

УДК 532.59:551.466

## БЕЗОТРАЖАТЕЛЬНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В КАНАЛЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕЧЕНИЯ

© 2022 г. С. М. Чурилов\*

Институт солнечно–земной физики СО РАН, ул. Лермонтова, 126а, Иркутск, 664033 Россия

\*e-mail: churilov@iszf.irk.ru

Поступила в редакцию 16.12.2021 г.

После доработки 10.01.2022 г.

Принята к публикации 09.02.2022 г.

В линейном приближении рассматривается распространение длинных внутренних волн произвольной формы в стационарном течении двухслойной жидкости в канале переменного сечения под крышкой. Найдены и изучены два вида течений, в которых волны распространяются без отражения. Сравнение с аналогичной задачей для каналов без течения, рассматривавшейся ранее, показало, что присутствие течения существенно сужает возможности безотражательного распространения волн. В частности, при наличии течения нет согласованных каналов, в которых волны могут распространяться без отражения на любые расстояния. Ограничение протяженности безотражательных каналов с течением обусловлено, главным образом, тем, что скорость течения изменяется гораздо быстрее, чем скорость распространения волн, и обязательно есть точка, в которой они становятся равными.

**Ключевые слова:** двухслойное течение, канал переменного сечения, внутренние волны, распространение без отражения

**DOI:** 10.31857/S000235152203004X

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Внутренние волны (ВВ) являются непременной составляющей разнообразных процессов в океане и, как правило, играют в них существенную роль (см., например, [1–3]). При определенном сочетании обстоятельств (рельеф дна, характер изменения ширины бухты или пролива и т.д.) оказывается возможным распространение ВВ без отражения и рассеяния на неоднородностях (см., например, [4] и цитированную там литературу). В таких случаях вклад ВВ в динамику процессов заметно возрастает благодаря, в частности, тому, что они могут переносить энергию без потерь на значительные расстояния.

Даже для волн малой амплитуды поиск “безотражательных” конфигураций рельефа — задача довольно трудная, и тут для более глубокого понимания физики явления крайне полезны достаточно простые модели, допускающие полное аналитическое исследование. На сегодня основной подход к построению таких моделей базируется на приведении уравнения для волн к уравнению с не зависящими от координат коэффициентами [5]. В его рамках рассматривались фактически два класса моделей, в зависимости от того, изучается ли распространение монохроматической волны (или спектрально узкого пакета волн), или зависи-

мость возмущения от времени достаточно произвольна. В первом случае предполагается, что рельеф зависит от одной горизонтальной координаты  $x$ , а частота плавучести и скорость невозмущенного течения (вдоль  $x$ ) — от вертикальной координаты  $z$  (см., например, [6, 7]). Во втором случае приходится ограничиться двухслойной средой в приближении мелкой воды без течения. Рельеф при этом по-прежнему считается зависящим только от  $x$ , а по  $y$  может быть либо однородным (см., например, [8]), либо ограниченным каналом ширины  $W(x)$  (см. [4, 9, 10]).

Цель данной работы — изучить возможность распространения линейных ВВ без отражения в каналах с зависящим от  $x$  течением двухслойной среды. Для этого применяется несколько иной подход, основанный на факторизации уравнения для волн и недавно апробированный на физически очень похожей задаче о безотражательном распространении поверхностных волн на неоднородном течении мелкой воды [11]. Присутствие течения делает задачу гораздо более трудной, и чтобы не усложнять ее чрезмерно, будем предполагать, что течение ограничено сверху горизонтальной твердой крышкой (рис. 1), под которой следует понимать, прежде всего, ледовое покрытие.

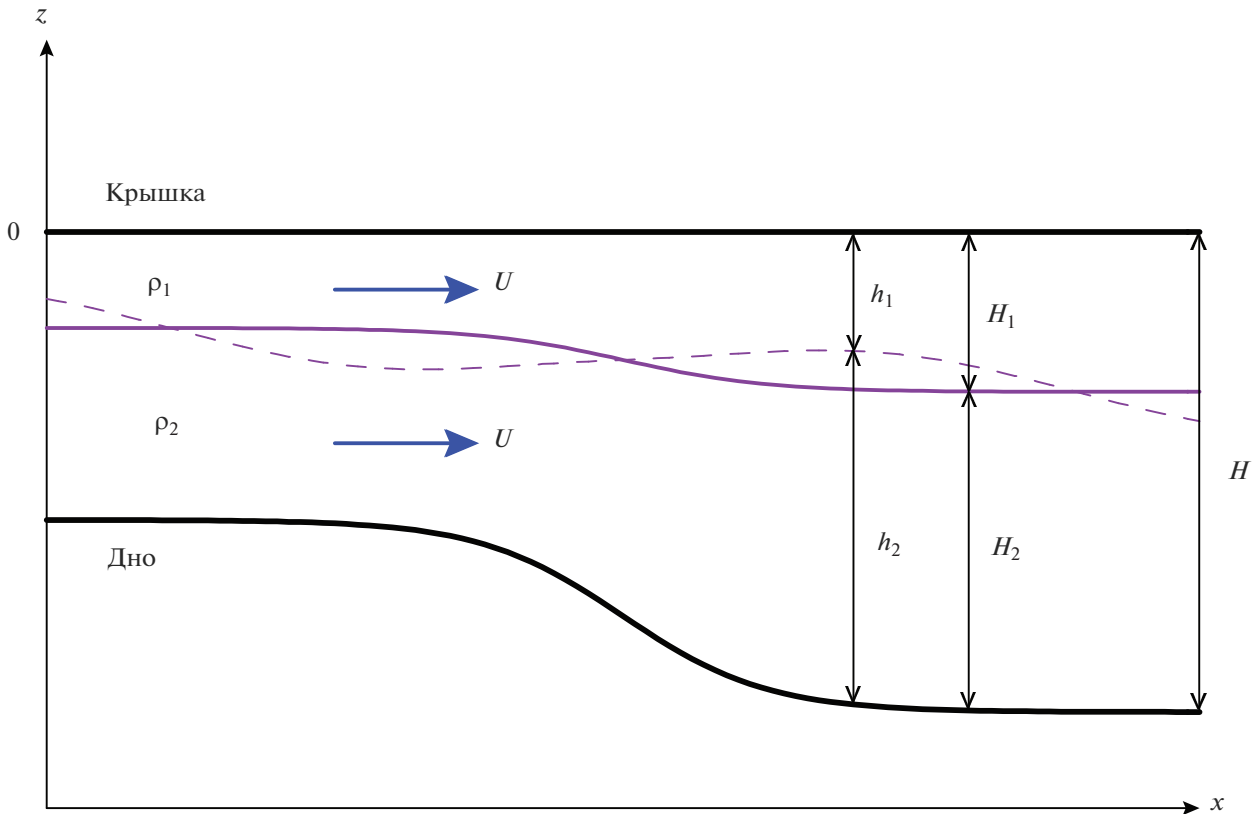


Рис. 1. Схема течения в канале. Пунктиром показана возмущенная граница раздела.

Исследование свойств волновых движений под ледяным покровом занимает в последние десятилетия заметное место в океанологии. Оно охватывает волны различных частотных диапазонов, от поверхностных гравитационных (точнее, изгибно-гравитационных) и внутренних волн (см., например [12]) до волн Россби [13]. Мы будем изучать безотражательное распространение внутренних волн с частотами, значительно превосходящими параметр Кориолиса ( $\omega \gg f_0$ ), в двухслойном течении в приближении мелкой воды.

В § 2 получены основные уравнения, описывающие распространение ВВ, и выведены два альтернативных условия их распространения без отражения. В § 3 найдены решения, соответствующие каждому из этих условий, а обсуждению результатов посвящен § 4.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим распространение длинных внутренних волн малой амплитуды в двухслойной среде в канале под твердой горизонтальной крышкой. Ширина  $W(x)$  и глубина  $H(x)$  канала плавно изменяются вдоль направления течения, а жидкости в слоях идеальны, однородны, несжимаемы и не смешиваются. В приближении мелкой воды систе-

ма уравнений, описывающих течение вдоль оси  $x$ , имеет вид (см., например, [16, 17])

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{1,2}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{V_{1,2}^2}{2} + \frac{P_{1,2}}{\rho_{1,2}} \right) &= 0, \\ \frac{\partial S_{1,2}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (S_{1,2} V_{1,2}) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где индексы 1 и 2 относятся к верхнему и нижнему слою соответственно,  $V_{1,2}(x, t)$  – скорости течения,  $\rho_1 < \rho_2$  – плотности,  $h_{1,2}(x, t)$  и  $S_{1,2}(x, t) = W(x)h_{1,2}(x, t)$  – толщины и площади поперечного сечения слоев (см. рис. 1), причем  $h_1(x, t) + h_2(x, t) = H(x)$ . Давление в слоях определяется гидростатическими соотношениями

$$\begin{aligned} P_1(x, z, t) &= P_0(x, t) - g\rho_1 z, \quad -h_1 \leq z \leq 0, \\ P_2(x, z, t) &= P_0(x, t) + g(\rho_2 - \rho_1)h_1(x, t) - g\rho_2 z, \quad -H \leq z \leq -h_1, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $P_0$  – давление прямо под крышкой (в равновесии – при  $z = -0$ ),  $g$  – ускорение силы тяжести. Относительно невозмущенного течения предполагаем, что оно не имеет сдвига скорости между слоями, т.е.  $V_1 = V_2 = U(x) > 0$ . Глубины слоев,

$h_{1,2} = H_{1,2}(x)$ , связаны со скоростью течения и шириной канала законами сохранения потока

$$\Phi_{1,2} = U(x)W(x)H_{1,2}(x) = \text{const}, \quad (3)$$

так что  $H_1(x)/H_2(x) = \text{const}$ , и можно представить

$$\begin{aligned} H_1(x) &= \eta H(x), \quad H_2(x) = (1 - \eta)H(x), \\ \eta &= \text{const}. \end{aligned} \quad (4)$$

Кроме того, из первой пары уравнений (1) следует аналог уравнения Бернулли

$$\frac{U^2(x)}{2} - gH_1(x) = \text{const}. \quad (5)$$

На динамику волн вызванные ими деформация и движение ледового покрова (моделируемого тонкой однородной упругой пластиной толщины  $d$ ) влияют посредством вклада в возмущение  $p_0(x, t)$  давления на границе вода–лед (см., например, [12–15]),

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{\rho_1 g} &= \eta + D\Delta^2\eta + Q\Delta\eta + M\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}, \\ D &= \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)\rho_1 g}, \quad Q = \frac{Nd}{\rho_1 g}, \\ M &= \frac{\rho_i d}{\rho_1 g}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\eta$  – смещение границы,  $\rho_i \approx 0.9\rho_1$  – плотность льда,  $E \approx 5 \times 10^9$  Дж/м<sup>2</sup> – модуль Юнга,  $\nu \approx 0.3$  – коэффициент Пуассона,  $|N| \approx 10^6$  кг/с<sup>2</sup> – сжимающее ( $N > 0$ ) или растягивающее ( $N < 0$ ) напряжение в ледяной пластине. Полагая, что глубина канала  $H \sim (10\text{--}100)$  м, а перепад плотности  $\Delta\rho/\rho_2 = 1 - \rho_1/\rho_2 \sim 10^{-3}$ , находим, что скорость распространения ВВ порядка 1 м/с и, с учетом принятых приближений ( $\omega \gg f_0$  и  $kH \ll 1$ ), характерное волновое число изучаемых возмущений составляет  $(10^{-3}\text{--}10^{-2})$  м<sup>-1</sup>. Легко видеть, что при таких параметрах все члены в правой части (6), обусловленные ледовым покровом, малы по сравнению с первым и потому не оказывают существенного влияния на свойства ВВ по сравнению со случаем свободной поверхности (см. также [12], § 3).

Налагая возмущения,

$$\begin{aligned} V_{1,2}(x, t) &= U(x) + u_{1,2}(x, t), \quad P_0(x, t) = P_0(x) + p_0(x, t), \\ h_1(x, t) &= H_1(x) - \zeta(x, t), \quad h_2(x, t) = H_2(x) + \zeta(x, t), \end{aligned}$$

и линеаризуя по ним уравнения (1) и (2), получим

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( Uu_1 + \frac{p_0}{\rho_1} \right) = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( Uu_2 + \frac{p_0}{\rho_2} + \frac{\Delta\rho}{\rho_2} g\zeta \right) = 0,$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{W} \frac{\partial}{\partial x} [W(U\zeta - H_1 u_1)] &= 0, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{W} \frac{\partial}{\partial x} [W(U\zeta + H_2 u_2)] &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

откуда, с учетом (4), следует, что  $\eta u_1(x, t) + (1 - \eta)u_2(x, t) = 0$ . Исключив из (7)  $p_0$  и  $u_1$ , приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( Uu_2 + \frac{\Delta\rho}{\rho_*} g\zeta \right) &= 0, \\ \rho_* &= \frac{H_1\rho_2 + H_2\rho_1}{H_1} = \rho_2 + \frac{1 - \eta}{\eta} \rho_1. \end{aligned} \quad (9)$$

Теперь есть два варианта дальнейших действий. С одной стороны, можно ввести потенциал скорости, положив  $u_2(x, t) = \partial\varphi(x, t)/\partial x$ . Проинтегрировав уравнение (9),

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + U\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\Delta\rho}{\rho_*} g\zeta = 0,$$

выразим  $\zeta$  через  $\varphi$ , подставим во второе уравнение (8) и получим

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x} + \frac{(UW)'}{W} \right] \left( \frac{\partial\varphi}{\partial t} + U\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) &= \\ = \frac{1}{W} \frac{\partial}{\partial x} \left( W s^2 \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

где штрих обозначает производную по  $x$  и

$$\begin{aligned} s^2(x) &= \frac{\Delta\rho}{\rho_*} g H_2(x) \equiv \\ &\equiv \frac{\eta(1 - \eta)\Delta\rho}{(1 - \eta)\rho_1 + \eta\rho_2} g H(x) \equiv g' H(x) \end{aligned} \quad (11)$$

– квадрат скорости распространения ВВ вдоль границы раздела, а  $g'$  – редуцированное ускорение силы тяжести. Заметим, что уравнение (10) справедливо и в отсутствие среднего течения ( $U \equiv 0$ ), и в этом случае совпадает с изучавшимся ранее (см. [9, 10]).

Выразив с помощью (3)  $W(x)$  через  $U(x)$  и  $s(x)$ , положим

$$\varphi(x, t) = a(x)\psi(x, t), \quad a(x) > 0, \quad (12)$$

и приходим к уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + (U^2 - s^2) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + 2U \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial x} + \\ & + 2U \left( \frac{a'}{a} - \frac{s'}{s} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \\ & + \left[ 2(U^2 - s^2) \frac{a'}{a} + (U^2 + s^2) \frac{U'}{U} - 2U^2 \frac{s'}{s} \right] \times \\ & \times \frac{\partial \Psi}{\partial x} + T_1(x) \Psi = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} a(x)T_1(x) = & (U^2 - s^2)a'' + \\ & + a'[(U^2 + s^2)(\ln U)' - 2U^2(\ln s)']. \end{aligned}$$

Наконец, найдем условие, при котором уравнение (13) содержит только производные от  $\Psi$ . Приравнявая  $T_1(x)$  нулю, получим уравнение в полных дифференциалах

$$d(\ln a') = d \left( \ln \frac{s^2 U}{s^2 - U^2} \right).$$

Его интегрирование дает

$$\frac{da}{dx} = \frac{Bs^2 U}{s^2 - U^2}, \quad B = \text{const.} \quad (14)$$

С другой стороны, можно ввести “потенциал смещения границы раздела”, положив  $W(x)\zeta(x, t) = \partial\phi(x, t)/\partial x$ . Тогда, проинтегрировав по  $x$  второе уравнение (8), выразим  $u_2$  через  $\phi$  и подставим в (9):

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} + 2U' \right) \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + U \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = s^2 W \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{W} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right).$$

Теперь с помощью (3) исключим  $W$ , представим

$$\phi(x, t) = A(x)\chi(x, t), \quad A(x) > 0, \quad (15)$$

и получим уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + (U^2 - s^2) \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + 2U \frac{\partial^2 \chi}{\partial t \partial x} + 2 \left( U \frac{A'}{A} + U' \right) \frac{\partial \chi}{\partial t} + \\ & + \left[ 2(U^2 - s^2) \frac{A'}{A} - s^2 \frac{U'}{U} + 3UU' - 2ss' \right] \frac{\partial \chi}{\partial x} + \\ & + T_2(x)\chi = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

в котором

$$\begin{aligned} A(x)T_2(x) = & (U^2 - s^2)A'' + \\ & + [3UU' - s^2(\ln U)' - 2ss']A'. \end{aligned}$$

Легко видеть, что  $T_2(x) \equiv 0$ , если

$$\frac{dA}{dx} = \frac{C}{U(x)[U^2(x) - s^2(x)]}, \quad C = \text{const.} \quad (17)$$

Рассмотрим теперь модельное уравнение

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v_1(x) \frac{\partial}{\partial x} + F(x) \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_2(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) f(x, t) = 0, \quad (18)$$

у которого по крайней мере одно из решений имеет вид бегущей волны,

$$f(x, t) = f_1 \left( t - \int \frac{dx}{v_2(x)} \right),$$

где  $f_1(z)$  – произвольная функция. Раскроем в (18) скобки,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + v_1(x)v_2(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + [v_1(x) + v_2(x)] \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} + \\ & + F(x) \frac{\partial f}{\partial t} + [v_1(x)v_2'(x) + F(x)v_2(x)] \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

и посмотрим сначала, когда это уравнение совпадает с уравнением (13), если условие (14) выполнено и  $T_1(x) \equiv 0$ . Необходимые для этого соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} v_1(x)v_2(x) = & U^2(x) - s^2(x), \quad v_1(x) + v_2(x) = 2U(x), \\ F(x) = & 2U(x) \left( \frac{a'(x)}{a(x)} - \frac{s'(x)}{s(x)} \right), \end{aligned} \quad (20)$$

и

$$\begin{aligned} v_1(x)v_2'(x) + F(x)v_2(x) = & 2[U^2(x) - s^2(x)] \frac{a'(x)}{a(x)} + \\ & + [U^2(x) + s^2(x)] \frac{U'(x)}{U(x)} - 2U^2(x) \frac{s'(x)}{s(x)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Первые два уравнения (20) выполняются, если либо  $v_1 = U - s$ ,  $v_2 = U + s$ , либо  $v_1 = U + s$ ,  $v_2 = U - s$ . Легко видеть, однако, что в обоих случаях уравнение (21) с точностью до несущественного численного множителя дает

$$a(x) = [s(x)U(x)]^{1/2}. \quad (22)$$

Подчеркнем, что здесь и далее  $s^{1/2}(x)$  и  $U^{1/2}(x)$  следует рассматривать как положительные функции. Подставив в (14), находим в явном виде связь между  $s(x)$  и  $U(x)$ ,

$$\frac{d}{dx} [s(x)U(x)] = \frac{Bs^{5/2}(x)U^{3/2}(x)}{s^2(x) - U^2(x)}, \quad (23)$$

точно такую же, как и в задаче о поверхностных волнах (см. уравнение (2.19) в [11]).

Итак, при выполнении соотношений (20), (22) и (14) уравнение (13) можно представить в двух эквивалентных видах,

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + [U(x) - s(x)] \frac{\partial}{\partial x} + U(x) \left( \frac{U'(x)}{U(x)} - \frac{s'(x)}{s(x)} \right) \right\} \times \\ & \quad \times \left( \frac{\partial}{\partial t} + [U(x) + s(x)] \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi \equiv \\ & \equiv \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + [U(x) + s(x)] \frac{\partial}{\partial x} + U(x) \left( \frac{U'(x)}{U(x)} - \frac{s'(x)}{s(x)} \right) \right\} \times \\ & \quad \times \left( \frac{\partial}{\partial t} + [U(x) - s(x)] \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Следовательно, его общее решение представляет собой суперпозицию двух волн произвольной формы, бегущих с разными скоростями,

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) = & \Psi_1 \left( t - \int \frac{dx}{U(x) + s(x)} \right) + \\ & + \Psi_2 \left( t - \int \frac{dx}{U(x) - s(x)} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Независимое распространение каждой из этих волн в неоднородной среде обеспечивается уравнением (23), задающим такую связь скоростей  $U(x)$  и  $s(x)$ , чтобы течение было безотражательным. Физические переменные  $u_2$ ,  $u_1$  и  $\zeta$  связаны с  $\phi$  и  $\psi$  соотношениями

$$\begin{aligned} u_2(x, t) &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = a(x) \frac{\partial \psi}{\partial x} + a'(x) \psi(x, t), \\ u_1(x, t) &= -\frac{1-\eta}{\eta} u_2(x, t), \\ \zeta(x, t) &= -\frac{\rho_*}{g \Delta \rho} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + U(x) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] = \\ &= \frac{\rho_* a(x)}{g \Delta \rho} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial t} + U(x) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{a'(x)}{a(x)} U(x) \psi(x, t) \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Сопоставим теперь уравнения (16) и (19), считая уравнение (17) выполненным. Получим те же два решения для  $v_1$  и  $v_2$ , но другое выражение для  $F(x)$  и другое уравнение вместо (21), а именно

$$\begin{aligned} F &= 2 \left( U \frac{A'}{A} + U' \right), \quad v_1 v_2' + F v_2 = \\ &= 2(U^2 - s^2) \frac{A'}{A} - s^2 \frac{U'}{U} + 3UU' - 2ss'. \end{aligned}$$

При любом выборе пары  $v_1$ ,  $v_2$  эти соотношения дают уравнение  $d[\ln(A^2 Us)]/dx = 0$ , т.е., с точностью до несущественного числового множителя,

$$A(x) = [s(x)U(x)]^{-1/2} \equiv a^{-1}(x). \quad (27)$$

С учетом этого уравнение (17) можно записать в виде

$$\frac{d}{dx} [s(x)U(x)] = \frac{C s^{3/2}(x) U^{1/2}(x)}{s^2(x) - U^2(x)}. \quad (28)$$

При выполнении (28) функция  $\chi(x, t)$  удовлетворяет тому же уравнению (24), что и  $\psi(x, t)$ , и в общем случае тоже равна сумме двух бегущих волн произвольной формы:

$$\begin{aligned} \chi(x, t) = & \chi_1 \left( t - \int \frac{dx}{U(x) + s(x)} \right) + \\ & + \chi_2 \left( t - \int \frac{dx}{U(x) - s(x)} \right), \end{aligned}$$

только независимое их распространение обеспечивается теперь уравнением (28), которое отличается от уравнения (23). Связь физических переменных  $u_2$  и  $\zeta$  с  $\phi$  и  $\chi$  такова:

$$\begin{aligned} u_2(x, t) &= -\frac{U(x)}{\Phi_2} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + U(x) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] = \\ &= -\frac{U(x)}{\Phi_2 a(x)} \left[ \frac{\partial \chi}{\partial t} + U(x) \frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{a'(x)}{a(x)} U(x) \chi(x, t) \right], \quad (29) \\ \zeta(x, t) &= \frac{1}{W(x)} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{W(x) a(x)} \left[ \frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{a'(x)}{a(x)} \chi(x, t) \right]. \end{aligned}$$

Итак, ВВ распространяются без отражения в канале с течением, если  $s(x)$  и  $U(x)$  удовлетворяют уравнению (5), которое, с учетом (11), запишем в виде

$$\begin{aligned} s^2(x) - \beta^2 U^2(x) &= s_0^2 = \text{const}, \\ \beta^2 &= \frac{(1-\eta)\Delta\rho}{2[(1-\eta)\rho_1 + \eta\rho_2]}, \end{aligned} \quad (30)$$

и одному из уравнений (23) и (28). Так как в условиях океана  $\Delta\rho \ll \rho_{1,2}$ , выбираем в (30) положительный знак константы  $s_0^2$ .

Уравнения (23) и (28) существенно отличаются друг от друга, но при  $B = C = 0$  приводят к одному и тому же соотношению между скоростями

$$s(x)U(x) = \Pi = \text{const}, \quad (31)$$

которое в силу (3) эквивалентно равенству  $W(x)H^{1/2}(x) = \text{const}$ . Оно характерно для так называемых *согласованных каналов* (см. [9, 10]) – единственного класса каналов без течения с регулярными профилями  $W(x)$  и  $H(x)$ , в которых ВВ распространяются без отражения вдоль всей оси  $x$ . К сожалению, в нашей задаче (т.е. при  $U(x) \neq 0$ ) такими свойствами обладают только каналы с не зависящими от  $x$  шириной и глубиной и постоянной скоростью течения. Действительно, заданной паре констант  $s_0^2$  и  $\Pi$  уравнения (30) и (31) ставят в соответствие единственную пару положительных чисел  $s$  и  $U$ .

3. БЕЗОТРАЖАТЕЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ  
В КАНАЛАХ

Течения, удовлетворяющие уравнению (23)  
с  $B \neq 0$ .

Уравнение (23) однородно по скоростям  $s$  и  $U$ , а  $B$  имеет размерность обратной длины. С учетом (11) введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \xi &= Bx, \quad \tilde{U}(\xi) = U(x)/s_0, \\ \tilde{s}(\xi) &= s(x)/s_0, \quad \tilde{H}(\xi) = s^2(\xi) \end{aligned} \quad (32)$$

и, опуская в дальнейшем тильду, запишем уравнения (23) и (30) в виде

$$\frac{d}{d\xi} [s(\xi)U(\xi)] = \frac{2s^{5/2}(\xi)U^{3/2}(\xi)}{s^2(\xi) - U^2(\xi)}, \quad s^2(\xi) = 1 + \beta^2 U^2(\xi).$$

Выражая  $s(\xi)$  через  $U(\xi)$ , получим уравнение

$$\frac{dU}{d\xi} = \frac{2U^{3/2}(1 + \beta^2 U^2)^{7/4}}{(1 + 2\beta^2 U^2)[1 - (1 - \beta^2)U^2]}$$

и упростим его, положив  $u = (1 - \beta^2)^{1/2}U$ ,  $\xi_1 = \xi/(1 - \beta^2)^{1/4}$ ,  $\alpha^2 = \beta^2/(1 - \beta^2)$ :

$$\frac{1}{u} \frac{du}{d\xi_1} = \frac{2u^{1/2}(1 + \alpha^2 u^2)^{7/4}}{(1 + 2\alpha^2 u^2)(1 - u^2)}. \quad (33)$$

Его правая часть сингулярна при  $u = 1$ ,  $u = 0$  и  $u \rightarrow \infty$ . Легко видеть, что первая особенность достигается при конечных значениях  $\xi_1$ , скажем, при  $\xi_1 = \xi_*$ , а две другие – лишь асимптотически, при  $\xi_1 \rightarrow -\infty$ .

В окрестности критической точки  $\xi_1 = \xi_*$  методом итераций находим, что

$$\begin{aligned} u_{\pm}(\xi_1) &= 1 \pm \left( \frac{2(1 + \alpha^2)^{7/4}}{1 + 2\alpha^2} (\xi_* - \xi_1) \right)^{1/2} + \\ &+ \frac{2(1 + \alpha^2)^{7/4}}{3(1 + 2\alpha^2)} \left[ 1 - \frac{\alpha^2(1 - 6\alpha^2)}{2(1 + \alpha^2)(1 + 2\alpha^2)} \right] (\xi_* - \xi_1) + \\ &+ O[|\xi_* - \xi_1|^{3/2}]. \end{aligned} \quad (34)$$

Таким образом, обе ветви решения, докритическая ( $u_-(\xi_1) < 1$ , соответствующая  $U(\xi) < s(\xi)$ ) и сверхкритическая ( $u_+(\xi_1) > 1$ , соответствующая  $U(\xi) > s(\xi)$ ), определены только слева от критической точки, при  $\xi_1 < \xi_*$ .

Используя соотношение (см. [18], формула 1.2.4.3.)

<sup>1</sup> Это соответствует  $U(\xi) = s(\xi)$ , т.е. обращению числа Фруда  $Fr(\xi) \equiv U(\xi)/s(\xi)$  в единицу. Заметим, однако, что  $u(\xi) \neq Fr(\xi)$ , их значения совпадают только в критической точке.

$$\int_0^x \frac{x^{\lambda-1} dx}{(x+a)^{\nu}} = \frac{x^{\lambda}}{\lambda a^{\nu}} F\left(\nu, \lambda; 1 + \lambda; -\frac{x}{a}\right), \quad \text{Re } \lambda > 0,$$

где  $F(a, b; c; z)$  – гипергеометрическая функция, проинтегрируем уравнение (33):

$$\begin{aligned} 2u^{3/2} F\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}; \frac{7}{4}; -\alpha^2 u^2\right) - \frac{(1 - 2\alpha^2)u^{3/2}}{(1 + \alpha^2 u^2)^{3/4}} + \\ + \frac{3u^{-1/2}}{(1 + \alpha^2 u^2)^{3/4}} = 3(\xi_B - \xi_1), \end{aligned} \quad (35)$$

$\xi_B$  – константа интегрирования. Так как  $\alpha \ll 1$ , приведем (35) и в приближенном виде, справедливом при  $\alpha^2 u^2 \ll 1$ :

$$\begin{aligned} u^2 + 3(\xi_1 - \xi_B)u^{1/2} + 3 = \\ = \frac{\alpha^2}{4} u^2 \left(1 - \frac{3}{7}u^2\right) + O(\alpha^4 u^4 + \alpha^4 u^6). \end{aligned}$$

Легко видеть, что  $\xi_* = \xi_B - \frac{4}{3} \left[1 - \frac{\alpha^2}{28} + O(\alpha^4)\right]$ . Решения уравнения (35) показаны на рис. 2.

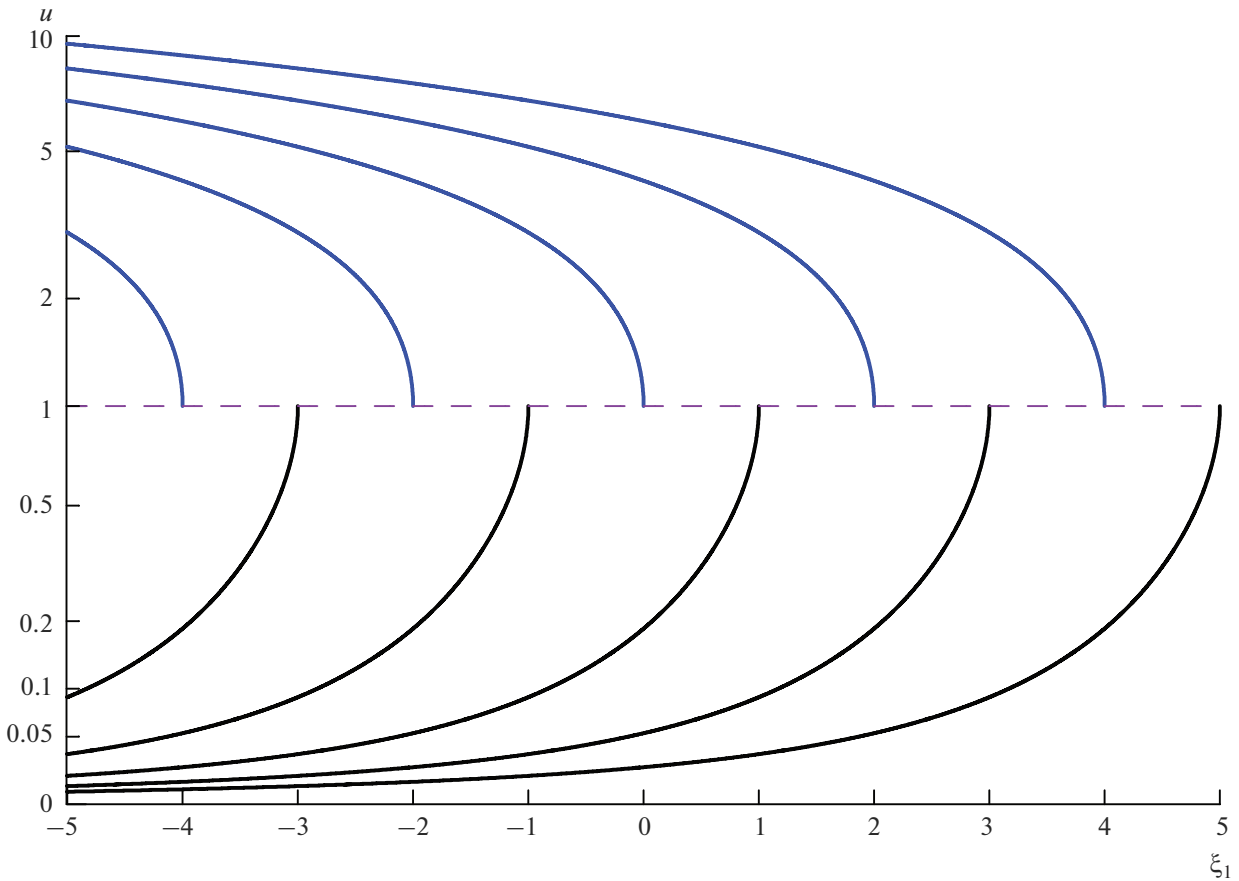
Изменение скорости безотражательного течения обеспечивается согласованной вариацией глубины  $H$  и ширины  $W$  канала, изменяются и амплитуды распространяющихся волн. В безразмерных переменных (32) с учетом (3) и (22) находим

$$\begin{aligned} H &= s^2 = 1 + \beta^2 U^2 \equiv 1 + \alpha^2 u^2, \\ W &= W_0/[u(1 + \alpha^2 u^2)], \\ a &= (sU)^{1/2} = u^{1/2}[1 - \beta^2(1 - u^2)]^{1/4}; \\ \alpha^2 &= \beta^2/(1 - \beta^2). \end{aligned} \quad (36)$$

Параметры  $\alpha^2 \approx \beta^2 \sim \Delta\rho/\rho \ll 1$ , поэтому изменение скорости течения обеспечивается, главным образом, изменением ширины канала  $W \approx W_0/u$ , в то время как его глубина медленно увеличивается или уменьшается вместе со скоростью течения. Фактор  $a$ , определяющий изменение амплитуды потенциала  $\phi$  (см. (12) и (25)), растет и убывает вместе со скоростью так, что приближенно выполняется соотношение  $a \sim W^{-1/2}$ . Возмущения скорости течения в слоях и смещение границы раздела связаны с  $\phi$  уравнениями (26).

Течения, удовлетворяющие уравнению (28)  
с  $C \neq 0$ .

Уравнение (28) неоднородно по скоростям  $s$  и  $U$ . Поэтому сначала обезразмерим  $s$  и  $U$  на  $s_0$ , а затем введем безразмерную координату  $\xi_2 = (1 - \beta^2)^{1/4} Cx/s_0^2$  и перейдем к переменной  $u$ . Получим уравнение (ср. с (33))



**Рис. 2.** Решения уравнения (35) при  $\alpha^2 = 3 \times 10^{-3}$  и различных значениях  $\xi_B$  в докритической ( $u < 1$ ) и сверхкритической ( $u > 1$ ) областях.

$$\frac{1}{u} \frac{du}{d\xi_2} = \frac{2(1 + \alpha^2 u^2)^{5/4}}{u^{1/2}(1 + 2\alpha^2 u^2)(1 - u^2)}. \quad (37)$$

Его правая часть имеет те же особенности, что и в (33), но теперь при конечных значениях  $\xi_2$  достигается не только  $u = 1$ , но и  $u = 0$ , и лишь  $u \rightarrow \infty$  асимптотически, при  $\xi_2 \rightarrow -\infty$ . Как следствие, обе ветви решения, докритическая ( $u_-(\xi_2) < 1$ ) и сверхкритическая ( $u_+(\xi_2) > 1$ ), определены только слева от точки  $\xi_2 = \xi_*$  такой, что  $u(\xi_*) = 1$ , причем докритическая ветвь – лишь на конечном интервале  $\xi_C < \xi_2 < \xi_*$ , так как  $u_- \rightarrow 0$  при  $\xi_2 \rightarrow \xi_C + 0$ . Легко показать, что при  $\xi_2 \rightarrow \xi_* - 0$  поведение решения очень похоже на (34),

$$u_{\pm}(\xi_2) = 1 \pm \left( \frac{2(1 + \alpha^2)^{5/4}}{1 + 2\alpha^2} (\xi_* - \xi_2) \right)^{1/2} + \frac{\alpha^2(3 - 2\alpha^2)(1 + \alpha^2)^{1/4}}{3(1 + 2\alpha^2)^2} (\xi_* - \xi_2) + O(|\xi_* - \xi_2|^{3/2}),$$

а при  $\xi_2 \rightarrow \xi_C + 0$

$$u_-(\xi_2) = (\xi_2 - \xi_C)^2 + \frac{2}{5} \left( 1 + \frac{3}{4} \alpha^2 \right) \times (\xi_2 - \xi_C)^6 + O[(\xi_2 - \xi_C)^{10}]. \quad (38)$$

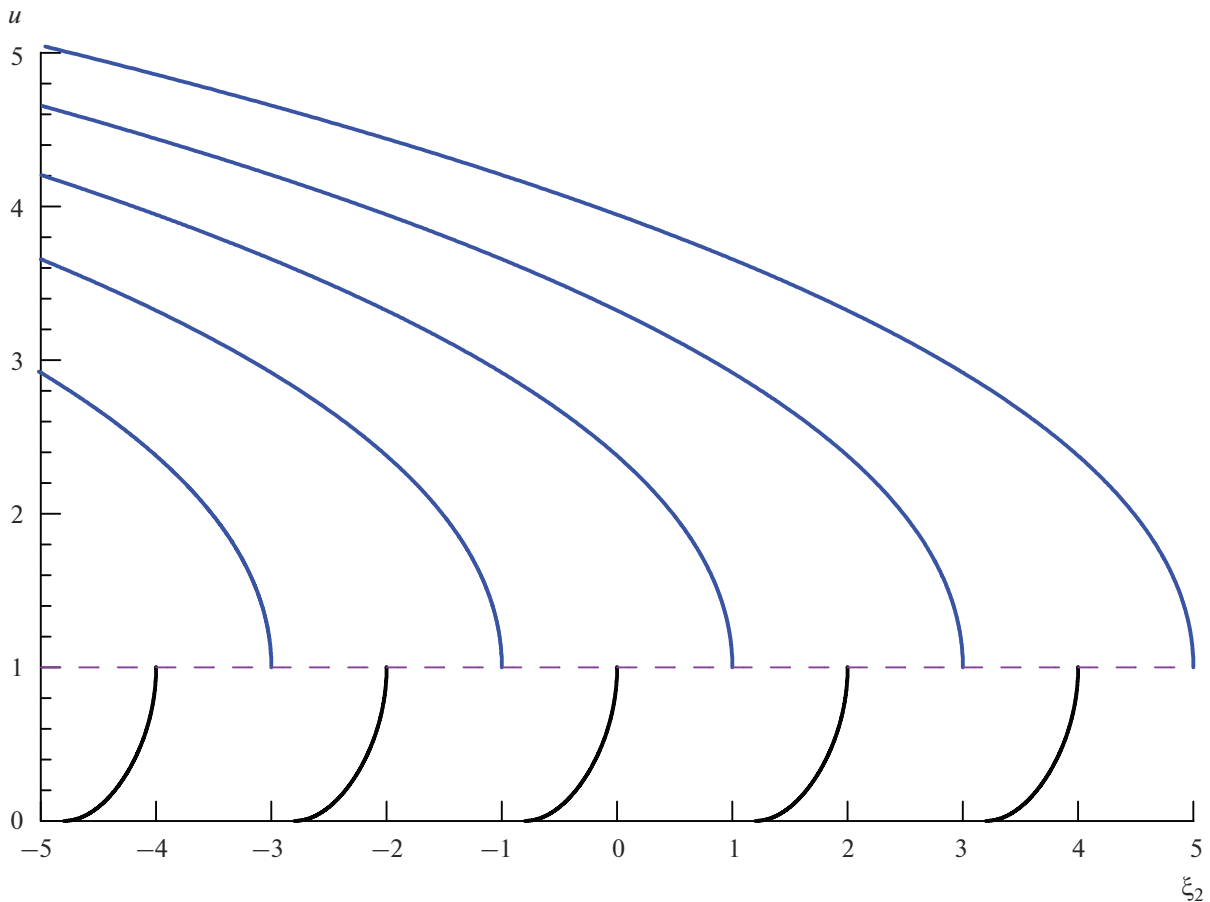
Интегрирование (37) дает уравнение

$$\frac{3 + 4\alpha^2}{10} u^{5/2} F\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{9}{4}; -\alpha^2 u^2\right) + \frac{u^{1/2}(2 - u^2)}{2(1 + \alpha^2 u^2)^{1/4}} = \xi_2 - \xi_C, \quad (39)$$

или в приближенном виде, справедливом при  $\alpha^2 u^2 \ll 1$ ,

$$u^{5/2} - 5u^{1/2} + 5(\xi_2 - \xi_C) = \frac{\alpha^2}{4} u^{5/2} \left[ 3 - \frac{5}{3} u^2 + O(\alpha^2 u^2 + \alpha^2 u^4) \right].$$

Легко проверить, что  $u_-(\xi_C) = 0$ , а  $\xi^* = \xi_C + \frac{4}{5} \left[ 1 + \frac{\alpha^2}{12} + O(\alpha^4) \right]$ . Решения уравнения (39) показаны на рис. 3.



**Рис. 3.** Решения уравнения (39) при  $\alpha^2 = 3 \times 10^{-3}$  и различных значениях  $\xi_C$  в докритической ( $u < 1$ ) и сверхкритической ( $u > 1$ ) областях.

В течениях этого вида ширина и глубина канала, а также фактор  $a$ , по-прежнему определяются соотношениями (36), так что увеличение (уменьшение) скорости течения так же обеспечивается, главным образом, сужением (расширением) канала. Но амплитуда волн здесь (см. (15) и (27)) пропорциональна  $A(\xi_2) = a^{-1}(\xi_2)$  и потому связана с  $W$  приближенным соотношением  $A(\xi_2) \sim W^{1/2}(\xi_2)$ . Возмущение скорости течения и смещение границы раздела описываются уравнениями (29).

#### 4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Из проведенного нами анализа следует, что наличие стационарного течения в канале сужает возможности распространения ВВ без отражения, отнимая, в некотором смысле, одну степень свободы. Действительно, канал без течения характеризуется не зависящими друг от друга *a priori* шириной  $W(x)$  и глубиной  $H(x) = H_1 + H_2(x)$  (или, эквивалентно, скоростью распространения ВВ  $s(x)$ ). Их связывает условие безотражательности, и остается одна

произвольная функция, которая и дает разнообразие искомых конфигураций (см. [9, 10]). Добавив скорость течения  $U(x)$ , мы с неизбежностью налагаем еще две связи — законы сохранения потока (3) и энергии (5), и имеем в результате лишь свободу выбора условия безотражательности — (23) или (28). Как следствие, теряется целый класс согласованных каналов, и остаются только два вида ограниченных безотражательных течений, показанные на рис. 2 и 3.

Чтобы не было отражения, скорость течения должна меняться вдоль канала определенным образом, и меняется она так, что в некоторой точке  $x = x_*$  становится равной скорости распространения ВВ, т.е. число Фруда достигает критического значения  $Fr = 1$ . В геофизических течениях это, как правило, связано с особенностью, и рассмотренный нами класс течений — не исключение. При  $x = x_*$  скорости  $U(x)$  и  $s(x)$  конечны, но их производные бесконечны (см. (34)). В силу сохранения потока (3) течение продолжается и по



другую сторону от  $x_*$ , но безотражательным больше не будет. Вопрос о том, что происходит с волной при переходе через критическую точку, требует отдельного исследования.

Таким образом, в рассмотренной нами задаче перспектива достижения критического числа Фруда ограничивает протяженность каждого безотражательного течения, по крайней мере, с одной стороны. По той же причине течения делятся на докритические, в которых всюду  $U(x) < s(x)$ , и сверхкритические, где  $U(x) > s(x)$  (заметим, что последние обладают рядом интересных свойств, в частности, в них могут распространяться волны отрицательной энергии [19, 20]). Все сверхкритические течения формально ограничены только с одной стороны, критической точкой. Правда, в другую сторону их скорость и глубина должны неограниченно расти, входя в противоречие с приближением мелкой воды, но лишь асимптотически, при  $|x - x_*| \rightarrow \infty$ . А вот докритические течения, удовлетворяющие уравнению (28), резко ограничены с обеих сторон, так как на конечном расстоянии от критической точки  $x = x_*$  их скорость стремится к нулю (см. (38) и рис. 3), а ширина канала, соответственно, — к бесконечности. В реальности это, скорее всего, означает что одномерное течение становится двумерным, приобретая  $y$ -компоненту скорости.

С другой стороны, наличие течения избавляет нас от одной из сингулярностей, присущих каналам без течения и ограничивающих их протяженность. В таких каналах уменьшение глубины может привести к исчезновению нижнего слоя и разрушению ВВ (см., например, [8, 9]). Если же течение есть, сохранение потока в каждом из слоев не позволяет нижнему слою исчезнуть: с уменьшением глубины канала толщины слоев уменьшаются пропорционально, скорость течения замедляется, а канал расширяется (см. (36)).

Заметим, кроме того, что для понимания смысла полученных нами решений нужно иметь в виду еще одно обстоятельство. Уравнения (23) и (28) инвариантны при одновременной замене знака координаты  $x$  и константы  $B$  или, соответственно,  $C$ . Следовательно, переход к координатам  $\xi_1 \sim Bx$  и  $\xi_2 \sim Cx$  (и к уравнениям (33) и (37)) в определенной мере стирает различие между понятиями “вверх по течению” и “вниз по течению”: если  $s(x)$  и  $U(x)$  — решение уравнения (23) (или (28)) при  $B = B_0$  (или  $C = C_0$ ), то  $s(-x)$  и  $U(-x)$  — тоже решение, при  $B = -B_0$  (или  $C = -C_0$ ). Поэтому тот факт, что все безотражательные течения определены слева от критической точки  $\xi_*$  (см. рис. 2 и 3), не означает, что критическая точка  $x = x_*$  непременно расположена вниз по течению.

Теперь уместно сравнить полученные выше результаты для ВВ с картиной распространения без отражения поверхностных волн в каналах [11], которая изобилует разнообразием возможных течений, как ограниченных, так и не ограниченных по протяженности. И те, и другие волны распространяются вдоль поверхности раздела, и с физической точки зрения главное различие состоит в величине перепада плотности:  $\Delta\rho/\rho \approx 1$  в случае поверхностных волн и  $\Delta\rho/\rho \ll 1$  в случае ВВ. Как следствие, изменение скорости течения сопровождается практически таким же изменением скорости распространения поверхностных волн и лишь незначительным изменением скорости ВВ (см. (30)). То есть сопоставлять следует картину для ВВ с картиной для поверхностных волн при (практически) постоянной скорости их распространения (т.е. рис. 2 с рис. 3 (а) в статье [11] — согласие хорошее).

И последнее. В данной статье изучено распространение ВВ без отражения в течениях под твердой крышкой. Как отмечалось во Введении, такая модель соответствует некоторым геофизическим течениям, например, течениям под ледовым покровом. Кроме того, полученные с ее помощью результаты приложимы к течениям в подводных туннелях (каналах), соединяющих различные водоемы (резервуары), а также могут оказаться полезными для оценки эффективности и безопасности инженерных сооружений. Но несомненно гораздо больший интерес представляет подобная задача для течений со свободной поверхностью, где приближение твердой крышки используется лишь для фильтрации поверхностных волн. Предварительный анализ показывает, что в такой постановке ее сложность существенно выше, но есть надежда на “восстановление” разнообразия безотражательных течений на новом уровне. Мы планируем рассмотреть ее в ближайшее время.

## ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Миропольский Ю.З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеиздат, 1981. 302 с.
2. *Морозов Е.Г.* Океанские внутренние волны. М.: Наука, 1985. 151 с.
3. *Sutherland B.R.* Internal gravity waves. Cambridge: CUP, 2010. 394 p.
4. *Pelinovsky E., Talipova T., Didenkulova I., Didenkulova E.* Interfacial long traveling waves in a two-layer fluid with variable depth // Stud. Appl. Math. 2019. V. 142. P. 513–527.

5. *Grimshaw R., Pelinovsky D., Pelinovsky E.* Homogenization of variable-speed wave equation // *Wave Motion*. 2010. V. 47. P. 496–507.
6. *Талипова Т.Г., Пелиновский Е.Н., Петрухин Н.С.* О проникновении длинной внутренней волны в толщу океана // *Океанология*. 2009. Т. 49. № 5. С. 673–680.
7. *Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T.* Nonreflecting internal wave beam propagation in the deep ocean // *J. Phys. Oceanography*. 2010. V. 40. P. 802–813.
8. *Талипова Т.Г., Пелиновский Е.Н.* Трансформация внутренних волн над неровным дном: аналитические результаты // *Океанология*. 2011. Т. 51. № 4. С. 621–626.
9. *Талипова Т.Г., Пелиновский Е.Н., Куркина О.Е., Рувинская Е.А., Гиниятуллин А.Р., Наумов А.А.* Безотражательное распространение внутренних волн в канале переменного сечения и глубины // *Фундам. и прикл. геофиз.* 2013. Т. 6. № 3. С. 46–53.
10. *Багаев А.В., Пелиновский Е.Н.* Конфигурация канала переменного сечения, допускающая безотражательное распространение внутренних волн в океане // *Журн. СВМО*. 2016. Т. 18. № 3. С. 127–136.
11. *Churilov S.M., Stepanyants Yu.A.* Reflectionless wave propagation on shallow water with variable bathymetry and current // *J. Fluid Mech.* 2022. V. 931. A15. 25 p.
12. *Музылев С.В.* Волны в океане под ледяным покровом: основы теории и модельные задачи // *Современные проблемы динамики океана и атмосферы*. М.: Триада ЛТД, 2010 г. С. 315–345.
13. *Stepanyants Yu.A., Sturova I.V.* Rossby waves in the ocean covered by compressed ice // *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 2020. V. 114. P. 306–316.
14. *Хейсин Д.Е.* Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеоиздат, 1967. 215 с.
15. *Букатов А.Е.* Влияние продольно сжатой упругой пластинки на неустановившееся волновое движение однородной жидкости и газа // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа*. 1980. № 5. С. 68–75.
16. *Baines P.G.* A unified description of two-layer flow over topography // *J. Fluid Mech.* 1984. V. 146. P. 127–167.
17. *Baines P.G.* Topographic effects in stratified flows. Cambridge: CUP, 1997. 498 p.
18. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции. М.: Физматлит, 2002. 632 с.
19. *Островский Л.А., Рыбак С.А., Цимринг Л.Ш.* Волны отрицательной энергии в гидродинамике // *УФН*. 1986. Т. 150. № 3. С. 417–437.
20. *Степанянц Ю.А., Фабрикант А.Л.* Распространение волн в сдвиговых гидродинамических течениях // *УФН*. 1989. Т. 159. № 1. С. 83–123.

## Reflectionless Internal Wave Propagation in a Channel with Variable Cross-Section and Current

S. M. Churilov\*

*Institute of Solar–Terrestrial Physics SB RAS, 126-a Lermontov St., Irkutsk, 664033 Russia*

*\*e-mail: churilov@iszf.irk.ru*

The propagation of linear long internal waves of arbitrary shape in a stationary flow under rigid lid of a two-layer fluid in a channel with variable cross-section is considered. Two kinds of flows are found and analyzed in which waves propagate without reflection. The results obtained are compared with those for channels without current studied earlier. In particular, it is shown that in the presence of a steady flow, there are no self-consistent channels in which waves can propagate without reflection over unlimited distances. The main reason for limiting the extent of reflectionless channels with current is that the flow velocity changes much faster than that of wave propagation, and there is necessarily a point at which they become equal.

**Keywords:** two-layer flow, channel with variable cross-section, internal waves, propagation without reflection