

УДК 532.5: 551.51: 551.55

## СТРАТИФИЦИРОВАННЫЕ ТЕЧЕНИЯ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОБМЕНА

© 2022 г. Л. Х. Ингель<sup>a, b, \*</sup>

<sup>a</sup>ФГБУ “НПО “Тайфун”, ул. Победы, 4, г. Обнинск, 249038 Россия

<sup>b</sup>Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, Пыжевский пер., 3, Москва, 119017 Россия

\*e-mail: lev.ingel@gmail.com

Поступила в редакцию 23.03.2021 г.

После доработки 12.06.2021 г.

Принята к публикации 11.08.2021 г.

Обращается внимание на неисследованный механизм генерации плотностных течений в стратифицированных средах. Горизонтальные неоднородности коэффициентов обмена в стратифицированной среде приводят к неоднородностям вертикального диффузионного потока плавучести и ее горизонтального распределения, следовательно, к возникновению горизонтальных неоднородностей гидростатического давления и генерации течений. В качестве примера рассмотрено возникновение упорядоченных течений в стратифицированной по температуре (плотности) турбулентной среде в поле силы тяжести у наклонной поверхности. Это связано с существованием вблизи твердой поверхности области ослабленного турбулентного обмена. У наклонной поверхности при этом возникают горизонтальные составляющие градиентов температуры, плотности и, следовательно, давления. Это, в свою очередь, приводит к возникновению среднего (нетурбулентного) склонового течения даже при отсутствии источников/стоков тепла и количества движения.

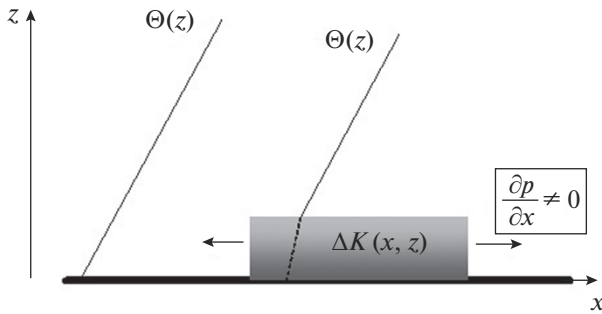
**Ключевые слова:** стратифицированные среды, плотностные течения, неоднородности коэффициентов обмена, склоновые течения, турбулентный обмен, атмосферные течения, отсутствие статических состояний

**DOI:** 10.31857/S0002351522010047

### ВВЕДЕНИЕ

Стратифицированные по плотности геофизические среды, прежде всего, атмосфера, представляют собой неравновесные системы, которые могут находиться в состоянии покоя только когда градиенты плотности параллельны (антипараллельны) направлению силы тяжести. Статическое состояние невозможно, например, при горизонтально-неоднородном нагреве (охлаждении), с чем связаны многие классы течений в таких средах. В настоящей заметке обращается внимание на то, что горизонтальные плотностные неоднородности в стратифицированной среде могут возникать и без неоднородных источников (стоков) плавучести. Они могут быть обусловлены горизонтальными неоднородностями эффективных коэффициентов переноса. Сильная вертикальная изменчивость интенсивности турбулентного обмена в атмосфере общеизвестна и не требует комментариев, но для рассматриваемых ниже эффектов существенны, прежде всего, горизонтальные вариации коэффициентов переноса.

Можно указать ряд факторов, вследствие которых эффективные коэффициенты турбулентного обмена могут заметно меняться по горизонтали. Простейший пример – случай наклонной подстилающей поверхности, когда турбулентный обмен существенно зависит от нормальной к поверхности координаты, т.е. меняется не только в вертикальном, но и в горизонтальном направлении. Неоднородная по горизонтали турбулентность может быть также связана, например, со струйными течениями, проявлениями внутренних гравитационных волн, с высокой неоднородной растительностью или застройкой [1], с интенсивным движением на автостраде. Еще один пример относится к искусственному перемешиванию приземного слоя воздуха (динамические методы борьбы с заморозками – искусственное перемешивание воздуха на защищаемых территориях с помощью мощных вентиляторов или вертолетов). В последнее время активно изучается модификация пограничного слоя атмосферы большими массивами ветроэнергетических установок [2].



**Рис. 1.** Схема возникновения течений при горизонтальной неоднородности коэффициента теплопроводности. Горизонтальные стрелки – возможные направления сил градиента давления, возникающих вследствие появления термических неоднородностей.

Физический механизм течений, о которых идет речь, пояснен на рис. 1, где затушевана область, в которой коэффициенты обмена отличаются от “фона”. Неоднородности этих коэффициентов в стратифицированной среде, очевидно, приводят к возникновению горизонтальных неоднородностей в распределениях плавучести, давления и, следовательно, к возникновению горизонтальных течений.

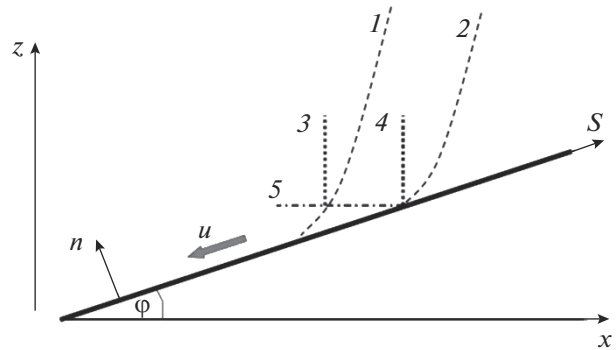
**2. Склоновые течения, обусловленные неоднородностью коэффициентов обмена.** В качестве простейшего примера рассмотрим стратифицированную среду, ограниченную снизу твердой наклонной поверхностью. Если поверхность, например, холоднее среды, то охлажденный у поверхности более плотный слой среды стекает по склону под собственной тяжестью. Подобные склоновые течения весьма распространены в атмосфере и интенсивно изучаются (см., например, [3–10] и библиографию в этих источниках). Геометрия задачи схематически изображена на рис. 2, где пунктирные линии изображают вертикальные профили потенциальной температуры  $\Theta$ , возрастание которой с высотой  $z$  соответствует устойчивой стратификации среды. Потенциальная температура, с точностью до постоянного отсчетного значения, может быть представлена в виде

$$\Theta = \gamma z + \theta(n). \quad (1)$$

Здесь  $n$  – координата, нормальная к наклонной границе,  $\gamma > 0$  – фоновый вертикальный градиент потенциальной температуры (предполагается постоянным),  $\theta$  – отклонение температуры от фона, вызванное влиянием нижней границы.

В сороковые годы была предложена одномерная стационарная модель Прандтля [3–5, 9], которая, будучи весьма прозрачной, и в настоящее время нередко рассматривается как базовая при описании геофизических склоновых течений:

$$0 = K \frac{d^2 u}{dn^2} + \alpha g \theta \sin \varphi, \quad \gamma u \sin \varphi = K \frac{d^2 \theta}{dn^2}. \quad (2)$$



**Рис. 2.** Схема возникновения течения (обозначено стрелкой) у наклонной поверхности. Вблизи этой поверхности турбулентный обмен ослаблен, поэтому возникают горизонтальные неоднородности температуры и давления. Различие гидростатического давления на вертикалях 3 и 4 пояснено в тексте. В отличие от классической модели Прандтля, течение может возникать при отсутствии источников/стоков на нижней границе – вследствие лишь пространственной неоднородности  $K(n)$ .

Здесь  $u$  – искомая скорость склонового течения,  $\varphi$  – угол склона к горизонту;  $\alpha$  – термический коэффициент расширения среды,  $g$  – ускорение свободного падения. Коэффициент турбулентного обмена  $K$  для простоты предполагаем одинаковым для всех субстанций (обобщение на случай различия значений коэффициентов вязкости и температуропроводности не представляет трудности). Используется приближение Буссинеска.

На наклонной границе  $n = 0$ , задается отклонение потенциальной температуры  $\theta_0$  (отрицательное, если склон охлаждается) и условие прилипания:

$$\theta = \theta_0, \quad u = 0 \quad \text{при} \quad n = 0. \quad (3)$$

Вдали от поверхности ( $n \rightarrow \infty$ ) предполагается затухание возмущений. Система уравнений (2) однородна, и в случае однородности краевых условий ( $\theta_0 = 0$ ) задача, очевидно, имеет нулевое статическое решение.

Модель Прандтля предполагает постоянство коэффициентов обмена. Но эффективные коэффициенты турбулентного обмена в атмосфере существенно зависят от нормальной к поверхности координаты  $n$  (обычно уменьшаются при  $n \rightarrow 0$ ). Поэтому многие работы претендуют на соответствующие обобщения этой модели (см., например, [4–7, 9]). Обычно рассматривают обобщенную систему уравнений

$$0 = \frac{d}{dn} \left( K(n) \frac{du}{dn} \right) + \alpha g \theta \sin \varphi, \quad \gamma u \sin \varphi = \frac{d}{dn} \left( K(n) \frac{d\theta}{dn} \right). \quad (4)$$

Эта система с переменными коэффициентами значительно сложнее для анализа, чем (2). В литературе имеется большой опыт численных и приближенных аналитических решений системы (4) (библиографию можно найти, например, в [5, 9]).

Система (4) однородна, как и (2), и также имеет нулевое статическое решение. Термин “статическое решение” в данном контексте подразумевает отсутствие регулярных течений в плоскости  $(x, z)$ . Но при этом возможно фоновое горизонтальное течение вдоль другой горизонтальной оси  $y$  (в направлении, поперечном склону). Более того, наличие такого фонового течения необходимо для корректной постановки физической задачи, так как обмен предполагается турбулентным, а при полном отсутствии регулярных течений источник турбулентности отсутствует.

Но возможность упомянутого статического решения противоречит простым физическим соображениям, приведенным ниже.

В статическом состоянии из непрерывности диффузионного потока тепла следует постоянство (независимость от высоты) произведения коэффициента обмена и градиента потенциальной температуры. При  $n \rightarrow 0$  коэффициент обмена убывает, следовательно, вертикальный градиент в статическом состоянии должен увеличиваться. Это схематически показано на рис. 2.

Если сравнить вес столбов среды на вертикалях 3 и 4, то на одной и той же горизонтальной поверхности 5 этот вес будет различаться: вертикаль 4 включает более холодный (более плотный) участок около наклонной границы. Таким образом, гидростатическое давление на упомянутой горизонтали 5 не будет однородным – в рассматриваемом случае оно уменьшается влево от вертикали 4. Уже из этих качественных соображений видно, что зависимость  $K$  и вертикального градиента потенциальной температуры от  $n$  приводит к наличию в среде горизонтального градиента температуры и давления и, следовательно, к наличию горизонтальной составляющей силы градиента давления и возникновению склонового течения. Иными словами, статического решения в стратифицированной среде над наклонной поверхностью не существует, так как вес столбов по вертикалях 3 и 4 всегда будет разным; этот факт не зависит от заданной температуры наклонной поверхности. Таким образом, в обычно рассматриваемой системе уравнений (4) теряется фундаментальный факт отсутствия статического решения.

Ошибка в использовании системы (4), насколько мы понимаем, заключается в следующем. В действительности, во второе уравнение (4) должна входить потенциальная температура  $\Theta = \gamma z + \theta(n)$ , а не только ее отклонение  $\theta(n)$ . Долгое время на это не обращалось внимания,

поскольку при  $K = \text{const}$  указанная ошибка не сказывается на результате, так что модель Прандтля дает правильный результат. Отметим, что в [6] первоначально было рассмотрено правильное уравнение с правой частью

$$\frac{d}{dn} \left[ K(n) \left( \gamma \cos \varphi + \frac{d\theta}{dn} \right) \right]. \quad (5)$$

Но затем автор высказал мнение, что слагаемое  $\gamma \cos \varphi$  в круглых скобках относительно мало и пренебрег им. Во многих последующих работах это слагаемое не рассматривается без каких-либо комментариев.

Связанная с этим количественная ошибка во многих случаях действительно бывает относительно небольшой, поскольку в приземном слое обычно  $\gamma \ll d\theta/dz$ . Но при малых отклонениях температуры поверхности возникает не только заметная количественная, но и качественная ошибка: теряется факт отсутствия статического состояния. При  $K = K(n)$  второе уравнение (4) после исправления, о котором идет речь, становится неоднородным:

$$-\gamma \sin \varphi + K(n) \frac{d^2 \theta}{dn^2} + \frac{dK(n)}{dn} \frac{d\theta}{dn} = -\gamma \frac{dK(n)}{dn} \cos \varphi. \quad (6)$$

Поэтому статическое решение  $\theta = 0$ ,  $u = 0$  становится невозможным, и снимается противоречие с приведенными выше физическими соображениями.

В правой части (6) появился неучтенный ранее эффективный источник/сток тепла. Оценим его интенсивность. Полное эффективное “тепловыделение” на единицу площади наклонной поверхности между уровнями  $n_1$  и  $n_2$  ( $n_2 > n_1$ ), очевидно,

$$c_p \bar{\rho} \gamma [K(n_2) - K(n_1)] \cos \varphi, \quad (7)$$

где  $c_p$  – теплоемкость,  $\bar{\rho}$  – средняя плотность среды соответственно. Если  $c_p = 10^3$  Дж/(кгК),  $\bar{\rho} = 1$  кг/м<sup>3</sup>,  $\gamma = 3 \times 10^{-3}$  К/м,  $K(n_2) - K(n_1) = 5$  м<sup>2</sup>/с,  $\cos \varphi \approx 1$ , то выражение (7) дает эффективный источник тепла около 15 Вт/м<sup>2</sup>. Такой источник может вносить заметный вклад в баланс тепла при относительно слабых кататических ветрах [10].

**3. Пример численного решения.** В качестве конкретного примера рассмотрим решение для модельного профиля турбулентного обмена, рассмотренного в книге [4] (стр. 268–269) – “соотношение Дородницына”:

$$K(n) = K_0 + (K_1 - K_0) \left[ 1 - \exp \left( -\frac{n}{h_*} \right) \right]. \quad (8)$$

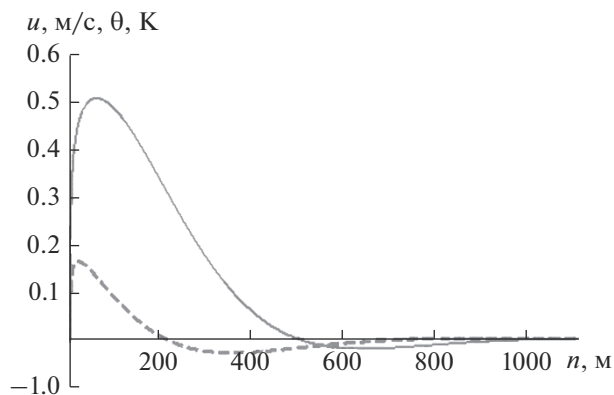


Рис. 3. Профили отклонения потенциальной температуры (штриховая линия) и скорости (сплошная линия) для рассмотренного численного примера.

Примем значения параметров, близкие к [4]:  $\varphi = 3 \times 10^{-2}$ ,  $\gamma = 3 \times 10^{-3}$  К/м,  $K_1 = 5$  м<sup>2</sup>/с,  $K_0 = 10^{-2}$  м<sup>2</sup>/с,  $\alpha = 3.4 \times 10^{-3}$  К<sup>-1</sup>,  $h_* = 50$  м. Соотношение (8) описывает монотонное возрастание коэффициента турбулентного обмена от малого значения  $K_0$  вблизи нижней границы до характерного для пограничного слоя атмосферы значения  $K_1$  на вертикальных масштабах порядка толщины приземного слоя  $h_*$ . На наклонной нижней границе предполагаем однородные краевые условия:  $\theta = 0$ ,  $u = 0$ . На рис. 3 представлены результаты численного решения системы, состоящей из первого уравнения (4) и уравнения (6). Обычно рассматриваемая система (4) приводит в этом случае к тождественно нулевому решению (не согласующемуся с приведенными выше физическими соображениями); при настоящей уточненной постановке задачи возникает течение, хотя и довольно слабое. Отметим, что при уменьшении угла наклона  $\varphi$  течение может существенно усиливаться и возрастает толщина охваченного им слоя, но при этом возрастает и время выхода на стационарный режим.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе обращается внимание на то, что течения в стратифицированной среде могут возникать в отсутствие источников плавучести и количества движения – вследствие перераспределения диффундирующего через среду тепла из-за пространственной неоднородности коэффициентов переноса. Например, наличие области пониженной интенсивности турбулентного обмена вблизи твердой поверхности (и, следовательно, области пониженной теплопроводности) может приводить к накоплению тепла, приходящего за счет диффузии или (в зависимости от краевых

условий), наоборот, к замедлению диффузионного “прогрева”. Если упомянутая область горизонтально-неоднородна, то указанные термические эффекты приводят к появлению горизонтальных градиентов давления и возникновению плотностных течений. Это означает, в частности, возникновение упорядоченного течения в турбулентной стратифицированной среде у наклонной поверхности.

Горизонтальная неоднородность коэффициентов переноса приводит к отсутствию статических состояний в стратифицированной среде над наклонной поверхностью – склоновое течение возникает при любых краевых условиях на этой поверхности. В литературе по склоновым течениям эта качественная особенность задачи долгое время оставалась незамеченной, тем более, что количественные поправки к расчетным течениям во многих случаях относительно малы.

Турбулентные склоновые течения – лишь простейший пример течений, обусловленных горизонтальными вариациями эффективных коэффициентов турбулентного обмена. Пусть, например, происходит интенсивное перемешивание устойчиво стратифицированного приземного слоя в некоторой области над горизонтальной подстилающей поверхностью (некоторые относящиеся сюда ситуации упомянуты во Введении). Отклонения температуры  $\Delta T$ , возникающие при таком перемешивании, могут быть порядка  $\gamma h$ , где  $h$  – толщина перемешанного слоя; амплитуда отклонений гидростатического давления порядка  $\alpha \bar{\rho} g \Delta T h$ . Приравняв горизонтальную силу градиента давления турбулентной вязкости  $\sim Ku/h^2$ , получаем оценку скорости горизонтального течения возникающего из-за пространственной неоднородности коэффициентов обмена:  $u \sim \alpha g \gamma h^4 / KL$ , где  $L$  – горизонтальный масштаб перемешанной области. Если, например,  $K = 10$  м<sup>2</sup>/с,  $h = 20$  м,  $L = 50$  м,  $\gamma = 0.1$  К/м, то  $u \sim 1$  м/с. Вероятно, эта ориентировочная оценка завышена, поскольку возникающие течения приводят к уменьшению градиентов температуры и давления. Но представляется, что полезно иметь в виду возможность и даже неизбежность возникновения течений такой неисследованной ранее природы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Климат Москвы в условиях глобального потепления. Под ред. А.В. Кислова. М.: Изд. МГУ, 2017. 288 с.
2. *Emeis S.* Wind Energy Meteorology. Atmospheric Physics for Wind Power Generation Wind Energy. Berlin: Springer, 2018. 255 p.
3. *Прандтль Л.* Гидроаэромеханика. НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”: Москва-Ижевск, 2000. 573 с.

4. Гутман Л.Н. Введение в нелинейную теорию мезо-метеорологических процессов. Ленинград: Гидрометеоздат, 1969. 295 с.
5. *Mountain Weather Research and Forecasting. Recent Progress and Current Challenges*, Springer Atmospheric Sciences, F.K. Chow, S.F.J. DeWekker, B. Snyder (eds.). Berlin: Springer, 2013, 750 p.
6. Gutman L.N. On the theory of the katabatic slope wind // *Tellus*. 1983. V. 35A. P. 213–218.
7. Grisogono B., Oerlemans J. Katabatic flow: Analytic solution for gradually varying eddy diffusivities // *J. Atmos. Sci.* 2001. V. 58. № 21. P. 3349–3354.
8. Ингель Л.Х. К нелинейной теории кататических ветров // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*. 2011. № 4. С. 3–12.
9. Giometto M.G., Grandi R., Fang J., Monkewitz P.A., Parlange M.B. Katabatic flow: A closed-form solution with spatially-varying eddy diffusivities // *Boundary-Layer Meteorol.* 2017. V. 162. P. 307–317.
10. Oerlemans J., Grisogono B. Glacier winds and parameterisation of the related surface heat fluxes // *Tellus A*. 2002. V. 54A. P. 440–452.

## Stratified Flows Due to Spatial Inhomogeneities of Exchange Coefficients

L. Kh. Ingel<sup>1, 2, \*</sup>

<sup>1</sup> *Research and Production Association “Typhoon”, ul. Pobedy 4, Obninsk, 249038 Russia*

<sup>2</sup> *Obukhov Institute of Atmospheric Physics, Russian Academy of Sciences, Pyzhevskii per. 3, Moscow, 119017 Russia*

\*e-mail: lev.ingel@gmail.com,

Attention is drawn to the unexplored mechanism of generation of density currents in stratified media. Horizontal inhomogeneities of the exchange coefficients in a stratified medium lead to inhomogeneities of the vertical diffusion flow of buoyancy and its horizontal distribution. Consequently – to the emergence of horizontal inhomogeneities of hydrostatic pressure and the generation of currents. The appearance of ordered flows in a temperature (density) stratified turbulent medium in a gravity field near an inclined surface is considered as an example. This is due to the existence of a region of weakened turbulent exchange near the solid surface. In this case, horizontal components of the temperature, density and, consequently, pressure gradients appear near the inclined surface. This, in turn, leads to the emergence of an average (non-turbulent) slope current even in the absence of heat and momentum sources/sinks.

**Keywords:** stratified media, density currents, inhomogeneities of exchange coefficients, slope currents, turbulent exchange, atmospheric currents, absence of static states