УДК 532.65

# ДВУМЕРНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В НЕВЯЗКОЙ НЕПРЕРЫВНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

© 2022 г. А. А. Очиров<sup>а, \*</sup>, Ю. Д. Чашечкин<sup>b, \*\*</sup>

<sup>а</sup>Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, д.14, Ярославль, 150003 Россия <sup>b</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1, Москва, 119526 Россия \*e-mail: otchirov@mail.ru

\*\**e-mail: yulidch@gmail.com* Поступила в редакцию 25.04.2022 г. После доработки 27.05.2022 г. Принята к публикации 09.06.2022 г.

Исследовано распространение двумерных периодических волн в невязкой непрерывно стратифи-

цированной жидкости со свободной поверхностью в диапазоне частот от  $10^{-4}$  до  $5 \times 10^{2}$  Гц. Приведены дисперсионные соотношения, а также выражения для фазовых и групповых скоростей для поверхностных и внутренних волн в физически наблюдаемых переменных. Показано, что при достижении длиной волны значений порядка масштаба стратификации жидкость ведет себя как однородная. С приближением частоты волны к частоте плавучести скорость переноса энергии уменьшается: групповая скорость поверхностных волн стремится к нулю, а фазовая — к бесконечности. В случае инфинитезимальных возмущений стратифицированной жидкости со свободной поверхностью поверхностные и внутренние волны существуют в разделенных частотных интервалах.

**Ключевые слова:** поверхностные волны, внутренние волны, стратифицированная жидкость **DOI:** 10.31857/S000235152205008X

## введение

Исследования волн - периодических течений жилкостей, в которых дисперсионное соотношение задает связь между частотой и длиной волны или волновым числом, занимают важное место в физических науках об атмосфере, океане и прикладной гидродинамике в силу фундаментальности темы и важности практических приложений. Несмотря на более чем тысячелетнюю историю наблюдений и экспериментальных исследований и более чем трехсотлетний период активных усилий теоретиков, многие вопросы теории волн, эффектов нестационарности, нелинейности, диссипации, вопросы практических приложений нуждаются в уточнении. Традиционно, начиная с работ Эйлера, Лагранжа, Даламбера внимание уделяется изучению отдельных типов волн - гравитационных, звуковых, инерциальных в жидких или газообразных средах. Первоначально рассматривались гравитационные волны на поверхности актуально однородной жидкости, плотность которой одинакова в пространстве и неизменна во времени. Полученные результаты отражены в большом числе оригинальных и обзорных статей, обобщены в известных трактатах [1, 2]. По наблюдениям волновой картины перед и позади рыболовной лески на дрейфующей яхте, Томсон идентифицировал капиллярные волны [3], описание которых приводится в современных учебниках в практически неизменной оригинальной форме.

Постепенно появляющиеся примеры наблюдений заметного влияния даже слабых вариаций переменной плотности на свойства течений в атмосфере, в океане и в лаборатории стимулировали изучение волн в неоднородной жидкости, вначале – в двухслойной в работах Дж.Г. Стокса [4]. Анализируя эксперименты по моделированию перьевых облаков. Рэлей вывел уравнении и рассчитал предельную частоту бегущих внутренних волн в непрерывно стратифицированной жидкости [5]. Удивительным образом, глубокая статья Рэлея выпала из научного оборота и долгое время оставалась неизвестной широкому кругу исследователей. Только через сорок лет финский ученый В. Вяйсяля вновь вычислил частоту собственных колебаний непрерывно стратифицированной жидкости применительно к динамике разрабатываемых шаров-зондов [6], а через два года английский метеоролог Д. Брент определил ее значение при интерпретации спектров сигналов микробарографов [7].

Активные исследования влияния стратификации на волновые движения, которые стали формироваться в начале сороковых годов прошлого века в Германии [8], получили широкое развитие в конце шестидесятых годов прошлого века в Великобритании [9] и довольно скоро в других странах. Стали изучаться все основные свойства отдельных типов волновых движений — групповые и фазовые скорости [2, 10], эффекты рефракции [11], дифракции [12], интерференции, нелинейности [13] и в гидросфере, и в атмосфере [14].

Однако реальная картина морского волнения [15], как правило, нестационарного вследствие ветрового разгона, диссипативного затухания и нелинейного взаимодействия волн между собой, с неоднородными течениями и топографией, существенно отличается от идеализированной в современных теоретических построениях. Волны легко разрушаются с образованием пенных шапок. вытянутых по ветру сплошных струек и последовательностей капель (капельных струй) [16]. В свою очередь, волны меняют морфологию дна в море, реках и каналах [17]. Короткие капиллярные волны на склонах гравитационных волн, [18], меняют шероховатость контактной поверхности, определяющую взаимодействие океана и атмосферы (расчеты распространения капиллярных волн по сферической поверхности проведены в [19]). Визуализация капельных течений показывает сложность многомасштабной картины волнового переноса вещества, включающего образование вихрей, и тонких волокон [10].

В природных условиях в поле силы тяжести, подвижные среды – атмосфера и океан, естественно стратифицируются под действием сил плавучести при изменении температуры, солености и давления и допускают существование бегущих внутренних волн [5, 10]. Типичные значения периода (частоты) плавучести  $T_b = 2\pi/N$  составляют 5–10 мин ( $N \sim 0.01 \text{ c}^{-1}$ ) в сезонном термоклине и 20–60 мин в годовом термоклине в океане ( $N \sim 0.001 \text{ c}^{-1}$ ) [20, 21] Во всех случаях отношение изменчивости плотности и ее вариаций в течении являются малыми, что позволяет представлять ее распределение в виде

$$\rho = \rho_{00} \left( 1 + q \right) = \rho_{00} \left( 1 + r(z) + s(x, z, t) \right), \quad (1)$$

функция r(z) задает исходную стратификацию, а s(x, z, t) – волновое возмущение плотности.

Научный и практический интерес представляет изучение свойств волн в жидкости со свободной поверхностью, по которой могут распространяться периодические гравитационно-капиллярные волны с учетом эффектов непрерывной стратификации, обеспечивающих существование внутренних волн.

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Современное математическое описание течений жидкостей и газов базируется на полной системе фундаментальных уравнений неразрывности, переноса вещества (диффузии Фика), тепла (Фурье) и импульса (Навье-Стокса) [22]. Однако ключевые свойства различных типов волновых процессов, которые обычно изучаются в приближении невязкой жидкости [1, 2, 5, 10, 13], сохраняются в виде регулярной части решений задач в полной постановке. Следуя традиции, далее рассматривается задача о распространении периодических волн – поверхностных капиллярно-гравитационных и внутренних волн в невязкой экспоненциально стратифицированной жидкости, влиянием диссипативных факторов (эффектами вязкости, диффузии и теплопроводности), как и сжимаемостью жидкости, пренебрегается.

Рассмотрение проводится в декартовой системе координат Охуг, в которой плоскость Оху совпалает с равновесным уровнем жилкости z = 0, а ось Ог направлена вертикально вверх против направления действия сил тяжести g. Отклонение свободной поверхности от равновесного значения описывается функцией  $z = \zeta(x, y, t)$ . Невозмущенная несжимаемая жидкость характеризуетраспределением плотности по глубине ся  $\rho_0(z) = \rho_{00} r(z)$ , которое описывается масштабом,  $\Lambda = |dln\rho/dz|^{-1}$ , частотой  $N = \sqrt{g/\Lambda} c^{-1}$ , периодом плавучести  $T_b = 2\pi/N$ , и коэффициентом поверхностного натяжения σ или его нормированным на плотность значением  $\gamma = \sigma / \rho_{00}$ . Для упрощения записи обычно выбирается экспоненциальное распределение плотности, к которому может быть приведено произвольное гладкое распределение плотности с использованием преобразования масштабов, приведенного в [23].

Математическая формулировка задачи основана на предельно редуцированной системе фундаментальных уравнений в приближении Буссинеска [22], в которой уравнение состояния заменяет невозмущенное распределение плотности.

$$z < \zeta: \begin{cases} \rho_0(z) = \rho_{00} \exp(-z/\Lambda) \\ \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \mathbf{g}. \\ \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \end{cases}$$
(2)

Здесь приняты обозначения:  $\mathbf{u} = \sum_{i} u_i \mathbf{e}_i$  – вектор скорости, *P* – гидродинамическое давление. Рассмотрим задачу в плоской постановке, считая, что волновое движение не зависит от горизонтальной координаты *y*. В этом случае, принимая во внима-

ИЗВЕСТИЯ РАН. ФИЗИКА АТМОСФЕРЫ И ОКЕАНА том 58 № 5 2022

ние несжимаемость жидкости, можно ввести функцию тока  $\psi$  такую, что:  $u = \partial_z \psi$ , а  $w = -\partial_x \psi$  и в линейной постановке в приближении Буссинеска в случае экспоненциальной стратификации с масштабом  $\Lambda$  система (2) преобразуется в уравнение (подробный вывод приводится в приложении A):

$$z < 0: \ \partial_{tt} \Delta \psi + N^2 \partial_{xx} \psi \exp(-z/\Lambda) = 0.$$
 (3)

Уравнение (3) дополняется кинематическим и динамическим граничными условиями на свободной поверхности жидкости. В линейном приближении после процедуры снесения граничных условий на невозмущенную поверхность z = 0граничные условия принимают вид [2]:

$$z = 0: \partial_t \zeta + \partial_x \psi = 0, \tag{4}$$

$$-\rho_{00}g\partial_x\zeta - \rho_{00}\partial_{tz}\psi + \sigma\partial_{xxx}\zeta = 0.$$
 (5)

С учетом (4) условие (5) приводится к следующему уравнению

$$g\partial_{xx}\psi - \partial_{ttz}\psi - \gamma\partial_{xxxx}\psi = 0.$$
 (6)

Решение уравнений (3, 6) находится методами теории возмущений [25–27].

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Для поверхностных волн частота которых превышает частоту плавучести  $\omega > N$  решение (6) ищется в виде:

$$\psi = A_{+} \exp(k_{z}z + ik_{x}x - i\omega t) + A_{-} \exp(k_{z}z - ik_{x}x - i\omega t).$$
(7)

Поскольку коэффициенты в уравнении (3) зависят от глубины z, решение вида (7) нужно понимать как коротковолновое ВКБ-приближение к задаче [26].

Подстановка (7) в (3) приводит к связи между горизонтальной и вертикальной компонентами волнового вектора  $k_x$  и  $k_z$ :

$$k_x^2 = k_z^2 \frac{1}{1 - N_{\omega}^2 \exp(-z/\Lambda)}, \quad N_{\omega} = N/\omega.$$
 (8)

Подставляя (7) в граничные условия (6) получим дисперсионное соотношение:

$$gk_x^2 - \omega^2 k_z + \gamma k_x^4 = 0.$$
 (9)

Используя (8) дисперсионное уравнение (9) преобразуется в:

$$k_{z}^{3} - \frac{g}{\gamma}k_{z}\left(1 - N_{\omega}^{2}\right) + \frac{\omega^{2}}{\gamma}\left(1 - N_{\omega}^{2}\right)^{2} = 0.$$
(10)

В силу громоздкости выражений значения корней кубического уравнения (10) здесь не приводятся. Для удобства дальнейшего анализа выражения (8) и (10) приводятся к в безразмерному виду с использованием естественных масштабов задачи – в качестве масштаба времени выбирается величина, обратная частоте плавучести  $T_N = 1/N$ , а масштаба длины – капиллярная постоянная  $\delta_g^{\gamma} = \sqrt{\gamma/g}$ . В качестве малого параметра выбирается отношение собственных масштабов задачи  $\varepsilon = \delta_g^{\gamma}/\Lambda$ . Тогда с  $k_{x^*} = k_x \delta_g^{\gamma}$  и  $\omega_* = \omega/N$  формулы (8) и (10) принимают вид

$$k_{x^*}^2 = k_{z^*}^2 \frac{\omega_*^2}{\omega_*^2 - \exp\left(-z/\Lambda\right)},$$
(11)

$$k_{z^*}^3 + \frac{\omega_*^2 - 1}{\omega_*^2} k_{z^*} - \varepsilon \frac{(\omega_*^2 - 1)^2}{\omega_*^2} = 0.$$
(12)

Не все решения уравнения (12) имеют физический смысл. Для обеспечения затухания движения с глубиной необходимо выполнение условия  $\operatorname{Re}(k_z) > 0$ . Как показывает анализ, этому условию удовлетворяет только один корень. Представление корней дисперсионного уравнения и доказательство единственности физически реализуемого корня приводится в приложении Б.

В более привычном виде выражение для дисперсионного уравнения (10) приводится в форме зависимости частоты  $\omega$  от волнового числа  $k_z$ 

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{2N^2 + k_z \left(g + \gamma k_z^2\right) \pm k_z \sqrt{\left(g + \gamma k_z^2\right)^2 + 4\gamma N^2 k_z}}{2}}.$$
(13)

Рассмотрение показывает, что из всех значений выражения (13) условию физической реализации удовлетворяет только один корень, которому соответствуют верхние знаки. В отсутствии стратификации ( $N \rightarrow 0$ ) (13) переходит в известное дисперсионное соотношение для капиллярно-гравитационных волн [1, 2]:

$$\omega = \sqrt{gk_z \left(1 + \delta_g^{\gamma 2} k_z^2\right)}$$

Традиционно дисперсионное уравнение представляют именно в таком виде, а не в форме (12). Поскольку частота волнового движения несет в себе энергетический смысл, она должна быть действительной и положительно определенной величиной. Волновое число, напротив, учитывающее ослабление волн с удалением от источника, может быть комплексным. Действительная часть компоненты  $k_x$  и мнимая часть компоненты  $k_z$  в этом случае характеризуют волновое движение, а мнимая часть компоненты  $k_x$  и действительная часть компоненты  $k_z$  описывают пространственное затухание волны. Выбор более адекватного представления базовых параметров бегущих волн нуждается в экспериментальном обосновании.

Если частота волны меньше частоты плавучести  $\omega < N$ , решение (6) можно искать в виде внутренних волн:

$$\psi = [\alpha \exp(ik_z z) + \beta \exp(-ik_z z)] \times \times [A_+ \exp(ik_x x - i\omega t) + A_- \exp(-ik_x x - i\omega t)].$$
(14)

Подстановка (14) в (3) приводит к:

α

$$k_x^2 = k_z^2 \frac{1}{N_{\omega}^2 \exp(-z/\Lambda) - 1}.$$
 (15)

Подставляя (14) в граничные условия (6) получим дисперсионное соотношение:

$$gk_x^2(\alpha+\beta) - i\omega^2k_z(\alpha-\beta) + \gamma k_x^4(\alpha+\beta) = 0, \quad (16)$$

которое с использованием (15) приводит к связи между амплитудами α и β:

$$\beta = -\frac{1 - i\delta_k^{\theta} + k^2 \delta_g^{\gamma 2} \cos^2 \theta}{1 + i\delta_k^{\theta} + k^2 \delta_g^{\gamma 2} \cos^2 \theta} \alpha,$$

$$+\beta = \frac{2i\delta_k^{\theta}}{1 + i\delta_k^{\theta} + k^2 \delta_g^{\gamma 2} \cos^2 \theta} \alpha, \quad \delta_k^{\theta} = \frac{\sin \theta}{k\Lambda}.$$
(17)

Здесь использованы обозначения  $k^2 = k_x^2 + k_z^2 -$ квадрат волнового числа,  $\cos \theta = \omega/N -$ безразмерный параметр, характеризующий отношение частоты волнового движения во внутренней волне к частоте плавучести. Угол  $\theta$  характеризует направление распространения групповой скорости волны по отношению к вертикали или фазовой скорости – к горизонтали. Полученные соотношения описывают внутренние гравитационно-капиллярные волны, которые испытывают отражение от свободной поверхности. Из выражений (17) для коротких внутренних волн ( $k\Lambda \ge 1$ ) следует, что

$$\beta \simeq -\alpha,$$
 (18)

что означает, согласно (14), отсутствие поверхностной волны: вся энергия, падающая на свободную поверхность, отражается и распространяется уже в виде отраженной волны. Энергия низкочастотных движений, вносимых на свободную поверхность атмосферными возмущениями, также переносится внутренними волнами в толщу жидкости, что обеспечивает низкую плотность энергии в спектральном диапазоне с периодом в интервале от нескольких минут до нескольких часов и длинами волн от нескольких сотен метров до нескольких сотен километров [24].

В теории однородной жидкости в теоретических построениях широко используется свойство потенциальности поверхностных волн [2]. В стратифицированной жидкости это свойство теряется вследствие действия механизма бароклинной генерации завихренности [2]. С учетом связи ротора скорости с функцией тока в двумерном течении [2]:

$$rot\mathbf{u} = -\Delta\psi, \tag{19}$$

из (7) и (8) следует, что завихренность поверхностных волн в стратифицированном океане ненулевая и равна

$$\Omega_{S} = \operatorname{rot} \mathbf{u} = AN_{S+}k_{z}^{2}\exp(k_{z}z + ik_{x}x - i\omega t) + AN_{S-}k_{z}^{2}\exp(k_{z}z - ik_{x}x - i\omega t).$$
(20)

Оценка у завихренности для внутренних волн следует из формул (14) и (15):

$$\Omega_{I} = \operatorname{rot} \mathbf{u} = \left(\alpha e^{ik_{z}z} + \beta e^{-ik_{z}z}\right) \times \left(AN_{I+}e^{ik_{x}x - i\omega t} + AN_{I-}e^{-ik_{x}x - i\omega t}\right)k_{z}^{2},$$

$$AN_{S\pm} = A_{\pm} \frac{N_{\omega}^{2} \exp\left(-z/\Lambda\right)}{1 - N_{\omega}^{2} \exp\left(-z/\Lambda\right)},$$

$$AN_{I\pm} = A_{\pm} \frac{N_{\omega}^{2} \exp\left(-z/\Lambda\right)}{N_{\omega}^{2} \exp\left(-z/\Lambda\right)}.$$
(21)

Рассмотрим амплитуды  $AN_{S\pm}$  и  $AN_{I\pm}$  в предельных случаях. Вблизи поверхности жидкости  $(z \rightarrow 0)$  выполняются переходы:

$$AN_{S\pm} \to A_{\pm} \frac{N_{\omega}^2}{1 - N_{\omega}^2}, \quad AN_{I\pm} \to A_{\pm} \frac{N_{\omega}^2}{N_{\omega}^2 - 1}.$$
(22)

И для поверхностных и для внутренних волн выражение (22) при приближении частоты волнового движения к частоте плавучести неограниченно растет и в пределе достигает бесконечно больших значений. Поверхностные волны с очень большими частотами ( $\omega \ge N$ ) обладают нулевой завихренностью (в этом случае выражение (22) для поверхностных волн устремляется к нулевому значению). Внутренние волны с малыми частотами ( $\omega \ll N$ ) обладают конечной завихренностью (выражение (22) для внутренних волн в этом случае стремится к постоянному значению  $A_+$ ).

На глубине (при  $z \rightarrow -\infty$ ) выполнятся переходы:

$$AN_{S\pm} \to -A_{\pm}, \quad AN_{I\pm} \to A_{\pm}.$$
 (23)

Таким образом, для поверхностных волн можно сделать вывод, что завихренность экспоненциально затухает с глубиной (см. выражение (20)), а внутренние волны на глубине обладают конечной завихренностью.

# ПОСТРОЕНИЕ ДИСПЕРСИОННЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

Расчеты показывают, полученные выражения в предельных переходах сводятся к общепринятым, однако, наблюдения и сравнения с экспериментом построения лучше выполнять в пространстве



Рис. 1. Зависимость длины волны от частоты волнового движения.

физически наблюдаемых величин — длины, частоты, групповой скорости волны. Для выполнения построений необходимо, в первую очередь, определить понятие модуля волнового вектора, поскольку остальные величины прямо или косвенно зависят от него. В двумерном случае модуль волнового вектора можно определить двумя способами:

$$|k_1| = \sqrt{k_x^2 + k_z^2},$$
 (22)

$$|k_2| = \sqrt{\text{Re}(k_x)^2 + \text{Im}(k_z)^2}.$$
 (23)

Согласно наиболее общему определению волновой вектор – это градиент фазы волны. В выражении (22) учтены компоненты волнового вектора, отвечающие за затухание и за волновое движение, тогда как в выражении (23) компоненты, отвечающие за затухание, отсутствуют. Отличие в значениях величин (22) и (23) составляет  $\sqrt{2}$  раз. Поскольку пространственное затухание не оказывает влияния на фазу волнового движения, более предпочтительным и физически обоснованным выглядит определение (23). В дальнейшем в этой работе мы будем придерживаться его.

В таком случае длина волны легко находится следующим образом:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{\operatorname{Re}(k_x)^2 + \operatorname{Im}(k_z)^2}}.$$
(24)

Подставляя дисперсионные соотношения в (24) получим зависимость длины волны от частоты волнового движения. Эта зависимость изображена на рис. 1 (здесь и далее все построения будут выполнены для жидкости с параметрами воды  $\sigma = 72$  дин/см,  $\rho_{00} = 1$  г/см<sup>3</sup>, g = 981 см/с<sup>2</sup>). Цифрой (1) обозначены зависимости для нестратифицированной жидкости (N = 0 с<sup>-1</sup>). Цифрой (2)

обозначены зависимости для очень слабо стратифицированной жидкости ( $N = 0.001 \text{ c}^{-1}$ ), что соответствует годовому термоклину в океане [20, 21]. Цифрой (3) обозначены зависимости для слабо стратифицированной жидкости ( $N = 0.01 \text{ c}^{-1}$ ). Такая ситуация свойственна сезонному термоклину в океане [20, 21]. Цифрой (4) обозначены зависимости для сильно стратифицированной жидкости ( $N = 1 \text{ c}^{-1}$ ). Такие значения воспроизводимы в лабораторных условиях для жидкости с сильной стратификацией.

Из рис. 1 видно, что различия в генерируемых длинах волн между жидкостью с очень слабой стратификацией и однородной жидкостью начинают проявляться на очень больших длинах волн (порядка 10<sup>9</sup> см). При больших значениях стратификации различия проявляются для меньших длин волн.

Отдельный интерес представляет собой скорость распространения фазового фронта и скорость переноса энергии. Фазовая скорость волнового движения задается соотношением:

$$\mathbf{C}_{ph} = \frac{\omega \mathbf{k}}{k^2} = \left\{ \frac{\omega k_x}{k_x^2 + k_z^2}; \frac{\omega k_z}{k_x^2 + k_z^2} \right\}.$$
 (25)

Групповая скорость волнового движения, характеризующая за перенос энергии волной, определяется как градиент частоты волнового движения в пространстве волновых чисел:

$$\mathbf{C}_{gr} = \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial k_x}; \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \right\}.$$
 (26)

На рис. 2 представлены зависимости фазовой и групповой скоростей от частоты для жилкостей с разной стратификацией. Фазовые скорости обозначены на рисунке пунктирными линиями, групповые скорости – сплошными. Цифрами от (1) до (4) помечены графики зависимостей фазовых скоростей, а цифрам от (5) до (8) соответствуют графики зависимостей групповых скоростей при разных уровнях стратификации. Цифрами (1) и (8) обозначены зависимости для однородной жидкости  $(N = 0 \text{ c}^{-1})$ , (2) и (7) — для очень слабо стратифицированной жидкости ( $N = 0.001 \text{ c}^{-1}$ ), (3) и (6) – для слабо стратифицированной жидкости  $(N = 0.01 \text{ c}^{-1})$ . Цифрами (4) и (5) обозначены зависимости для сильно стратифицированной жидкости ( $N = 1 \text{ c}^{-1}$ ).

С увеличением частоты длина волны уменьшается. При достижении длиной волны значений, сопоставимых с масштабом стратификации А (порядка  $10^3$  см для сильно стратифицированной жидкости, зависимости для которой обозначены литерой (4) и (5), порядка  $10^7$  см для слабо стратифицированной жидкости, зависимости для которой обозначены литерой (3) и (6) и порядка  $10^9$  см для очень слабо стратифицированной жидкости, зависимости для которой обозначены литерой (2) и (7)) стратификация для волны перестает быть заметна и все кривые ведут себя так, как ведут себя как для однородной жидкости (кривые, обозначенные литерой (1) и (8)).

И фазовая и групповая скорости обладают экстремумом — минимумом, причем своего минимального значения фазовая скорость достигает при большей частоте, чем групповая. На больших частотах групповая скорость превышает фазовую. С уменьшением частоты обе скорости уменьшаются и при некотором значении сравниваются скорость переноса фазы волны совпадает со скоростью переноса энергии группой волн. Дальнейшее уменьшение частоты приводит к еще одному примечательному значению — частоте, при которой наблюдается минимальное значение групповой скорости волнового движения.

С уменьшением частоты волнового движения увеличивается длина волны и становится заметно влияние стратификации: с приближением к частоте плавучести фазовая скорость неограниченно возрастает, а групповая скорость устремляется к нулю. Частота плавучести является в некотором роде критической частотой: в идеальной жидкости поверхностные волны с частотой меньше, чем частота плавучести не реализуются (см. приложение Б).

Для наблюдения удобнее строить зависимости фазовой и групповой скоростей не от частоты, а от длины волны. При построении зависимостей для идеальной нестратифицированной жидкости в [2] проводилась нормировка на длину волны, при которой достигается минимум фазовой скорости. Учитывая важность групповой скорости как показателя переноса энергии, предпочтительнее выглядит выбор длины волны ее минимального значения. В аналитическом виде это сделать довольно затруднительно. На рис. 3 представлены зависимости фазовой и групповой скорости от длины волны для жидкостей с разной стратификацией. Обозначения на рис. 3 соответствуют обозначениям, введенным на рис. 2. Литерами (9) и (10) помечены линии, отмечающие минимум фазовой и групповой скоростей соответственно.

Из рис. 2 и 3 видно, что существует два характерных значения скорости: минимальное значение фазовой скорости  $C_{ph}^{\min}$  и минимальное значение групповой скорости волн  $C_{gr}^{\min}$ .



**Рис. 2.** Зависимость фазовой (пунктирные линии) и групповой (сплошные линии) скоростей от частоты волнового движения.



Рис. 3. Зависимость фазовой (пунктирная линия) и групповой (сплошная линия) скорости от длины волны.

Также интерес представляет значение частоты  $f_{\pm}$  (длины волны  $\lambda_{\pm}$ ), при которой фазовая и групповая скорость сравниваются. Для жидкости, для которой были выполнены построения ( $\sigma = 72$  дин/см,  $\rho_{00} = 1$  г/см<sup>3</sup>, g = 981 см/с<sup>2</sup>) эти особенные значения совпадают и для однородной и для стратифицированной жидкости. Своего минимального значения  $C_{ph}^{\min} = 23.06$  см/с фазовая скорость достигает при значениях частоты  $f_{ph}^{\min} = 13.5$  Гц и длины волны  $\lambda_{ph}^{\min} = 1.7$  см. Минимальная групповая скорость  $C_{gr}^{\min} = 17.7$  см/с достигается при значениях частоты  $f_{gr}^{\min} = 4.3$  см. Интересно, что групповая и фазо-

вая скорости сравниваются при характерном значении частоты  $f_{=} = f_{ph}^{\min} = 13.5 \ \Gamma$ ц и длины волны  $\lambda_{=} = \lambda_{ph}^{\min} = 1.7 \ cm$  и принимают значение  $C_{ph}^{=} = C_{gr}^{=} = C_{ph}^{\min} = 23.06 \ cm/c$ .

В эксперименте значительные отличия в скорости распространения фазового фронта и группы волн стоит ожидать на таких длинах волн, значения которых сопоставимы с масштабом стратификации А. С увеличением длины волны различия должны быть более заметны и существенны. При малых длинах волн по сравнению с масштабом стратификации последняя незаметна для волнового движения и в таких моделях жидкость можно считать однородной, что существенно упрощает расчеты.

#### выводы

Проведен анализ распространения поверхностных волн в идеальной экспоненциально стратифицированной несжимаемой жидкости в плоской постановке в физически наблюдаемых переменных.

Показано, что при достижении длиной волны значений порядка масштаба стратификации жидкость ведет себя как однородная. С приближением частоты к частоте плавучести перенос энергии уменьшается: групповая скорость поверхностных волн стремится к нулю, а фазовая – к бесконечности.

В случае инфинитезимальных возмущений стратифицированной жидкости со свободной поверхностью получено: поверхностные и внутренние волны существуют в различных частотных областях. Геометрия распространения внутренних волн обеспечивает снижение интенсивности поверхностных возмущений с частотами, меньшими частоты плавучести.

## Приложение А

В приближении Буссинеска второе уравнение системы (2) с учетом принятой функции распределения плотности (1) запишется следующим образом:

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla P}{\rho_{00}} + (1 + r(z) + s(x, z, t)) \mathbf{g}.$$
 (A.1)

В линейном приближении уравнение (A.1) по компонентам запишется:

$$\begin{cases} \partial_t u = -\partial_x P / \rho_{00} \\ \partial_t w = -\partial_z P / \rho_{00} - (r(z) + s(x, z, t)) g. \end{cases}$$
(A.2)

Стоит отметить, что в выражении (А.2) отсутствуют компоненты давления, отвечающие за гидростатическое давление столба жидкости постоянной плотности  $\rho_{00}$ . Запишем компоненты скорости через функцию тока  $\psi$  и произведем дифференцирование верхнего уравнения системы (А.2) по координате *z*, а нижнего уравнения — по координате *x*:

$$\begin{cases} \partial_{tzz} \Psi = -\partial_{xz} P / \rho_{00} \\ -\partial_{txx} \Psi = -\partial_{xz} P / \rho_{00} - g \partial_x s. \end{cases}$$
(A.3)

Вычтем из верхнего уравнения нижнее и получим уравнение, связывающее функцию тока  $\psi$  и возмущение плотности *s*:

$$-g\partial_x s + \partial_t \Delta \psi = 0. \tag{A.4}$$

Уравнение неразрывности с учетом принятых предположений и обозначений перепишется в виде:

$$\rho_{00}\partial_t s + \rho_{00} \left(1 + r + s\right) \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla\rho = 0.$$
 (A.5)

С учетом введения функции тока:

div
$$\mathbf{u} = \partial_x u + \partial_z w = \partial_{xz} \psi - \partial_{zx} \psi = 0,$$
 (A.6)

уравнение неразрывности перепишется:

$$\partial_t s + \partial_z \psi \partial_x s - \partial_x \psi (\partial_z r + \partial_z s) = 0.$$
 (A.7)

И в линейном приближении справедливо:

$$\partial_t s - \partial_x \psi \partial_z r = 0. \tag{A.8}$$

Продифференцируем уравнение (A.4) по времени, уравнение (A.8) — по переменной x и домножим последнее на g и сложим результаты:

$$\partial_{tt}\Delta \Psi - g\partial_{xx}\Psi \partial_z r = 0. \tag{A.9}$$

Для случая экспоненциальной стратификации уравнение (А.9) можно записать в явном виде:

$$\partial_{tt}\Delta\psi + \partial_{xx}\psi\exp(-z/\Lambda)g/\Lambda = 0.$$
 (A.10)

С точностью до принятых в работе обозначений уравнение (А.10) совпадает с уравнением (3) в основном тексте работы.

Кроме того, можно показать, что решение линеаризованной задачи (7), (14) обнуляет нелинейный член  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$  в уравнении Эйлера в системе (2). Действительно, подстановка и (7) и (14) в  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$  дает:

$$u\partial_{x}u + w\partial_{z}u = \partial_{z}\psi\partial_{xz}\psi - \partial_{x}\psi\partial_{zz}\psi = 0,$$
  

$$u\partial_{x}w + w\partial_{z}w = -\partial_{z}\psi\partial_{xx}\psi + \partial_{x}\psi\partial_{xz}\psi = 0.$$
(A.11)

Следовательно, можно утверждать, что решение линеаризованной задачи удовлетворяет полной нелинейной системе (2) в данной постановке задачи.

Приложение Б

Первый корень дисперсионного уравнения (13) принимает вид:

$$k_{z} = \frac{2 \times 3^{1/3} \left(1 - \omega^{2}\right) + 2^{1/3} \omega^{2} \left(\frac{9 \varepsilon \left(1 - \omega^{2}\right)^{2}}{\omega^{2}} + \sqrt{3} \sqrt{\frac{\left(\omega^{2} - 1\right)^{3} \left(4 + 27 \varepsilon^{2} \omega^{2} \left(\omega^{2} - 1\right)\right)}{\omega^{6}}}\right)^{2/3}}{6^{2/3} \omega^{2} \left(\frac{9 \varepsilon \left(1 - \omega^{2}\right)^{2}}{\omega^{2}} + \sqrt{3} \sqrt{\frac{\left(\omega^{2} - 1\right)^{3} \left(4 + 27 \varepsilon^{2} \omega^{2} \left(\omega^{2} - 1\right)\right)}{\omega^{6}}}\right)^{1/3}}{\omega^{6}}.$$
(Б.1)

Для поверхностных волн  $\omega > 1$  выражение в знаменателе всегда положительно. Первое слагаемое в числителе отрицательно, а второе — положительно. Если пренебречь малыми слагаемыми, содержащими  $\varepsilon$  (которые вносят положительный вклад), то получим выражение, совпадающее с аналогичным для идеальной однородной жидкости:

$$2 \times 3^{1/3} \left(1 - \omega^2\right) + 2^{1/3} \omega^2 \left(\sqrt{3} \sqrt{\frac{\left(\omega^2 - 1\right)^3 4}{\omega^6}}\right)^{2/3}$$
. (Б.2)

Сравнивая отрицательное и положительное слагаемые можно увидеть, что они равны друг другу только при  $\omega = 1$ . Учет стратификации жидкости приводит только к увеличению модулю положительного слагаемого.

Два оставшихся корня комплексно сопряженные и выглядят следующим образом:

$$k_{z} = \frac{2 \times 3^{1/3} \left(\omega^{2} - 1\right) - 2^{1/3} \omega^{2} \left(\frac{9 \varepsilon \left(1 - \omega^{2}\right)^{2}}{\omega^{2}} + \sqrt{3} \sqrt{\frac{\left(\omega^{2} - 1\right)^{3} \left(4 + 27 \varepsilon^{2} \omega^{2} \left(\omega^{2} - 1\right)\right)}{\omega^{6}}}\right)^{2/3}}{2 \times 6^{2/3} \omega^{2} \left(\frac{9 \varepsilon \left(1 - \omega^{2}\right)^{2}}{\omega^{2}} + \sqrt{3} \sqrt{\frac{\left(\omega^{2} - 1\right)^{3} \left(4 + 27 \varepsilon^{2} \omega^{2} \left(\omega^{2} - 1\right)\right)}{\omega^{6}}}\right)^{1/3}}{\omega^{6}} \pm i \frac{2 \times 3^{5/6} \left(\omega^{2} - 1\right) + 2^{1/3} \sqrt{3} \omega^{2} \left(\frac{9 \varepsilon \left(1 - \omega^{2}\right)^{2}}{\omega^{2}} + \sqrt{3} \sqrt{\frac{\left(\omega^{2} - 1\right)^{3} \left(4 + 27 \varepsilon^{2} \omega^{2} \left(\omega^{2} - 1\right)\right)}{\omega^{6}}}\right)^{2/3}}{2 \times 6^{2/3} \omega^{2} \left(\frac{9 \varepsilon \left(1 - \omega^{2}\right)^{2}}{\omega^{2}} + \sqrt{3} \sqrt{\frac{\left(\omega^{2} - 1\right)^{3} \left(4 + 27 \varepsilon^{2} \omega^{2} \left(\omega^{2} - 1\right)\right)}{\omega^{6}}}\right)^{1/3}}.$$
(Б.3)

Видно, что действительная часть комплексно сопряженных корней с точностью до множителя

 $-\frac{1}{2}$  совпадает с первым корнем.

Условие физической реализации корней дисперсионных соотношений возникает из-за необходимости затухания движения с глубиной:

$$\operatorname{Re}(k_z) > 0, \tag{b.4}$$

и существования компонент в волновом векторе, отвечающих за волновое движение:

$$\operatorname{Im}(k_z) \neq 0, \tag{B.5}$$

и/или

$$\operatorname{Re}(k_x) \neq 0. \tag{b.6}$$

Условию (Б.4) удовлетворяет только корень (Б.1). Причем для поверхностных волн это условие выполняется как для волн с частотой больше частоты плавучести (в безразмерных переменных  $\omega > 1$ ) так и для волн с частотой меньше частоты плавучести ( $\omega < 1$ ).

Для поверхностных волн связь между компонентами  $k_x$  и  $k_z$  в безразмерном виде выглядит следующим образом:

ИЗВЕСТИЯ РАН. ФИЗИКА АТМОСФЕРЫ И ОКЕАНА том 58 № 5 2022

$$k_x = k_z \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^2 - 1}}.$$
 (Б.7)

и для волн с частотой больше частоты плавучести

$$\operatorname{Re}(k_{x}) = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^{2} - 1}} \operatorname{Re}(k_{z}) > 0, \qquad (5.8)$$

а для волн с частотой меньше частоты плавучести справедливо:

$$\operatorname{Re}(k_{x}) = \frac{\omega}{\sqrt{1-\omega^{2}}}\operatorname{Im}(k_{z}).$$
(5.9)

Для реальных жидкостей  $\varepsilon \ll 1$  и если выполнить разложение в ряд по малому параметру  $\varepsilon$  выражение (Б.1), то как минимум до слагаемых 20 порядка малости в компоненте волнового числа  $k_z$  не обнаруживается мнимой составляющей. Исходя из выражений (Б.9) и условий физической реализации корней дисперсионного уравнения (Б.4) — (Б.6) можно утверждать, что для поверхностных волн физически реализуем только один корень (Б.1) в области частот больших, чем частота плавучести.

#### БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-19-00598 "Гидродинамика и энергетика капли и капельных струй: формирование, движение, распад, взаимодействие с контактной поверхностью", https://rscf.ru/project/19-19-00598/).

Авторы благодарны неизвестному члену редакционной коллегии журнала за ценные замечания

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Лэмб Г. Гидродинамика. М.-Л.: ГИТТЛ, 1949. 928 с.
- Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе И.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. І М.: Государственное Издательство Физико-математической литературы, 1963. 585 с.
- 3. *Thomson W.* Hydrokinetic solutions and observations // Phil. Mag. 1871. V. 42. P. 362–377.
- 4. *Stokes G.G.* On the theory of oscillatory waves // Trans. Cambridge Phil. Soc. 1847. V. 8. P. 441–455.
- Rayleigh (Lord). Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density // Proc. London Math. Soc. 1882. V. s1–14, Is. 1. P. 170–177.
- Väisälä V. Uber die Wirkung der Windschwankungen auf die Pilotbeoachtungen // Soc. Sci. Fenn. Commentat. Phys.-Math. 1925. V. 2. P. 19–37.
- Brunt D. The period of simple vertical oscillations in the atmosphere // Quart. J.Roy. Meteorol. Soc. 1927. V. 53. P. 30–32.
- *Прандтль Л.* Гидроаэромеханика. М.: ИИЛ, 1951. 576 с

- 9. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.
- 10. Чашечкин Ю.Д. Перенос вещества окрашенной капли в слое жидкости с бегущими плоскими гравитационно-капиллярными волнами // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2022. Т. 58. № 2. С. 218–229.
- Lautenbacher C. Gravity wave refraction by islands // J. Fluid Mech.anics, 1970. V. 41(3), P. 655–672.
- Miles J. On surface-wave diffraction by a trench // J. Fluid Mech. 1982 V. 115. P. 315–325.
- Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны М: Мир. 1977.
- Гаврилов Н.М., Попов А.А. Моделирование сезонных изменений интенсивности внутренних гравитационных волн в нижней термосфере // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2022. Т. 58. № 1. С. 79–91.
- 15. *Kinsman B.* Wind waves. New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs. USA. 1965. 676 p.
- 16. *Holthuijsen L.H.* Waves in oceanic and coastal waters. Cambridge: CUP. 2007. 388 p.
- 17. Потапов И.И., Силакова Ю.Г. О развитии волновых возмущений донной поверхности в реках и каналах // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2021. Т. 57. № 2. С. 212–217.
- Hung L.-P., Tsa W.-T. The formation of parasitic capillary ripples on gravity—capillary waves and the underlying vortical structures // J. Phys. Oceanogr. 2009. V. 39. Iss. 2. P. 263–269.
- Кистович А.В., Чашечкин Ю.Д. Поверхностные колебания свободно падающей капли идеальной жидкости // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2018. Т. 54. № 2. С. 206–212.
- 20. Федоров К.Н. Тонкая техмохалинная структура океана. Л-д, Гидрометеоиздат. 1976. 184 с.
- 21. *Thorpe S.A.* The turbulent ocean. Cambridge University Press, 2005.
- Chashechkin Y.D. Foundations of Engineering Mathematics Applied for Fluid Flows // Axioms. 2021. V. 10(4). 286.
- Кистович Ю.В., Чашечкин Ю.Д. Линейная теория распространения пучков внутренних волн в произвольно стратифицированной жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 1998. Т. 39. № 5. С. 88–98. https://doi.org/10.1007/BF02468043
- 24. *Munk W.H.* Long ocean waves // In: The Sea: Ideas and observations on progress in the study of the Sea. N.Y. J. Wiley. 1962. P. 647–663.
- de Bruijn N.G. Asymptotic methods in analysis. Amsterdam. North–Holland Publishers.1958. де Брёйн Н.Г. Асимптотические методы в анализе. М.: ИИЛ. 1961. 247 с.
- 26. Froman N., Froman P.O. JWKB approximation. Contribution to the theory. Amsterdam. North-Holland Publishers. 1965. Фрёман Н., Фрёман П.У. ВКБприближение. М.: ИИЛ. 1967. 168 с.
- 27. Nayfeh A. H. Introduction to perturbation techniques. A Wiley-Interscience Publication. 1981. *Найфэ А*. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984, 535 с.

# Two-Dimensional Periodic Waves in an Inviscid Continuously Stratified Fluid

A. A. Ochirov<sup>1, \*</sup> and Yu. D. Chashechkin<sup>2, \*\*</sup>

<sup>1</sup>P.G. Demidov Yaroslavl State University, Sovetskaya Str. 14, Yaroslavl, 150003 Russia <sup>2</sup>Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Prospekt Vernadskogo 101-1, Moscow, 119526 Russia \*e-mail: otchirov@mail.ru \*\*e-mail: yulidch@gmail.com

The propagation of two-dimensional periodic waves in an inviscid continuously stratified liquid with a free surface in the frequency range from  $10^{-4}$  to  $5 \times 10^{2}$  Hz is investigated. Dispersion relations are given, as well as expressions for phase and group velocities for surface and internal waves in physically observable variables. It is shown that when the wavelength reaches values of the order of the stratification scale, the liquid behaves as homogeneous. As the wave frequency approaches the buoyancy frequency, the energy transfer rate decreases: the group velocity of surface waves tends to zero, and the phase velocity tends to infinity. In the case of infinitesimal perturbations of a stratified fluid with a free surface, surface and internal waves exist in separated frequency intervals.

Keywords: surface waves, internal waves, stratified liquid