$

Для переменных b_i из системы (10) получаем уравнения:

$$\begin{gathered} \frac{db_1}{dt} + ib_2b_3^* = 0,\ \ \frac{db_3}{dt} + ib_2b_1^* = 0, \\ \frac{db_2}{dt} + ib_1b_3 + ib_4 = 0,\ \ \frac{db_4}{dt} - ib_2 = 0. \end{gathered} \quad (11)$$

Эта система обладает следующими инвариантами:

$$\begin{gathered} I_1 = a^2 = b_1b_1^* - b_3b_3^*,\ \ I_2 = b_2b_2^* + b_1b_1^* - b_4b_4^*, \\ I_3 = c = \mathrm{Re}\left(b_2\left[b_1^*b_3^* + b_4^*\right]\right). \end{gathered} \quad (12)$$

Заметим, что последний инвариант есть гамильтониан системы:

$$H = b_2\left[b_1^*b_3^* + b_4^*\right] + b_2^*\left[b_1b_3 + b_4\right], \quad (13)$$

а система уравнений представима в виде:

$$\frac{db_i}{dt} = -I\frac{\delta H}{\delta b_i^*}.$$

Структура гамильтониана $H = I_3$ показывает, что динамика системы определяется относительным изменением комплексных величин (векторов) ib_2 и $b_4 + b_1b_3$, а также b_4 и b_1b_3. При этом вектор $b_4 + b_4b_1b_3$ представляет собой сумму компонент параллельной и ортогональной вектору b_2. При ортогональности векторов мы имеем $H = 0$. Если это условие нарушается, то начинает меняться фазовый сдвиг между компонентами b_4 и b_4b_1, и b_3. Выделение этих типов взаимодействия способствует решению задачи.

Используя первый инвариант, перейдем к более удобным переменным:

$$ib_2 = R_2 = R_{21} + iR_{22} = r_{2j}\exp[-i\varphi],$$
$$b_1b_3R_{13} = \frac{1}{2}a^2\mathrm{sh}(2\mu_j)\exp[i\theta_{13}],$$
$$b_1R_4 = r_4\exp[i\theta_4].$$

Система уравнений принимает вид:

$$\frac{dR_2}{dt} + R_{15} + R_4 = 0,\quad \frac{dR_{13}}{dt} - a^2\mathrm{ch}(2\mu)R_2 = 0,$$
$$\frac{dR_4}{dt} + R_2 = 0,\quad \frac{d\mathrm{ch}(\mu)}{dt} = \frac{2}{a^2}\mathrm{Re}\left(R_2R_{13}^*\right), \tag{14}$$
$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2},$$

с инвариантами:

$$\begin{gathered} r_2 - r_4^2 + a^2\mathrm{ch}(2\mu) = I_2,\\ \mathrm{Im}[R_2(R_{13} + R_4)] = c. \end{gathered} \tag{15}$$

При $c = 0$ из третьего инварианта следует:

$$\begin{gathered} \mathrm{Im}\,R_2 = R_{22} = 0,\quad a^2C_1 + C_2 = 0,\\ \frac{1}{2}a^2C_1 = \mathrm{Im}\,R_{13},\quad C_2 = \mathrm{Im}\,R_4. \end{gathered} \tag{16}$$

Из уравнений, при $c = 0$, также следует $\frac{1}{2}a^2C_1 = -C_{12} = \mathrm{const}$, т.е. эти величины представляют собой дополнительные инварианты. При малых c их можно рассматривать как квазиинварианты.

Таким образом, мы получаем три уравнения относительно переменных. Чтобы найти еще один квазиинвариант, сделаем замену переменных:

$$\begin{gathered} \mathrm{ch}(2\mu) = \mathrm{ch}x\,\mathrm{ch}(2\mu_{01}),\quad r_4 = \left(y^2 + y_0^2\right)^{1/2},\\ \mathrm{Re}\,R_{21} = \frac{1}{2}a^2\mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}(2\mu_{01}),\quad \mathrm{Re}\,R_4 = -y,\\ C_1 = \mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}(2\mu_{01}),\quad C_2 = y_0. \end{gathered} \tag{17}$$

Тогда имеем уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = 2R_{21} - 2\mathrm{sh}x\,\mathrm{sh}(2\mu_{01})Rr_{22},\quad \frac{dy}{dt} = -2R_{21}, \tag{18}$$

откуда следует:

$$\begin{gathered} x = -2y + S,\quad \frac{dS}{dt} = -2\mathrm{sh}(2\mu_0)\mathrm{sh}x_1R_{22},\\ \frac{d\mu_0}{dt} = \mathrm{ch}x R_{22},\quad \frac{dy}{dt} = R_{22}. \end{gathered} \tag{19}$$

При $c = 0$ величина S является инвариантом, а при малых $c \neq 0$, как и C_1, C_2, может рассматриваться как квазинвариант.

С учетом двух инвариантов система (18, 19) дает описание динамики течения через эволюцию переменных y, y_0, μ_0, S. Переходя к угловым переменным и исключая зависимость от фазы φ, мы можем получить систему трех уравнений менее удобную, однако, для вычислений.

Рассмотрим сначала поведение системы при $c = 0$. В этом случае движение происходит при постоянном значении инвариантов y_0, μ_0 и S, а траектории определяются уравнением:

$$\frac{Dy}{dt} = -R_2, \tag{20}$$

и инвариантом

$$I_2 = R_2^2 + a^2\mathrm{ch}(2\mu_0)\mathrm{ch}(S - 2y) - y^2y_0^2. \tag{21}$$

Период колебаний определяется как

$$T = \int\left[I_2 + y^2 + y_0^2 - \frac{a^2}{2}\mathrm{ch}(2\mu_0)\mathrm{ch}(S - 2y)\right]dy. \tag{22}$$

Интеграл берется по полпериоду колебаний между значениями y, следующими из (21) при $R_2 = 0$.

Инвариант (21) позволяет построить фазовые кривые на плоскости R_2, y. Движение в системе происходит между точками $R_2 = 0$, для которых чередуются большие и меньшие значения y, удовлетворяющие условию:

$$a^2\mathrm{ch}(2\mu_0)\mathrm{ch}(S - 2y) - (y)^2 = I_3 + y_0^2, \tag{23}$$

и точкой $dR_{21}/dt = 0$, положение которой определяется из

$$y - \frac{1}{2}a^2\mathrm{ch}(2\mu_0)\mathrm{sh}(S - 2y) = 0. \tag{24}$$

Система представляет собой нелинейный осциллятор, который обладает двумя особенностями. Во-первых, при $S \neq 0$ колебания несимметричны относительно средней точки. Во-вторых, определяющий колебания потенциал имеет немонотонный профиль и в центральной части может иметь барьер. Положение барьера определяется уравнением (24), которое имеет одно или три вещественных решения. Зависимость $R_2(t)$ вблизи экстремальных точек следует из уравнения:

$$\frac{D^2 R_2}{dt^2} + \left(a^2 \mathrm{ch}(2\mu_0)\mathrm{ch}x - 1\right) R_2 = 0, \quad x = S - 2y. \quad (25)$$

Квадрат мгновенной частоты $P^2 = a^2\mathrm{ch}(2\mu_0)\mathrm{ch}x - 1$ минимален при $x = 0$:

$$P^2(0) = a^2\mathrm{ch}(2\mu_0) - 1. \quad (26)$$

Если $P^2(0) > 0$, мы имеем одну точку максимума R_2. Это означает, что устойчивая компонента подавляет развитие неустойчивости. Если $P^2(0) < 0$, то возникают три экстремальные точки, две из которых, центральные соответствуют минимуму R_2. Таким образом, траектория системы на фазовой плоскости распадается на три интервала – центральный и прилегающие к точкам $R_2 = 0$. Движение на центральном участке соответствует области развития неустойчивости, а на соседних участках, имеющих характер пограничных слоев, ее стабилизации. Параметры μ_0 и S определяют высоту барьера и степень асимметрии колебаний. Обозначая $x_{2,1} = x_0 \pm \Delta x$, где $x_2, -x_1$ – корни уравнения (24) при $x = S - 2y$, имеем:

$$\left(2a^2\mathrm{ch}(2\mu_0)\mathrm{sh}x_0 - x_0\right)\Delta x = S.$$

В зависимости от параметров μ_0 S режимы колебаний разделяются на фазовой плоскости сепаратрисами, которым соответствуют значения $a^2\mathrm{ch}(2\mu_0)\mathrm{ch}x = 1$, $S = 0$. Как мы видим, неустойчивость развивается на некотором интервале времени, после чего энергия передается более длинным волнам, играющим главную роль в этом процессе.

4. СТОХАСТИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

В более общем случае при конечном значении третьего инварианта движение на фазовой плоскости R_{21}, y по-прежнему происходит между точками минимальных и максимальных значений этих переменных и в целом имеет тот же характер. Однако, колебания перестают быть периодическими и циклы становятся квазициклами. При переходе от одного квазицикла к другому происходит изменение параметров μ_0, S, что вызывает изменение не только амплитуды, но и фазы основных переменных и ведет к смещению траекторий на фазовой плоскости. Можно сказать, что наряду с движением по циклу происходит блуждание системы по этим циклам, которое может быть отражено на плоскости квазинвариантов. Интенсивность смещений возрастает с увеличением c, что приводит к хаотизации поведения системы.

Рассмотрим подробнее механизм возникновения хаоса при малом c. Полная система уравнений разделяется на две подсистемы относительно переменных R_2, y и переменных S, μ_0, y_0. Уравнения полной системы записываются как:

$$\frac{d^2 R_2}{dt^2} + \left(a^2\mathrm{ch}(2\mu_0)\mathrm{ch}x - 1\right) R_2 = 0, \quad \frac{d\mu_0}{dt} = \mathrm{ch}x R_{22},$$
$$\frac{dS}{dt} = -2\mathrm{sh}(2\mu_0)\mathrm{sh}x R_{22}, \quad \frac{dy_0}{dt} = -R_{22}. \quad (27)$$

Если известно решение задачи при $c = 0$, то при малых значениях c оно вместе с выражением для третьего инварианта, которое записывается в виде

$$R_{21}\frac{dR_{22}}{dt} + R_{22}\frac{dR_{21}}{dt} = c,$$

определяет компоненту R_{22}. На интервале основных периодических колебаний параметры μ_0, y_0, S можно считать постоянными. Их изменение за период следует из уравнений с известной правой частью. Эти уравнения принимают вид отображения за период основных колебаний (отображение Пуанкаре) и записываются в виде:

$$\Delta S = 2\mathrm{sh}(2\mu_0)\langle K_1\rangle T, \quad K_1 = \mathrm{sh}x R_{22},$$
$$\Delta\mu_0 = \langle K_2\rangle T, \quad K_2 = \mathrm{ch}x R_{22}, \quad (28)$$
$$\frac{d\mu_0}{dt} = -\langle R_{22}\rangle T.$$

Для вычисления правых частей в (28) важна их зависимость от S_0, μ_0, указывающая на степень асимметрии относительно центральной точки области. Учитывая свойства симметрии K_1, K_2, представим

$$K_1 = K_{1a} + SK_{1s}, \quad K_2 = K_{2s} + SK_{2a},$$
$$\langle K_1\rangle = S\langle K_{1s}\rangle, \quad \langle K_2\rangle = \langle K_{2s}\rangle, \quad (29)$$
$$\langle R_{22}\rangle = S\langle R_{22s}\rangle.$$

Отсюда следует система уравнений для переменных μ_0, S, y_0, малые изменения которых отнесены к интервалу T

$$\frac{dS}{dT} = 2\mathrm{sh}(2\mu_0)\langle K_{1s}\rangle, \quad \frac{d\mu_0}{dt} = S\langle K_{2s}\rangle,$$
$$\frac{dy_0}{dt} = S\langle R_{22s}\rangle. \quad (30)$$

При малых амплитудах система описывается линейными уравнениями, а с ростом амплитуды проявляется их нелинейность. Медленные колебания S, μ_0, y_0 приводят и к смещению фазовой кривой быстро колеблющегося осциллятора. При малых значениях медленных переменных, когда они колеблются с фиксированной частотой, колебания полной системы переходят в двоякопериодический режим. При увеличении амплитуды колебаний система переходит в состояние хаоса. При этом можно, как и в (28), рассматривать отображение точки на фазовой плоскости за один период.

Как известно, свойства такого отображения определяются спектром корреляционной функции. Переходу к хаосу соответствует переход от дискретного спектра к непрерывному. Более простой способ оценки степени хаотичности состоит в вычислении матрицей Якоби, которая в данном случае имеет вид:

$$J = \frac{d\Delta R_{21}}{dx}\frac{d\Delta y}{dy} - \frac{d\Delta R_{21}}{dy}\frac{d\Delta y}{dx}. \quad (31)$$

Отрицательные значения J указывают на области, где сжатие траекторий в одном направлении сопровождается растяжением в другом. Локальная неустойчивость такого рода при $J > J_0$ приводит к полной стохастичности. Это происходит при нелинейной зависимости отображения от переменных. Появление на фазовой плоскости области неустойчивости отображения связано в первую очередь с пересечением системой сепаратрисы. Это сопровождается образованием стохастического сепаратрисного слоя. С увеличением размаха колебаний нелинейность отображений ведет к нарастанию хаоса и превращению слоя в “стохастическое море”. Такая эволюция в основном соответствует сценарию картины, описанному для простейших гамильтоновых систем в работах Г.М. Заславского и его соавторов [26, 27]. Вместе с тем фазовые кривые на плоскости переменных $S\mu_0$ показывают более упорядоченное поведение, сохраняющее основные черты структуры. Как показывают последние исследования, турбулентность также сохраняет подобные структурные особенности [5, 6]

Обобщение полученных выше результатов следует из анализа задачи о взаимодействии пакетов неустойчивой и устойчивых волн. Рассматривая взаимодействие волновых пакетов на основе уравнений (10), можно выделить два характерных режима, зависящих от соотношения между временем развития неустойчивости $1/s$ и временем взаимодействия пакета при данной ширине пространственого спектра. При широком спектре $\Delta K > s/(v_3 - v_1)$, каждая его компонента входит в свой резонансный триплет. За короткое время интервала взаимодействия компоненты спектра меняются слабо. Полная стабилизация происходит только при взаимодействии с последовательностью пакетов. В противоположном случае неустойчивый пакет взаимодействует с устойчивыми модами, как единое целое, и процесс близок к процессу взаимодействия отдельных мод.

Предположим, что длинноволновая компонента имеет фиксированное волновое число k_1. Тогда система уравнений для близких к резонансу пакетов следует из (10):

$$\begin{gathered}
\frac{dA_1}{dt} = -i\int A_3^*(k_3)\,A_2(k_1 - k_3)\,dk_3,\\
\frac{dA_3}{dt} + iv_3k_3A_3 = -i\int A_1^*(k_1)\,A_2(k_3 - k_1)\,dk_1,\\
\frac{dA_2}{dt} + iv_2k_2A_2 = \\
= -iSA_4^* - i\int A_1(k_1)\,A_3(k_2 - k_1)dk_1,\\
\frac{d\,A_4}{dt} - i\nu_2k_2A_4 = iSA_2^*(k_2).
\end{gathered} \quad (32)$$

При постоянном A_1 уравнения (32) описывают эволюцию отдельных компонент волнового спектра. Дисперсионное уравнение для линейной системы имеет вид:

$$\begin{gathered}
\left(P^2 - S^2k + v_2^2k^2 + A_1^2\right)(P - v_2k) + \\
+ ivk\left(P^2 - S^2 + v_2^2k^2\right) = 0,\\
v = v_3 + v_2, \quad k = k_2 - k_{20}.
\end{gathered} \quad (33)$$

Уравнение имеет три корня, зависящие от амплитуды A_1 и других параметров. Если корни мнимые, то все компоненты устойчивы и движутся относительно друг друга. Параметрическое изменение компоненты A_1 меняет взаимное положение корней уравнения, а следовательно форму и фазовую скорость пакетов, но пока не приводит к слиянию двух корней. Точка слияния корней указывает на переход к неустойчивости. При малых $v\,k$ дисперсионное уравнение имеет вид:

$$P^2 - S^2 + v_2^2k^2 + A_1^2 = 0. \quad (34)$$

Из условия слияния корней $S^2 = v_2^2k^2 + A_1^2$ следует выражение для амплитуды $A_1(k)$, которое определяет границу областей устойчивости и неустойчивости. Таким образом, в области волновых чисел пакет разделяется на центральную часть, где развивается неустойчивость и устойчивые крылья, более коротковолновое и более длинноволновое. Максимальное развитие неустойчивой области соответствует минимальной амплитуде компоненты A_1. Устойчивые части пакета меняются по спектру, пространственному положению и амплитуде колебаний.

Вместе с тем, как следует из полной системы (33), длинноволновая компонента также приобретает пространственную модуляцию. Область неустойчивости в свою очередь смещается в сторону минимумов длинноволновой компоненты. В результате возникают структуры большого масштаба, совершающие колебания не только во времени, но и в пространстве. При этом происходит обмен энергией между устойчивыми и неустойчивыми компонентами системы.

5. ВИХРЕВЫЕ СТРУКТУРЫ В ИДЕАЛЬНОЙ И ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Особый тип вихревых течений, реализуемых в лабораторных условиях, представляет собой течения с заданной границей. К таким системам относится “волчок Должанского”, дающий описание колебания жидкости во вращающемся в поле сил тяжести эллипсоиде [30, 24]. Название системы указывает на аналогию с вращающимся в поле сил тяжести твердым телом. При учете диссипации и нагрева автор видит в такой системе “игрушечную” модель атмосферы. Нашей целью является дополнительный анализ этой системы.

При описании трехмерных вихревых структур в идеальной несжимаемой жидкости уравнения приобретают вид [24]:

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} = \left(\mathbf{\Omega}\frac{\partial}{\partial r}\right)\mathbf{V} + [\mathbf{g}\times\boldsymbol{\eta}], \quad \frac{d\boldsymbol{\eta}}{dt} + \nabla(\mathbf{V},\boldsymbol{\eta}) = 0, \qquad (35)$$

где $\mathbf{\Omega}(t)$ – вектор завихренности, $\nabla\rho = \boldsymbol{\eta}(t)$ – градиент плотности, dV/dr – тензор с матрицей производных компонент скорости – V_{ji}. Антисимметричная часть матрицы выражается через завихренность, а симметричная безвихревая часть обеспечивает выполнение условий для нормальной компоненты скорости на границе.

Стратифицированное по плотности течение внутри эллипсоида описывается шестью обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка для компонент векторов завихренности $\mathbf{\Omega}$ и нормированного градиента плотности $\boldsymbol{\eta}$. Три инварианта фактически понижают порядок системы. Матрица производных скорости имеет симметричную компоненту, заданную условием равенства нулю нормальной компоненты скорости на границе. Таким образом:

$$V_{ij} = A_{ij}\Omega_k, \quad A_{ij} = -1/2 + b_k, \quad A_{ji} = 1/2 + b_k, \quad k \neq i, j.$$

Линеаризуя систему при постоянных значениях вертикальных компонент завихрености и градиента плотности, получаем четыре уравнения для горизонтальных компонент этих векторов. Дисперсионное уравнение описывает две ветви – быстрых и медленных колебаний. Это соответствует разделению горизонтальной завихренности на две компоненты по отношению к поверхностям постоянной плотности. Для медленных колебаний справедливы условия квазигеострофического равновесия:

$$\Omega\frac{D}{dr}V + (g\cdot\eta) = 0. \qquad (36)$$

Эти условия являются вариантом условий (2) и выделяют горизонтальную компоненту завихренности, соответствующую более медленным колебаниям. Следующая отсюда линейная система имеет область неустойчивости при отрицательных значениях вертикальной компоненты градиента плотности. К стабилизации неустойчивости ведет учет изменения компонент Ω_3 и η_3. Для перехода к приближению квадратичной нелинейности представляем:

$$\Omega_3 = \Omega_{30} + \Omega_{31}, \quad \eta_3 = \eta_{30} + \eta_{31},$$
$$\theta = \eta_{30} + \eta_{31} - \eta_{30}\frac{\Omega_{31}}{\Omega_{30}}.$$

Для переменных Ω_{31}, η_3 получаем:

$$\begin{gathered}\Omega_{31} = C_1\eta_{31} + C_0, \quad \frac{d\theta}{dt} = C_2\eta_{11}\eta_2,\\ C_1 = \frac{\Omega_{30}(b_2 + b_1)}{\dfrac{A_{31}}{(b_1 + b_3)} + A_{32}(b_2 + b_{13})},\\ C_2 = \frac{g}{\Omega_{30}}\left[\frac{A_{31}}{(b_1 + b_3)} + A_{32}(b_2 + b_{13})\right].\end{gathered} \qquad (37)$$

С учетом квадратичной нелинейности уравнения квазигеострофического приближения для горизонтальных компонент градиента плотности имеют вид:

$$\begin{gathered}\frac{d\eta_1}{dt} = (A_{21} - B_1\theta)\eta_2, \quad \frac{d\eta_2}{dt} = (A_{12} + B_2\theta)\eta_1,\\ B_1 = \frac{g}{\Omega_{30}}\frac{A_{31}}{b_3} + b_2, \quad B_2 = \frac{g}{\Omega_{30}}\frac{A_{32}}{b_3} + b_1,\end{gathered} \qquad (38)$$

Система (37), (38) подобно системе (11) для волнового триплета исключает быстрые колебания, но оказывается более простой по своей структуре, что в (11) соответствует равенству нулю третьего инварианта. Переходя к переменным X, Y, Z

$$B_1^{1/2}X = \eta_1, \quad B_2^{1/2}Y = \eta_2,$$
$$(B_1B_2)^{-1/2}Z = \frac{A_{12}}{B_2} + \theta,$$

получаем уравнения:

$$\begin{gathered}\frac{dX}{dt} = -Y(Z - Z_1), \quad Z_1 = (B_1B_2)^{-1/2}(A_{12} + A_{21}),\\ \frac{dY}{dt} = XZ, \quad \frac{dZ}{dt} = RXY, \quad R = B_1B_2C_2 > 0.\end{gathered} \qquad (39)$$

Линеаризация уравнений триплета при $Z = Z_0$ указывает на существование области неустойчивости при $Z_0(Z_0 - Z_1) < 0$. Для анализа нелинейной системы переходим к переменным: $U = Y + R^{-1/2}Z$, $V = Y - R^{-1/2}Z$. Из уравнений для переменных Y, Z получаем:

$$U = U_0 \exp(S),$$
$$V = V_0 \exp(-S) R^{1/2}, \quad X = \frac{dS}{dt}.$$

Для S получаем уравнение нелинейного осциллятора:

$$\frac{d^2S}{dt^2} + R^{1/2}\left[U_0^2 \exp(2S) - V_0^2 \exp(-2S)\right] - - Z_1\left[U_0 \exp(S) + V_0 \exp(-S)\right] = 0 \quad (40)$$

Это уравнение соответствует уравнению, полученному ранее для периодических колебаний волнового триплета. Следующее из (40) выражение для энергии колебаний позволяет построить фазовый портрет системы, совершающей периодические колебания. Фазовые траектории при достаточно больших Z_1 включают области развития и стабилизации неустойчивости. Траектории разных типов разделены на фазовой плоскости сепаратрисой, положение которой зависит от параметров U_0, V_0, которые в квазигеострофическом приближении являются инвариантами. Эта инвариантность нарушается при учете быстрых, агеострофических колебаний исходной системы с частотой Ω_{30}. Под воздействием агеострофической компоненты возникают быстрые колебания квазиинвариантов U_0, V_0, вклады от которых суммируются в течение периода квазигеострофических колебаний. Это приводит к смещению фазовых кривых основной системы, которые включают изменение симметрии движения и переходу через сепаратрису. Рост амплитуды и изменение относительной фазы быстрых и медленных колебаний делает их повеление хаотическим. Результатом оказывается случайное блуждание траекторий квазигеострофических колебаний на фазовой плоскости. Сначала в сепаратрисном слое, а затем во всей области движения. Таким образом, полная картина динамики системы складывается из трех компонент – основные квазигеострофические колебания, быстрые изменения траекторий за счет агеострофической компоненты, медленные блуждания системы за счет суммирования быстрых колебаний. Медленное изменение переменных Ω_3, η_3 оказывается значимым для возникновения крупномасштабных структур в атмосфере.

Такое поведение системы вполне соответствует сценарию, описанному в предшествующем параграфе. Подобные особенности поведения триплета, образующегося при стабилизации неустойчивости, возникающей в линейной системе, наблюдаются и в других физических ситуациях. Сходные структуры образуются и в течениях вязкой жидкости.

Диссипативные структуры образуются в течениях жидкости с большими градиентами плотности и скорости. Особенно важную роль играют структуры, образующиеся в пограничном слое около твердой стенки. Согласно современным воззрениям именно структуры среднего масштаба служат посредниками между крупномасштабным течением и мелкомасштабной турбулентностью. В нелинейной акустике такие структуры образуются при формировании фронтов ударных волн, что сопровождается частично неупругими соударениями соседних участков течения [31]. В других простейших течениях вязкой жидкости трехмодовые взаимодействия также создают периодические и стохастические структуры.

Для учета диссипации в разных ситуациях используется введение линейного трения [9]. Приближение линейного трения понижает порядок системы уравнений, исключая описывающий диссипацию член со второй производной. Такой подход был использован для описания модифицированного волчка Должанского, представляющего в данном случае игрушечную модель атмосферы [24]. Описание этой системы следует из уравнений квазигеострофического приближения с учетом сторонней температурной накачки и линейного трения и имеет вид:

$$\frac{dX}{dt} = -YZ - X + D, \quad \frac{dY}{dt} = XZ - Y, \quad \frac{dZ}{dt} = RXY - Z. \quad (41)$$

Переменная X описывает движение по горизонтали (широте), а Y, Z – движение в вертикальной (меридиональной) плоскости. Как указано в [24], система имеет два стационарных состояния – режимы Хедли и режим Россби:

$$X = D, \quad Y = Z = 0 \quad (\text{Хедли})$$
$$X = D_0 = \left(\frac{C}{R}\right)^{1/2}, \quad (42)$$
$$Y = Z = \pm D_0\left(|D| - D_0\right)^{1/2} \quad (\text{Россби}).$$

В окрестности режима Хедли в линеаризованной системе для переменных Y, Z при $RX^2 > 1$ развивается неустойчивость. Это ведет к убыванию компоненты X и переходу в окрестность одного из режимов Россби. Эти режимы имеют характер пограничных слоев, где система колеблется в плоскости X, Y при медленно меняющемся Z. Система представляет собой триплет, который совершает периодические колебания с обменом энергией между компонентами.

В системе (41), как и при анализе системы (38), перейдем к переменным:

$$U = Z + R^{1/2}Y, \quad V = Z - R^{1/2}Y$$

после чего получаем

$$U = U_0 \exp(S), \quad V = V_0 \exp(-S),$$

где $R^{1/2}X + 1 = \dfrac{dS}{dt}$.

Уравнение для переменной S, аналогичное (40), имеет вид:

$$\frac{d^2S}{dt^2}+\left(\frac{dS}{dt}-1\right)+ \\ + R^{1/2}\left[U_0^2\exp(2S)-V_0^2\exp(-2S)\right]-D=0. \quad (43)$$

Это уравнение нелинейного осциллятора с затуханием и накачкой. Оно описывает колебания между двумя указанными выше режимами. При малой амплитуде начального возмущения колебания затухают и система переходит в стационарный режим. При большой амплитуде решение содержит растущую компоненту и система колеблется между режимами.

Ситуация усложняется при учете β-эффекта, т.е. асимметрии системы относительно вертикального направления, что приводит уравнения к виду:

$$\frac{dX}{dt}=-YZ-X-D,\ \frac{dY}{dt}=XZ-Y, \\ \frac{dZ}{dt}=RXY-\beta Y-CZ. \quad (44)$$

При $R=0$ система эквивалентна известной системе Лоренца, по-новому интерпретированной в работе [5]. В этой системе трех уравнений нарушается симметрия колебаний по переменной Y, что становится причиной ее стохастизации. При $\beta=0$, $C=1$ система обладает двумя инвариантами U_0,V_0, которые теперь становятся квазиинвариантами. Асимметрия колебаний приводит к изменению этих величин, что особенно сказывается при переходе системы через сепаратрису, разделяющую колебания разных типов. Изменения квазиинвариантов описываются уравнениями:

$$\frac{dU_0}{dt}=-\beta(U_0+V_0\exp(-2S))- \\ -R(C-1)(U_0-V_0\exp(-2S)), \\ \frac{dV_0}{dt}=\beta(U_0\exp(2S)+V_0)+ \\ +R(C-1)(U_0\exp(2S)+V_0). \quad (45)$$

Эти уравнения, как и в ранее рассмотренных ситуациях, описывают взаимодействие двух типов колебаний, приводящих к образованию структур, переходящих в стохастический режим. Аналогичным образом может быть проанализирована и система Лоренца $(R=0)$. Обе системы совершают колебания между двумя режимами. Эти колебания носят квазислучайный характер и приводят к блужданиям системы по фазовым траекториям основного колебания и переходу в режим хаоса. Однако, хаотические колебания на фазовой плоскости происходят между медленно смещающимися центральными точками. Из изложенного видно значительное сходство между структурами в идеальной жидкости. В одном случае хаотизация течения происходит в результате обмена энергией с агеострофической компонентой, а в другом этот процесс учтен введением $\beta=0$-эффекта.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из проведенного анализа следует, что структуры, возникающие при стабилизации неустойчивости в слабо нелинейных течениях со сдвигом скорости могут существовать в разных колебательных режимах. Структуры возникают за счет передачи энергии от неустойчивой моды компонентам фона. Вместе с тем компоненты, принадлежащие фону, образуют другую колебательную систему. Возникающую структуру можно трактовать как нелинейный осциллятор с параметрами, зависящими от другой колебательной системы. Задача упрощается, если компоненты триплета меняются только по амплитуде. Изменение по фазе и возникающая временная асимметрия приводят к нарушению периодичности в поведении траекторий системы. Наличие двух типов колебаний с разными временными масштабами обеспечивает разнообразие режимов, как когерентных, так и стохастических. При переходе к хаосу структура все же сохраняет основные черты своего положения в фазовом пространстве.

Структуры со сходным поведением образуются как в результате взаимодействия завихренности и градиента плотности внутри области с твердой границы, так и при эволюции границы области с однородным течением. Таковы волновые резонансные структуры, исследованию которых были посвящены работы Н.Н. Романовой, и вихревые структуры, аналогичные вращающемуся твердому телу (волчку), описанные в работах Ф.В. Должанского. Несмотря на некоторые различия, оба процесса, как показано выше, сходны между собой. Это сходство сохраняется и при переходе к простейшим течениям вязкой жидкости при учете трения и накачки.

Во всех рассмотренных ситуациях к разнообразию режимов приводит взаимодействие движений с разными временными масштабами. Основные колебания сочетаются с более быстрыми и более медленными движениями. Рост амплитуды взаимодействующих компонент ведет к появлению в фазовом пространстве дополнительных областей с локальной неустойчивостью, результатом чего является внутренний по отношению ко всей структуре хаос. Вместе с тем взаимодействие между случайно расположенными структурами создает более медленный внешний хаос. Тем самым структуры представляют собой среднее звено между мелкомасштабным хаосом, ведущим к турбулентности и случайными крупномасштабными движениями.

В настоящей статье отмечено определенное сходство структур в идеальной и вязкой жидкостях. Модели подобных систем сводятся к трем уравнениями первого порядка без дополнительных инвариантов, хотя и с квазиинвариантами. Описание поведения структур здесь должно основываться исходно на выделении основных процессов, происходящих на разных масштабах, а уже потом переходить к исследованию их взаимного влияния.

Автор рад выразить свою благодарность Н.Н. Романовой и О.Г. Чхетиани за интерес к работе и конструктивные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Drazin P.G.* Introduction to Hydrodynamic Stability // Cambridge, England: Cambridge Univ. Press, 2002. P. 261.
2. *Vallis G.K.* Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-Scale Circulation // Cambridge University Press. 2017. P. 174.
3. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику // М. Наука. 1988. С. 368.
4. *Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М.* Системы гидродинамического типа и их применение// М.: Наука, 1987. С. 366.
5. *Jimenez J.* Coherent structures in wall-bounded turbulence // J. Fluid Mech. 2018. V. 842. P. 1–100.
6. *Drazin P.G., Reid W.H.* Hydrodynamic Stability 2nd edn. // Cambridge University Press. 2004. P. 605.
7. *Blackwelder R.F.* Coherent structures associated with turbulent transport // Proc. 2nd Int. Sump. On Transport Phenomena in Turbulent Flows. Tokyo. 1987. P. 1–20.
8. *Fantini M.* Instability of finite-amplitude lower-neutral Eady waves // Q. J. R. Meteorol. Soc. 2006. V. 132. P. 2157–2169.
9. *Рабинович М. И., Фабрикант А.Л.* Нелинейные волны в неоднородной среде // Известия ВУЗов. Радиофизика. 1976. Т. 19(5–6). С. 721–724.
10. *Рабинович М. И., Фабрикант А. Л., Цимринг Л.Ш.* Конечномерный пространственный беспорядок // УФН. 1992. Т. 162. Вып. 8. С.1–42.
11. *Должанский Ф.В., Крымов В.А., Манин Д.Ю.* Устойчивость и вихревые структуры в квазидвумерных сдвиговых течениях // УФН. 1990. Т. 160. Вып. 7. С. 1–47. 1990.
12. *Loesch A.Z.* Resonant interactions between unstable and neutral baroclinic waves: Part I // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1974. V. 31. P. 1177–1201.
13. *Pedlosky J.* The amplitude of baroclinic wave triads and mesoscale motion in the ocean // J. Phys. Oceanography. 1975. V. 5. P. 608–614.
14. *Caulrnd C.P.* Multiple linear instability of layered stratified shear flow // J. Fluid Mech. 1994. V. 258. P. 255–285.
15. *Carpenter R., Tetford E.W., Heretz E., Lawrence G.A.* Instability in stratified shear flow: review of a physical interpretation based on interacting waves // Appl. Mech. Rev. 2013. V. 64(6). 060801.
16. *Сазонов И.А., Якушкин И.Г.* Об эволюции возмущений в трехслойной модели атмосферы со сдвиговой неустойчивостью // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1999. Т. 35. № 4. С. 372–380.
17. *Guha A.A., Lawawrences G.A* A wave interaction approach to studying non-modal homogeneous and stratified shear instabilities // J. Fluid Mech. 2014. V. 755. P. 336–364.
18. *Heifetz E., Mak J., Nycander J., Umurhan O.M.* Interacting vorticity waves as an instability mechanism for magnetohydrodynamic shear instabilities // J. Fluid Mech. 2015. V. 767. P. 199–225.
19. *Romanova N.N., Annenkov S.Y.* Three-wave resonant interactions in unstable media // J. Fluid Mech. 2005. V. 539. P. 57–91.
20. *Kostrykin S.V., Romanova N.N., Yakushkin I.G.* On stochastic stabilization of the Kelvin-Helmholtz instability by three-wave resonant interaction // Chaos. 2011. Dec. V. 21(4). 043117. https://doi.org/10.1063/1.3656800
21. *Романова Н.Н., Чхетиани О.Г., Якушкин И.Г.* Влияние нелинейных взаимодействий на развитие неустойчивости в волновых гидродинамических системах // ЖЭТФ. 2016. Т. 149. № 5. С. 1043–1056.
22. *Romanova N.N.* Hamiltonian approach to the derivation of evolution equations for wave trains in weakly unstable media // Nonlinear Proc. Geophys. 1998. V. 5. P. 241–253.
23. *Романова Н.Н., Якушкин И.Г.* Гамильтоново описание движений в идеальной расслоенной жидкости // ДАН. 2001. Т. 380. № 5. С. 630–634.
24. *Должанский Ф.В.* О механических прообразах фундаментальных гидродинамических инвариантов и медленных многообразий // УФН. 1995. Т. 175. Вып. 12. С. 1258–1288.
25. *Должанский Ф.В.* Основы геофизической гидродинамики. М.: Физматлит, 2011. С. 264.
26. *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984. С. 272.
27. *Заславский Г.М* Физика хаоса в гамильтоновых системах. Москва–Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2004. С. 294.
28. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2000. С. 560.
29. *Van Groesen E.* Deformation of coherent structures // Rep. Prog. Phys. 1996. V. 59. P. 511–600. Printed in the UK. 1996.
30. *Должанский Ф.В., Пономарев В.М.* Простейшие медленные многообразия баротропных и бароклинных движений вращающейся жидкости // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2002. Т. 38. С. 316–325.
31. *Гурбатов С.Н., Саичев А.И., Якушкин И.Г.* Нелинейные волны и одномерная турбулентность в средах без дисперсии // УФН. 1984. Т. 141. Вып. 2. С. 221–253.

On Coherent and Stochastic Structures in Hydrodynamic Flows with a Velocity Shift

I. G. Yakushkin*, **

Oboukhov Institute of Atmospheric Physics, Russian Academy of Sciences, Pyzhevskii per., 3, Moscow, 119017 Russia

**e-mail: lgg@ifaran.ru*

***e-mail: aakhapaev@gmail.com*

The article describes various structures formed during the stabilization of instability in wave and vortex flows of an ideal liquid. The problem of wave structures in an incompressible fluid flow stratified by density and velocity is considered in detail. Instability stabilization occurs as a result of the interaction of an unstable wave with waves forming a resonant triplet with it. In this case, structures of a regular and stochastic nature arise. The paper analyzes and describes the scenario of the transition of the system to the stochastic mode. The formulation corresponds to atmospheric currents under wind shear, but the results obtained can be used in other problems of the theory of nonlinear waves and vortices. The article shows that structures of a similar nature also arise in vortex flows, both ideal and viscous liquids.

Keywords: coherent and stochastic structures, shear flows, instability of flows