ИЗВЕСТИЯ РАН. ФИЗИКА АТМОСФЕРЫ И ОКЕАНА, 2022, том 58, № 5, с. 493–503

УДК 551.513: 556.013: 519.6

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О КВАЗИГЕОСТРОФИЧЕСКОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ В ДВУХСЛОЙНОМ ОКЕАНЕ

© 2022 г. В. Б. Залесный*

Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН, ул. Губкина, 8, Москва, 119333 Россия

**e-mail: vzalesny@yandex.ru*

Поступила в редакцию 09.03.2022 г.
После доработки 29.04.2022 г.
Принята к публикации 09.06.2022 г.

Рассматривается новая вариационная постановка и метод решения задачи квазигеострофической динамики в двухслойном периодическом канале. Область имитирует лежащую в Южном океане зону Антарктического кругового течения. Особенностью задачи является двусвязность области ее решения (периодичность по широте). Используя разложение в ряды Фурье, задача сводится к нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) по времени. Двусвязность области приводит к тому, что вместе с решением ОДУ требуется выполнить стационарное интегральное соотношение, определяющее полный расход течения. Предлагается вариационный численный алгоритм решения задачи, близкий к технике четырехмерного усвоения данных (4DVAR). Основой функции ценности является стационарное интегральное соотношение. С помощью серии вычислительных экспериментов изучаются стационарные режимы течений, зависящие от модельных параметров. Расчеты показывают, что наличие в рельефе дна высоких гармоник может вызывать формирование противотечения в нижнем слое. Противотечение устойчиво к небольшим вариациям возмущений рельефа и коэффициента турбулентной вязкости.

Ключевые слова: квазигеострофическая циркуляция, двухслойная модель океана, вариационный метод, 4DVAR алгоритм, стационарный режим течений

DOI: 10.31857/S0002351522050133

ВВЕДЕНИЕ

Квазигеострофические модели циркуляции в атмосфере и океане активно используются и развиваются на протяжении многих лет [1–13]. Можно выделить основные направления их развития. Это – математические вопросы, включая существование и единственность классических решений и задач ассимиляции данных [3–7]; методы исследования и оценка аттракторов атмосферной и океанической динамики [2, 3, 7, 9, 10], [6]; разработка численных алгоритмов [2, 6, 13]; исследование физических свойств их решений [8, 11, 12]. Во всех указанных направлениях получен ряд интересных результатов.

Данная работа является продолжением исследований [11, 12], развивая постановку задачи на нестационарный случай и двухслойный океан. Акцент делается не на параметризациях, а на новом вариационном методе решения задачи. Основная цель работы связана с построением эффективного численного алгоритма решения уравнений квазигеострофической динамики в двухслойном периодическом канале, имитирующем зону Антарктического кругового течения (АКТ). Математическая особенность задачи связана с тем, что область ее решения – двусвязная. Это приводит к тому, что вместе с эволюционной системой уравнений требуется выполнить стационарное интегральное соотношение. Рассматривается новый алгоритм, основанный на вариационном подходе, связанном с техникой сопряженных уравнений [2, 14–18]. С помощью серии вычислительных экспериментов изучаются некоторые стационарные режимы квазигеострофических течений, возникающие при различных модельных параметрах.

1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим двухслойную квазигеострофическую модель течений в периодическом канале, параллельном оси Ox [11, 12]. Система уравнений в верхнем 1-м и 2-м нижнем слое с граничными и начальными условиями имеет вид

$$\frac{\partial q_1}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(u_1q_1-k_1\frac{\partial q_1}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(v_1q_1-k_1\frac{\partial q_1}{\partial y}\right)-$$
$$-\mu_1\Delta\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}-\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)=\frac{1}{H_1}\left(\frac{\partial\tau_y}{\partial x}-\frac{\partial\tau_x}{\partial y}\right), \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(u_2q_2-k_2\frac{\partial q_2}{\partial x}\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(v_2q_2-k_2\frac{\partial q_2}{\partial y}\right)+(r-\mu_2\Delta)\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)=0, \quad (1.2)$$

$$q_i\big|_{x=0}=q_i\big|_{x=L_x},\quad \frac{\partial q_i}{\partial x}\bigg|_{x=0}=\frac{\partial q_i}{\partial x}\bigg|_{x=L_x},\quad i=1,2, \quad (1.3)$$

$$v_iq_i-k_i\frac{\partial q_i}{\partial y}=0 \text{ при } y=0,L, \quad (1.4)$$

$$q_i=q_i^0 \text{ при } t=0. \quad (1.5)$$

Здесь q_i – квазигеострофический вихрь (КГВ) в i-ом слое, u_i, v_i – компоненты скорости, ψ_i – функции тока, k_i, μ_i, r – параметры турбулентного обмена и придонного трения, H_i – глубины слоев, τ_x, τ_y – компоненты ветра по осям Ox, Oy.

2. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть компоненты трения ветра на поверхности океана заданы следующим образом

$$\tau_x=\tau_0\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right),\quad \tau_y=0. \quad (2.1)$$

Следуя [8, 11, 12], будем искать частное решение задачи (1.1)–(1.5) в виде

$$\psi_i=-U_iy+\Phi_i(x)\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right), \quad (2.2)$$

$$u_i\equiv-(\psi_i)_y=U_i-\frac{\pi}{L}\cos\left(\frac{\pi y}{L}\right)\Phi_i(x), \quad (2.3)$$

$$v_i\equiv(\psi_i)_x=\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)\Phi_{ix}(x), \quad (2.4)$$

$$q_1=\Delta\psi_1+(f_0+\beta y)-\frac{f_0^2}{g'H_1}(\psi_1-\psi_2), \quad (2.5)$$

$$q_2=\Delta\psi_2+(f_0+\beta y)+\frac{f_0^2}{g'H_2}(\psi_1-\psi_2)+\frac{f_0}{H_2}B, \quad (2.6)$$

$$B=\sin(\pi y/L)h(x),\quad g'=g\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_0}. \quad (2.7)$$

Подставим (2.1)–(2.4) в (1.1)–(1.2) и проинтегрируем уравнения с учетом граничных условий (1.4) по y от 0 до L. После преобразований получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\Phi_{1xx}-\frac{\pi^2}{L^2}\Phi_1-\frac{\alpha}{H_1}(\Phi_1-\Phi_2)\right]+$$
$$+\left[\Phi_{1xx}-\frac{\pi^2}{L^2}\Phi_1-\frac{\alpha}{H_1}(\Phi_1-\Phi_2)\right]_xU_1+$$
$$+\left[\beta+\frac{\alpha(U_1-U_2)}{H_1}\right]\Phi_{1x}- \quad (2.8)$$
$$-k_1\left[\Phi_{1xx}-\frac{\pi^2}{L^2}\Phi_1-\frac{\alpha}{H_1}(\Phi_1-\Phi_2)\right]_{xx}-$$
$$-\mu_1\Delta\left(\Phi_{1xx}-\frac{\pi^2}{L^2}\Phi_1\right)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\Phi_{2xx}-\frac{\pi^2}{L^2}\Phi_2+\frac{\alpha}{H_2}(\Phi_1-\Phi_2)\right]+$$
$$+\left[\Phi_{2xx}-\frac{\pi^2}{L^2}\Phi_2+\frac{\alpha}{H_2}(\Phi_1-\Phi_2)+\frac{f_0h}{H_2}\right]_xU_2+$$
$$+\left[\beta-\frac{\alpha(U_1-U_2)}{H_2}\right]\Phi_{2x}- \quad (2.9)$$
$$-k_2\left[\Phi_{2xx}-\frac{\pi^2}{L^2}\Phi_2+\frac{\alpha}{H_2}(\Phi_1-\Phi_2)+\frac{f_0h}{H_2}\right]_{xx}+$$
$$+(r-\mu_2\Delta)\left(\Phi_{2xx}-\frac{\pi^2}{L^2}\Phi_2\right)=0.$$

Умножим (1.1), (1.2) на $\cos(\pi y/L)$ и проинтегрируем их вначале по y, а затем по x. Получим

$$\frac{\gamma}{2}\frac{\partial(U_1-U_2)}{\partial t}-2\alpha(\Phi_{1x},\Phi_2)+$$
$$+3L_xk_1\alpha(U_1-U_2)=f_1, \quad (2.10)$$

$$\frac{\gamma}{2}\frac{\partial(U_1-U_2)}{\partial t}-2(\alpha\Phi_{1x}+f_0h_x,\Phi_2)+$$
$$+3L_xk_2\alpha(U_1-U_2)=f_2, \quad (2.11)$$

$$f_1=\left(\frac{3\tau_0\pi}{4}-3k_1\beta H_1\right)L_x,\quad f_2=3L_xk_2\beta H_2,$$
$$\gamma=\frac{3L_xL^2\alpha}{\pi^2},\quad \alpha=f_0^2/g', \quad (2.12)$$

$$(\varphi_1,\varphi_2)\equiv\int_0^{L_x}\varphi_1\varphi_2dx. \quad (2.13)$$

Замечание. Использование параметризации крупномасштабного турбулентного обмена со вторыми производными требует дополнительного граничного условия для q_i на твердых стенках при $y=0$, L. Естественными (в вариационном смысле) условиями будет обращение в ноль потоков q_i по нормали вида (1.4). Учитывая кинематические условия $v_1=0$, $v_2=0$, выполнение (1.4) возможно, например, если положить $k_i=0$. Вопрос постановки данного краевого условия обсуждается в [12].

3. ФОРМУЛИРОВКА УРАВНЕНИЙ В ТЕРМИНАХ $V_1 = (U_1 + U_2)/2$, $V_2 = (U_1 - U_2)/2$

Введем новые переменные

$$V_1 = (U_1 + U_2)/2, \quad V_2 = (U_1 - U_2)/2,$$

и перепишем уравнения (2.8)–(2.11) с учетом соотношений

$$U_1 = V_1 + V_2, \quad U_2 = V_1 - V_2.$$

Получим

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial}{\partial t} + V_1\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[H_1\left(\Phi_{1xx} - \frac{\pi^2}{L^2}\Phi_1\right) - \alpha(\Phi_1 - \Phi_2)\right] + \\ + \left[H_1\left(\Phi_{1xx} - \frac{\pi^2}{L^2}\Phi_1\right) - \alpha(\Phi_1 - \Phi_2)\right]_x V_2 + \\ + (\beta H_1 + 2\alpha V_2)\Phi_{1x} - \\ - k_1\left[H_1\left(\Phi_{1xx} - \frac{\pi^2}{L^2}\Phi_1\right) - \alpha(\Phi_1 - \Phi_2)\right]_{xx} + \\ + H_1\tilde{\mu}_1\left(\Phi_{1xx} - \frac{\pi^2}{L^2}\Phi_1\right) = 0,\end{gathered} \tag{3.1}$$

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial}{\partial t} + V_1\frac{\partial}{\partial x}\right)\times \\ \times\left[H_2\left(\Phi_{2xx} - \frac{\pi^2}{L^2}\Phi_2\right) + \alpha(\Phi_1 - \Phi_2) + f_0 h\right] - \\ - \left[H_2\left(\Phi_{2xx} - \frac{\pi^2}{L^2}\Phi_2\right) + \alpha(\Phi_1 - \Phi_2) + f_0 h\right]_x V_2 + \\ + (\beta H_2 - 2\alpha V_2)\Phi_{2x} - \\ - k_2\left[H_2\left(\Phi_{2xx} - \frac{\pi^2}{L^2}\Phi_2\right) + \alpha(\Phi_1 - \Phi_2) + f_0 h\right]_{xx} + \\ + H_2(r + \tilde{\mu}_2)\left(\Phi_{2xx} - \frac{\pi^2}{L^2}\Phi_2\right) = 0,\end{gathered} \tag{3.2}$$

$$\begin{gathered}-\frac{3L^2\alpha}{\pi^2}\frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{2\alpha}{L_x}(\Phi_{1x}, \Phi_2) - 6k_1\alpha V_2 = \\ = -3\left(\frac{\tau_0\pi}{4} - k_1\beta H_1\right),\end{gathered} \tag{3.3}$$

$$\begin{gathered}\frac{f_0}{L_x}(h_x, \Phi_2) - 3(k_2 - k_1)\alpha V_2 = \\ = \frac{3}{2}\left[\frac{\pi\tau_0}{4} - \beta(k_1 H_1 + k_2 H_2)\right],\end{gathered} \tag{3.4}$$

$$\tilde{\mu}_i = \mu_i\left(N^2 + \pi^2/L^2\right), \quad i = 1, 2.$$

Интегральное соотношение (3.4) есть разность (2.10)–(2.11).

Закон сохранения. Умножим (3.1)–(3.2), соответственно на Φ_1, Φ_2, проинтегрируем их по замкнутому контуру x от 0 до L_x и добавим соотношения (3.3), (3.4) умноженные, соответственно на V_2, $(V_1 - V_2)$. Складывая все уравнения, получим энергетическое соотношение

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{L_x}\left[H_1\left(\Phi_{1x}^2 + \frac{\pi^2}{L^2}\Phi_1^2\right) + H_2\left(\Phi_{2x}^2 + \frac{\pi^2}{L^2}\Phi_2^2\right) + \right. \\ \left. + \alpha(\Phi_1 - \Phi_2)^2 + \frac{3\alpha L^2}{\pi^2}V_2^2\right]dx = \\ = -\int_0^{L_x}\left[H_1 k_1\left(\Phi_{1xx}^2 + \frac{\pi^2}{L^2}\Phi_{1x}^2\right) + H_2 k_2\left(\Phi_{2xx}^2 + \frac{\pi^2}{L^2}\Phi_{2x}^2\right) + \right. \\ \left. + \alpha\left(k_1\Phi_{1x}^2 + (k_1 + k_2)\Phi_{1x}\Phi_{2x} + k_2\Phi_{2x}^2\right)\right]dx - \\ - \int_0^{L_x}\left[H_1\tilde{\mu}_1\left(\Phi_{1x}^2 + \frac{\pi^2}{L^2}\Phi_1^2\right) + H_2(r + \tilde{\mu}_2)\times\right. \\ \left.\times\left(\Phi_{2x}^2 + \frac{\pi^2}{L^2}\Phi_2^2\right) + 6k_1\alpha V_2^2\right]dx - \\ - 3(k_2 - k_1)\alpha\int_0^{L_x} V_2(V_1 - V_2)dx.\end{gathered}$$

Отсюда при $\mu_i = 0$, $\nu = 0$, $k_1 = k_2 = 0$ следует закон сохранения

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{L_x}\left[H_1\left(\Phi_{1x}^2 + \frac{\pi^2}{L^2}\Phi_1^2\right) + H_2\left(\Phi_{2x}^2 + \frac{\pi^2}{L^2}\Phi_2^2\right) + \right. \\ \left. + \alpha(\Phi_1 - \Phi_2)^2 + \frac{3\alpha L^2}{\pi^2}V_2^2\right]dx = 0.\end{gathered} \tag{3.5}$$

4. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ. ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Будем искать решение (3.1)–(3.4) методом Галеркина, разлагая все функции от x в ряды Фурье по полной ортогональной системе $\{\sin(2n\pi x/L_x), \cos(2n\pi x/L_x)\}$:

$$\begin{gathered}\Phi_i = \sum_n a_n^{(i)}(t)\cos(Nx) + \\ + \sum_n b_n^{(i)}(t)\sin(Nx), \quad i = 1, 2,\end{gathered} \tag{4.1}$$

$$\begin{gathered}h = \sum_n c_n\cos(Nx) + \sum_n d_n\sin(Nx), \\ N = 2n\pi/L_x, n = 1, 2, 3, \ldots\end{gathered} \tag{4.2}$$

Подставим (4.1)–(4.2) в (3.1)–(3.4) и умножим уравнения скалярно на базисные функции $\sin(Nx)$, $\cos(Nx)$ для разных n. В силу ортогональности базиса получим после преобразований систему уравнений для коэффициентов разложений $a_n^{(i)}$, $b_n^{(i)}$, c_n, d_n

$$\left(\frac{d}{dt}+k_1N^2\right)\left[\left(H_1s_0+\alpha\right)a_n^{(1)}-\alpha a_n^{(2)}\right]+$$
$$+\left(V_1+V_2\right)N\left[\left(H_1s_0+\alpha\right)b_n^{(1)}-\alpha b_n^{(2)}\right]= \quad (4.3)$$
$$=\left(\beta H_1+2\alpha V_2\right)Nb_n^{(1)}-\mu_1H_1s_0^2a_n^{(1)},$$

$$\left(\frac{d}{dt}+k_1N^2\right)\left[\left(H_1s_0+\alpha\right)b_n^{(1)}-\alpha b_n^{(2)}\right]-$$
$$-\left(V_1+V_2\right)N\left[\left(H_1s_0+\alpha\right)a_n^{(1)}-\alpha a_n^{(2)}\right]= \quad (4.4)$$
$$=-\left(\beta H_1+2\alpha V_2\right)Na_n^{(1)}-\mu_1H_1s_0^2b_n^{(1)},$$

$$\left(\frac{d}{dt}+k_2N^2\right)\left[\left(H_2s_0+\alpha\right)a_n^{(2)}-\alpha a_n^{(1)}-f_0c_n\right]+$$
$$+\left(V_1-V_2\right)N\left[\left(H_2s_0+\alpha\right)b_n^{(2)}-\alpha b_n^{(1)}-f_0d_n\right]= \quad (4.5)$$
$$=\left(\beta H_2-2\alpha V_2\right)Nb_n^{(2)}-H_2s_0\left(r+\mu_2s_0\right)a_n^{(2)},$$

$$\left(\frac{d}{dt}+k_2N^2\right)\left[\left(H_2s_0+\alpha\right)b_n^{(2)}-\alpha b_n^{(1)}-f_0d_n\right]-$$
$$-\left(V_1-V_2\right)N\left[\left(H_2s_0+\alpha\right)a_n^{(2)}-\alpha a_n^{(1)}-f_0c_n\right]= \quad (4.6)$$
$$=-\left(\beta H_2-2\alpha V_2\right)Na_n^{(2)}-H_1s_0\left(r+\mu_2s_0\right)b_n^{(2)}.$$

$$\frac{3\alpha L^2}{\pi}\frac{\partial V_2}{\partial t}+6\alpha k_1V_2=3\left(\frac{\pi\tau_0}{4}-\beta k_1H_1\right)-$$
$$-\alpha\sum_n N\left(a_n^{(1)}b_n^{(2)}-b_n^{(1)}a_n^{(2)}\right), \quad (4.7)$$

$$6\alpha(k_1-k_2)V_2=3\left[\frac{\pi\tau_0}{4}-\beta\left(k_1H_1+k_2H_2\right)\right]+$$
$$+\sum_n Nf_0\left(c_nb_n^{(2)}-d_na_n^{(2)}\right), \quad (4.8)$$

$$s_0=N^2+\pi^2/L^2,\quad s_1=H_1s_0+\alpha,\quad s_2=H_2s_0+\alpha.$$

Таким образом, в результате преобразований исходная задача преобразована к системе шести уравнений (4.3)–(4.8) для шести неизвестных $a_n^{(1)}$, $b_n^{(1)}$, $a_n^{(2)}$, $b_n^{(2)}$, U_1, U_2. Видно, что если U_i заданы, то уравнения (4.3)–(4.6) распадаются на несвязанные подсистемы для отдельной гармоники n. При конечном наборе отличных от нуля коэффициентов $c_n \neq 0$, $d_n \neq 0$ ряды в (4.1)–(4.2) и система уравнений (4.3)–(4.8) конечны.

Итак, задача сведена к решению эволюционных уравнений (4.3)–(4.7) и стационарного интегрального соотношения (4.8). Решением задачи является вектор-функция $\Psi(t) = \left(a_n^{(1)}(t),\, b_n^{(1)}(t),\, a_n^{(2)}(t),\, b_n^{(2)}(t),\, V_2(t)\right)$, и параметр V_1. Особенностью задачи, значительно осложняющей ее численное решение, является отсутствие уравнения для V_1. V_1 является параметром системы (4.3)–(4.7) и его следует подобрать так, чтобы в каждый момент времени выполнялось соотношение (4.8). Переформулируем задачу в виде, используемом при решении задач 4-х мерной вариационной ассимиляции [2, 13–16].

Следуя [2, 15], будем искать такое решение (4.3)–(4.7) с неизвестным параметром V_1, на котором достигается минимум функционала J

$$J=\frac{\lambda}{2}Z^2(t_0)+\frac{1}{2T}\int_{t_0}^{t_0+T}\eta(t)Z^2(t)\,dt\to\min, \quad (4.9)$$
$$Z(t)=f_0\sum_n N\left(a_n^{(2)}d_n-b_n^{(2)}c_n\right)-$$
$$-6(k_2-k_1)\alpha V_2-3\left[\frac{\pi\tau_0}{4}-\beta(k_1H_1+k_2H_2)\right].$$

Здесь $t_0 \le t \le t_0+T$ – отрезок “ассимиляции”, $\eta(t)$ – заданная безразмерная весовая функция (равная единице на интервале ассимиляции и нулю вне его), λ – заданный безразмерный параметр, равный нулю или единице. Таким образом, отрезок “ассимиляции” – это отрезки временной оси, на которых требуется выполнение среднего по времени квадрата интегрального соотношения (4.8). По аналогии с задачей вариационной ассимиляции данных это – отрезок, на котором имеются данные наблюдений. В нашем случае в качестве “данных” выступает величина подынтегрального выражения (4.9). Отметим, что если расход воды или массы задать как

$$U_{brt}^{dat}=\frac{H_1U_1+H_2U_2}{H_1+H_2}\equiv\frac{(H_1+H_2)V_1+(H_1-H_2)V_2}{H_1+H_2},$$
$$U_{brt}=\frac{H_1U_1+H_2U_2}{H_1+H_2},$$

то функционал (4.9) можно выбрать в виде

$$J=\frac{\lambda}{2}Z^2(t_0)+\frac{1}{2T}\int_{t_0}^{t_0+T}\eta(t)Z^2(t)\,dtdt+$$
$$+\frac{\varepsilon}{2}\left[V_1+\frac{H_1-H_2}{H_1+H_2}V_2(t_0)-U_{brt}^{dat}(t_0)\right]^2. \quad (4.10)$$

Здесь третье слагаемое с малым коэффициентом $\varepsilon \ll 1$ играет роль ε – регуляризации вариационной задачи [2, 15, 16]. Ниже в численных экспериментах мы будем ориентироваться на расчет установившихся решений, для которых при больших временах ($t\to\infty$) выполняются стационарные аналоги уравнений (4.3)–(4.7).

5. СОПРЯЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ. МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Используя известную технику [2, 15–18], решение вариационной задачи (4.3)–(4.7), (4.9) можно свести к решению системы прямых и сопряженных уравнений, часто называемой системой оптимальности.

Перепишем (4.3)–(4.7), (4.9) в матричном виде

$$\frac{d}{dt}B\Psi(t)+A\Psi(t)=F,$$
$$\Psi(t_0)=\Psi_0\equiv\left(a_n^{(1)}(t_0),b_n^{(1)}(t_0),a_n^{(2)}(t_0),b_n^{(2)}(t_0),V_2(t_0)\right),$$

где A, B – квадратные матрицы, $\Psi(t)$ – вектор-решение, F – вектор правой части. Введем в рассмотрение расширенный функционал (или лагранжиан) L и скалярное произведение

$$L=J-\left(\frac{d}{dt}B\Psi+A\Psi-F,\Psi^*\right),\quad(\varphi,\psi)=\int\limits_t^{t+T}\varphi\psi dt.$$

Используя необходимое условие оптимальности, приравняем производные от лагранжиана по $\Psi(t)$, $\Psi(t_0)$, $\Psi(t_0+T)$, V_1 к нулю. После преобразований получаем систему сопряженных уравнений, а также начальные и конечные условия для $\Psi^*(t)$ (см., например, [2]). Система оптимальности имеет вид.

Прямые уравнения

$$\begin{gathered}\left(\frac{d}{dt}+k_1N^2\right)\left[s_1a_n^{(1)}-\alpha a_n^{(2)}\right]+\\+(V_1+V_2)N\left[s_1b_n^{(1)}-\alpha b_n^{(2)}\right]-\\-(\beta H_1+2\alpha V_2)Nb_n^{(1)}+\mu_1H_1s_0^2a_n^{(1)}=0,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\left(\frac{d}{dt}+k_1N^2\right)\left[s_1b_n^{(1)}-\alpha b_n^{(2)}\right]-\\-(V_1+V_2)N\left[s_1a_n^{(1)}-\alpha a_n^{(2)}\right]+\\+(\beta H_1+2\alpha V_2)Na_n^{(1)}+\mu_1H_1s_0^2b_n^{(1)}=0,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\left(\frac{d}{dt}+k_2N^2\right)\left[s_2a_n^{(2)}-\alpha a_n^{(1)}-f_0c_n\right]+\\+(V_1-V_2)N\left[s_2b_n^{(2)}-\alpha b_n^{(1)}-f_0d_n\right]-\\-(\beta H_2-2\alpha V_2)Nb_n^{(2)}+\\+H_2s_0(r+\mu_2s_0)a_n^{(2)}=0,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\left(\frac{d}{dt}+k_2N^2\right)\left[s_2b_n^{(2)}-\alpha b_n^{(1)}-f_0d_n\right]-\\-(V_1-V_2)N\left[s_2a_n^{(2)}-\alpha a_n^{(1)}-f_0c_n\right]+\\+(\beta H_2-2\alpha V_2)Na_n^{(2)}+\\+H_1s_0(r+\mu_2s_0)b_n^{(2)}=0,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\frac{3\alpha L^2}{\pi}\frac{\partial V_2}{\partial t}+6\alpha k_1V_2+\\+\alpha\sum_n N\left(a_n^{(1)}b_n^{(2)}-b_n^{(1)}a_n^{(2)}\right)=3\left(\frac{\pi\tau_0}{4}-\beta k_1H_1\right).\end{gathered}\tag{5.1}$$

Сопряженные уравнения

$$\begin{gathered}-\frac{3\alpha L^2}{\pi}\frac{\partial V_2^*}{\partial t}+6\alpha k_1V_2^*+\\+N\left[(s_1-2\alpha)b_n^{(1)}-\alpha b_n^{(2)}\right]a_n^{*(1)}-\\-N\left[(s_1-2\alpha)a_n^{(1)}-\alpha a_n^{(2)}\right]b_n^{*(1)}-\\-N\left[(s_2-2\alpha)b_n^{(2)}-\alpha b_n^{(1)}-f_0d_n\right]a_n^{*(2)}+\\+N\left[(s_2-2\alpha)a_n^{(2)}-\alpha a_n^{(1)}-f_0c_n\right]b_n^{*(2)}-\\-6(k_2-k_1)\alpha\bar{J}=0,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\left[\left(-\frac{d}{dt}+k_1N^2\right)s_1+\mu_1H_1s_0^2\right]a_n^{*(1)}-\\-N\left[(V_1+V_2)s_1-(\beta H_1+2\alpha V_2)\right]b_n^{*(1)}-\\-\alpha\left(-\frac{d}{dt}+k_2N^2\right)a_n^{*(2)}+\\+\alpha(V_1-V_2)Nb_n^{*(2)}+\alpha\sum_n Nb_n^{(2)}V_2^*=0,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\left[\left(-\frac{d}{dt}+k_1N^2\right)s_1+\mu_1H_1s_0^2\right]b_n^{*(1)}+\\+N\left[(V_1+V_2)s_1-(\beta H_1+2\alpha V_2)\right]a_n^{*(1)}-\\-\alpha\left(-\frac{d}{dt}+k_2N^2\right)b_n^{*(2)}-\\-\alpha(V_1-V_2)Na_n^{*(2)}-\alpha\sum_n Na_n^{(2)}V_2^*=0,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\left[\left(-\frac{d}{dt}+k_2N^2\right)s_2+H_2s_0(r+\mu_2s_0)\right]a_n^{*(2)}-\\-N\left[(V_1-V_2)s_2-(\beta H_2-2\alpha V_2)\right]b_n^{*(2)}-\\-\alpha\left(-\frac{d}{dt}+k_1N^2\right)a_n^{*(1)}+\alpha(V_1+V_2)Nb_n^{*(1)}-\\-\alpha\sum_n Nb_n^{(1)}V_2^*=f_0\eta\left(\sum_n Nd_n\right)\bar{J},\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\left[\left(-\frac{d}{dt}+k_2N^2\right)s_2+H_1s_0(r+\mu_2s_0)\right]b_n^{*(2)}-\\-\alpha(V_1+V_2)Na_n^{*(1)}-\alpha\left(-\frac{d}{dt}+k_1N^2\right)b_n^{*(1)}+\\+N\left[(V_1-V_2)s_2-(\beta H_2-2\alpha V_2)\right]a_n^{*(2)}+\\+\alpha\sum_n Na_n^{(1)}V_2^*=-f_0\eta\left(\sum_n Nc_n\right)\bar{J},\end{gathered}\tag{5.2}$$

$$\begin{gathered}\bar{J}=\frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T}\eta\left\{f_0\sum_n N\left(a_n^{(2)}d_n-b_n^{(2)}c_n\right)-\right.\\\left.-6(k_2-k_1)\alpha V_2-3\left[\frac{\pi\tau_0}{4}-\beta(k_1H_1+k_2H_2)\right]\right\}dt.\end{gathered}\tag{5.3}$$

Напомним, что сопряженные уравнения можно получить, умножая прямые уравнения, соот-

ветственно, на $a^{*(1)}_n$, $b^{*(1)}_n$, $a^{*(2)}_n$, $b^{*(2)}_n$, V^*_2, интегрируя их по времени на интервале усвоения от t_0 до $t_0 + T$ и приравнивая нулю производные по $a^{(1)}_n$, $b^{(1)}_n$, $a^{(2)}_n$, $b^{(2)}_n$, V_2. Учет функционала (4.10) приводит к появлению слагаемых в правой части (5.2). В качестве управления выбираются начальные условия для прямой системы $a^{(1)}_n$, $b^{(1)}_n$, $a^{(2)}_n$, $b^{(2)}_n$, V_2 (в момент времени $t = t_0$) и параметр V_1.

Система оптимальности (5.1)–(5.2) решается итерационно на отрезке $(t_0, t_0 + T)$, причем прямые уравнения (5.1) решаются вперед по времени, а сопряженные (5.2) в обратном времени. Решением задачи являются $a^{(1)}_n(t)$, $b^{(1)}_n(t)$, $a^{(2)}_n(t)$, $b^{(2)}_n(t)$, $V_2(t)$, $a^{*(1)}_n(t), b^{*(1)}_n(t), a^{*(2)}_n(t), b^{*(2)}_n(t), V^*_2(t)$, плюс вектор управления $a^{(1)}_n(t_0), b^{(1)}_n(t_0), a^{(2)}_n(t_0), b^{(2)}_n(t_0), V_2(t_0)$, V_1. Управление находится с помощью итерационного процесса: в наших расчетах использован алгоритм M1QN3 [19]. При решении прямой системы (5.1) используются начальные условия при $t = t_0$

$$\begin{gathered} a^{(1)}_n(t) = a^{(1)}_n(t_0),\ b^{(1)}_n(t) = b^{(1)}_n(t_0), \\ a^{(2)}_n(t) = a^{(2)}_n(t_0),\ b^{(2)}_n(t) = b^{(2)}_n(t_0),\ V_2(t) = V_2(t_0). \end{gathered} \tag{5.4}$$

При решении сопряженной системы (5.2) используются нулевые условия при $t = t_0 + T$

$$\begin{gathered} a^{*(1)}_n(t_0 + T) = b^{*(1)}_n(t_0 + T) = a^{*(2)}_n(t_0 + T) = \\ = b^{*(2)}_n(t_0 + T) = V^*_2(t_0 + T) = 0. \end{gathered} \tag{5.5}$$

Правые части в начальных условиях (5.4) (компоненты вектора Ψ_0) зависят от компонент градиента лагранжиана, которые в свою очередь связаны с решением сопряженной системы при $t = t_0$. Нумеруя компоненты производной от лагранжиана $(\partial L)_i$ в соответствии с компонентами $\Psi_0 = \left(a^{(1)}_n(t_0),\ b^{(1)}_n(t_0),\ a^{(2)}_n(t_0),\ b^{(2)}_n(t_0), V_2(t_0), V_1\right)$, получим

$$\begin{gathered} (\partial L)_1 = a^{*(1)}_n(t_0),\quad (\partial L)_2 = b^{*(1)}_n(t_0), \\ (\partial L)_3 = a^{*(2)}_n(t_0) + \lambda f_0 \sum_n N d_n, \\ (\partial L)_4 = b^{*(2)}_n(t_0) - \lambda f_0 \sum_n N c_n, \\ (\partial L)_5 = V^{*(2)}_n(t) + \\ + \varepsilon\left(V_1 + \frac{H_1 - H_2}{H_1 + H_2} V_2 - V_{dat}\right)\frac{H_1 - H_2}{H_1 + H_2}, \end{gathered} \tag{5.6}$$

$$\begin{gathered} (\partial L)_6 = \int_{t_0}^{t_0+T} \Big[\left(s_1 b^{(1)}_n - \alpha b^{(2)}_n\right) a^{*(1)}_n - \left(s_1 a^{(1)}_n - \alpha a^{(2)}_n\right) b^{*(1)}_n + \\ + \left(s_2 b^{(2)}_n - \alpha b^{(1)}_n - f_0 d_n\right) a^{*(2)}_n - \\ - \left(s_2 a^{(2)}_n - \alpha a^{(1)}_n - f_0 c_n\right) b^{*(2)}_n \Big] dt - \\ - \frac{\varepsilon}{N}\left(V_1 + \frac{H_1 - H_2}{H_1 + H_2} V^0_2 - V_{dat}\right). \end{gathered}$$

6. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

Расчеты сделаны для периодического зонального канала, протяженностью $L_x = 4 \times 10^6$ м, шириной $L = 10^6$ м, глубиной слоев $H_1 = 10^3$, $H_2 = 4 \times 10^3$ м (общая глубина $H_1 + H_2 = 5 \times 10^3$ м). Расчетная область имитирует положение Антарктического кругового течения, которое находится в Южном полушарии. В расчетах использовались следующие (либо близкие к ним) параметры

$$\begin{gathered} \tau_0 = 10^{-4} m^2 \sec^{-1},\quad f_0 = -10^{-4} \sec^{-1}, \\ \beta = 1.4 \times 10^{-11} m^{-1} \sec^{-1},\quad L_x = 4 \times 10^6 m, \\ L_y \equiv L = 10^6 m,\quad H_1 = 10^3 m,\quad H_2 = 4 \times 10^3\ m, \\ \mu_1 = \mu_2 = 1 m^2 \sec^{-1},\quad k_1 = 10^3,\quad k_2 = 10^3 m^2 \sec^{-1}, \\ r = 10^{-7} \sec^{-1},\quad \alpha = \frac{f_0^2 \rho}{g \Delta\rho} \approx 10^{-6} m^{-1}, \\ \rho_1 = 10^3(1. + 0.026),\ \rho_2 = 10^3(1. + 0.028)\ \mathrm{kg}\, m^{-1}. \end{gathered} \tag{6.1}$$

Дополнительно укажем значения некоторых величин и параметры рельефа дна:

$$\begin{gathered} N = 2\pi n / L_x,\quad s_0 = N^2 + \pi^2 / L^2, \\ s_i = H_i s_0 + \alpha,\quad B = \sin(\pi y / L)\, h(x), \\ h(x) = \sum_n \left[c_n \cos(2\pi n x / L_x) + d_n \sin(2\pi n x / L_x)\right]. \end{gathered} \tag{6.2}$$

Алгоритм. Процесс решения задачи состоял из двух этапов. На первом этапе решалась прямая система (5.1) с фиксированным V_1 по схеме Кранка-Николсон. Интервал расчета по времени $0 \le t \le t_0 + T$ был достаточно большим. На втором этапе, на небольшом интервале по времени $t_0 \le t \le t_0 + T$, находилось решение системы оптимальности (5.1)–(5.2), (5.4)–(5.5), (4.9), включая параметр V_1. Данная двухэтапная процедура итерационно повторялась до достижения (с заданной точностью) сходимости решения полной задачи. На втором этапе для решения оптимальной задачи использовалась стандартная программа M1QN3 [19]. Полное решение задачи, таким образом, включало решение прямой системы $a^{(1)}_n(t)$, $b^{(1)}_n(t)$, $a^{(2)}_n(t)$, $b^{(2)}_n(t)$, $V_2(t)$ при $t_0 < t \le t_0 + T$, решение сопряженной системы

Таблица 1. Основные входные параметры модели в базовом эксперименте 1

№	c_n	d_n	$k_1 = k_2$	r	$\mu_1 = \mu_2$	n	U_1, U_2 cm/s	V_{ACC}, sv	a_1, b_1,	a_2, b_2	J_0, J_{opt} $\times 10^{10}$
1.1	100	0	10^3	10^{-7}	1	1	23 17	919 ∞	39 114 2257	26 760 1631	1 10^{-7}
1.2	100	0	10^3	10^{-7}	1	2	12 6.5	383 ∞	19 306 1220	8320 815	4×10^{-2} 10^{-9}
1.3	200	0	10^3	10^{-7}	1	1	10 5	290 ∞	30 975 1559	9814 815	0.3 3×10^{-9}
1.4	200	0	10^3	10^{-7}	10^3	1	10 4	264 ∞	29 188 1602	8226 816	0.9 5×10^{-8}
1.5	100	0	10^3	10^{-5}	1	1	12 0.05	339 ∞	1257 4553	408 1631	0.3 10^{-9}
1.6	100	0	10^3	5×10^{-7}	1	1	13 0.06	383 ∞	18 174 3683	7339 1629	0.2 5×10^{-7}
1.7	100 $H_i/5$	0	10^3	10^{-7}	1	1	27 22	232 ∞	235 390 14606	193 813 12284	92 8×10^{-4}

$a^{*(1)}_n(t), b^{*(1)}_n(t), a^{*(2)}_n(t), b^{*(2)}_n(t), V^*_2(t)$ при $t_0 \le t \le$ $\le t_0 + T$ и вектор управления $a^{(1)}_n(t_0), b^{(1)}_n(t_0)$, $a^{(2)}_n(t_0), b^{(2)}_n(t_0), V_2(t_0), V_1$.

Во всех расчетах в (4.9) было положено $\lambda = 1$, шаг по времени составлял $\Delta t = 10^6\,c \approx 10$ сут., интервал 1-го этапа 10^{13} с $\approx 2.7\times10^6$ лет, интервал 2-го этапа =30 сут., число полных циклов 2-х этапной итерационной процедуры равнялось 20. В серии экспериментов использовались различные значения коэффициентов трения и диффузии k_i, r, μ_i, глубин слоев и т.д.

Замечание. Оценим приблизительное время выхода решения на стационарный режим, которое определяют параметры k_i, r, μ_i. Удержим в (5.1) слагаемые, обеспечивающие экспоненциальное затухание возмущений решения по времени. Оставляя только «диссипативную» часть четвертого уравнения (5.1), видно, что затухание происходит за счет трех диссипативных процессов, соответственно, с коэффициентами k_2, r, μ_2

$$\frac{d}{dt}b^{(2)}_n + \ldots = -\left[k_2N^2 + H_1s_0(r+\mu_2s_0)/s_2\right]b^{(2)}_n,$$
$$b^{(2)}_n(t) = b^{(2)}_n(t_0)\times \tag{6.3}$$
$$\times\exp\left\{-\left[k_2N^2 + H_1s_0(r+\mu_2s_0)/s_2\right]t\right\}.$$

Это позволяет грубо оценить время стационирования (уменьшения в e^{κ}) n-ой гармоники решения для всех диссипативных процессов – диффузии с коэффициентом μ_2. С учетом (6.1)–(6.2) имеем

$$t \le \kappa\left[k_2N^2 + H_1s_0(r+\mu_2s_0)/s_2\right]^{-1} \approx$$
$$\approx \kappa\left(2.5\times10^{-9} + 10^{-10} + 10^{-15}n^2\right)^{-1} n^{-2}. \tag{6.4}$$

Из (6.4) видно, что самый медленный процесс – это диффузия с коэффициентом μ_2. Время затухания возмущений за каждого диссипативного процесса (с коэффициентами k_2, r, μ_2) в e-раз будет при $n = 1$, соответственно, 250, 3000 и 3×10^8 лет.

Эксперимент 1, базовый. В рамках базового эксперимента было проведено 7 расчетов: 1.1–1.7, отличающихся друг от друга высотой рельефа, глубиной канала и значением μ_i. Основная цель эксперимента состояла в подборе параметров и оценке особенностей численного решения оптимальной задачи. Во всех расчетах кроме 1.2 было положено $n = 1$, в первых шести расчетах принято $H_1 = 1$ км, $H_2 = 4$ км, $H_1 + H_2 = 5$ км, в последнем глубины уменьшены в 5 раз. Основные параметры модели базового эксперимента приведены в таблице 1. Здесь V_{ACC} – расход в свердрупах (аналог расхода АКТ): $V_{ACC} = U_1H_1 + U_2H_2$, (1 sv $\equiv 10^6$ m^3/s); знак ∞ означает стационарность решения, J_0, J_{opt} – умноженные на 10^{10}, начальное и конечное значение минимизируемого функционала или функции ценности (4.9). Различные значения J_0 связаны с тем, что почти во всех начальных приближениях было положено $V_1 = 0.1$, $V_2 = 10^{-4}$.

Расчеты показывают, что использованные параметры модели дают разумную величину зональной скорости в верхнем слое ~ 10 – 20 см/с. Пер-

Таблица 2. Эксперимент 2. Зависимость решения от ***n***

№	c_n	d_n	k_i	r	μ_i	n	U_1, U_2 cm/s	V_{ACC}, sv	a_1 b_1	a_2 b_2	J_0, J_{opt} $\times 10^{10}$
1.1	100	0	10^3	10^{-7}	1	1	23 17	919 ∞	39 114 2257	26 760 1631	1 10^{-7}
2.1	100	0	10^3	10^{-7}	1	2	12 6.5	383 ∞	19 306 1220	8320 815	4×10^{-2} 10^{-9}
2.2	100	0	10^3	10^{-6}	1	3	65 0.7	93 ~			217 10^{-3}
2.3	100	0	10^3	10^{-6}	1	4	6 0.2	69 ∞	4795 1363	−813 408	1022 4×10^{-6}
2.4	100	0	10^3	10^{-6}	1	5	55 −0.05	52 ∞	3895 2174	−1046 326	3921 4×10^{-8}
2.5	100	0	10^3	3×10^{-6}	1	6	6 0.3	73 ∞	2231 2129	−499 271	1280 3×10^{-9}

вый вариант 1.1 приводит к завышенной скорости в нижнем слое, что связано, как показывают расчеты 1.2, 1.3, с номером гармоники $n = 1$ и небольшой амплитудой рельефа. Во всех случаях вариационный алгоритм показал высокую скорость сходимости и точность. Минимизируемый функционал (4.9) уменьшался в процессе счета для 6-и расчетов, примерно, на 7–8 порядков, а для 1.7 – на 5 порядков.

Оценим использованные значения коэффициента придонного трения r, сравнивая его с величиной k_2. Если предположить, что r лежит в пределах $(2\pi n/L_x)^2 k_2 < \varepsilon < 10^3 (2\pi n/L_x)^2 k_2$, то при $k_2 = 10^3 - 10^4$, $n = 1$, можно получить, что $10^{-9} < r < 10^{-6}$. Это явилось основанием выбора его значений в вариантах 1.5, 1.6. Сравнение вариантов 1.1, 1.5, 1.6, показывает разумность величины $r \approx 5\times10^{-7}$, при которой полный расход течений ближе к наблюдаемому расходу АКТ. Отметим, что если глубины уменьшить в три раза: $H_i/3$, то получим $U_1 = 34$ см/с, $U_2 = 28$ см/с, а расход будет $V_{ACC} = 492$ св. Для этого случая приблизительно выполняется реальная пропорция отношения длины и глубины АКТ.

Эксперименты 2, 3. Зависимость решения от номера гармоники *n*. Цель второго и третьего экспериментов состояла в изучении зависимости решения от гармоники n. Их результаты приведены в таблицах 2, 3. Расчеты проводились для различных параметров придонного трения и турбулентной вязкости КГВ. Выбирая в качестве основного $k_1 = k_2 \equiv k$, выпишем связь и зависимость остальных от n. Имеем

$$\left(1+\pi^2/L^2/N^2\right)\mu_1 \approx k\left[1+\frac{\alpha}{H_1N^2\left(1+\pi^2/L^2/N^2\right)}\right] \approx$$
$$\approx k\left[1+\frac{4}{\left(n^2+4\right)}\right],$$
$$r/N^2+\mu_2\left(1+\pi^2/L^2/N^2\right) \approx$$
$$\approx k\left[1+\frac{\alpha}{H_2N^2\left(1+\pi^2/L^2/N^2\right)}\right] \approx k\left[1+\frac{1}{\left(n^2+4\right)}\right],$$
$$N^2 = 4\pi^2n^2/L_x^2, 1+\pi^2/L^2/N^2 \approx 1+4/n^2.$$

Таким образом, при $k_1 = k_2 = 10^3$ и предположении, что вклад остальных диссипативных процессов меньше, верхнюю грань соответствующих коэффициентов можно оценить как

$$\mu_1 \le k\left[1+4/\left(4+n^2\right)\right]/\left(1+4/n^2\right),$$
$$r \le N^2k = \left(4\pi^2n^2/L_x^2+\pi^2/L^2\right)k \approx 6\times10^{-10}n^2k.$$

Отсюда видно, что от номера волны существенно зависит только коэффициент r.

Отметим два результата, полученных в эксперименте 3. Во-первых, увеличение номера гармоники (см. (3.1)–(3.3)) приводит к уменьшению скоростей течений в обоих слоях и уменьшению расхода. Во-вторых, вариант 3.6 показывает, что при некоторых условиях, (например, при увеличении коэффициента придонного трения) в нижнем слое может формироваться противотечение. Для проверки чувствительности решения к изменению модельных параметров было проведено две серии дополнительных расчетов. В первой серии варьировалась амплитуда рельефа дна (табл. 4).

Таблица 3. Эксперимент 3. Роль высоких гармоник

№	c_n	d_n	k_i	r	μ_i	n	U_1, U_2 cm/s	V_{ACC}, sv	a_1 b_1	a_2 b_2	J_0, J_{opt} $\times 10^{10}$
3.1	50	0	10^3	10^{-7}	1	5	63 57	2914 ∞			25 5×10^{-6}
3.2	50	0	10^3	10^{-7}	1	10	23 17	887 ∞	−5460 487	−5072 326	126 3×10^{-11}
3.3	50	0	10^3	10^{-7}	1	15	12 7	386 ~			0.04 0.01
3.4	75	0	10^3	10^{-7}	1	15	17 11	628 ∞			4 2×10^{-10}
3.5	85	0	10^3	10^{-7}	1	15	20 14	752 ∞			8
3.6	85	0	10^3	10^{-6}	1	15	4.6 −0.41	295 ∞	−1001 1507	−1317 128	250 2×10^{-5}

Таблица 4. Чувствительность решения к изменению c_{15}

c_{15}	81	82	83	84	**85**	86	87	88	89	90
V_{ACC}	34.16	32.95	31.75	30.60	**29.5**	28.33	27.25	26.2	25.14	24.13
U_1	4.78	4.73	4.68	4.63	**4.6**	4.54	4.50	4.45	4.40	4.36
U_2	−0.34	−0.36	−0.38	−0.39	**−0.41**	−0.43	−0.44	−0.46	−0.47	−0.49

Таблица 5. Чувствительность решения к изменению k

$k\times10^3$, м^2 с$^{-1}$	0.99	0.98	0.96	0.95	0.93	0.92	0.91	0.90	0.89
V_{ACC} (*св*)	32.86	36.32	43.53	47.19	54.91	58.93	63.21	67.46	71.82
U_1, U_2, м с$^{-1}$	4.71 −0.36	4.83 −0.30	5.11 −0.19	5.25 −0.13	5.55 −0.015	5.72 0.04	5.90 0.01	6.07 0.17	6.26 0.23

Расчеты показывают, что решение остается стационарным и устойчивым. Противотечение, слегка изменяясь по величине, в нижнем слое присутствует, его скорость ≈−0.4 см/с (табл. 4).

Во второй серии дополнительных расчетов варьировался коэффициент турбулентной вязкости КГВ ($k_1 = k_2 = k$). Результаты представлены в таблице 5. Видно, что противотечение в нижнем слое возникает лишь при повышении k: $k > 920$ м^2 с$^{-1}$. Примерно, при $k \le 930$ в обоих слоях течения совпадают с направлением ветра. Увеличение k от $k \approx 930$ м^2 с$^{-1}$ приводит к уменьшению расхода и скоростей в верхнем и нижнем слоях. Скорость в нижнем слое направлена против ветра (отрицательна). Уменьшение коэффициента турбулентной вязкости от $k \approx 920$ приводит к увеличению расхода и скоростей в обоих слоях. Скорость в нижнем слое положительна.

Дополнительные расчеты показывают, что решения описывают стационарные предельные точки [4] и “непрерывно” зависят от возмущений рельефа и коэффициента турбулентной вязкости. Заметим, что в этой работе изучаются только стационарные режимы, наблюдаемые не для всех модельных параметров. Дополнительные расчеты подтверждают наличие устойчивых стационарных точек, описывающих режим противотечения.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулирована новая вариационная формулировка и построен численный алгоритм решения уравнений, описывающих нестационарную квазигеострофическую динамику в двухслойном периодическом канале, имитирующем АКТ. Алгоритм решения задачи основан на технике сопряженных уравнений и состоит в итерационном решении системы оптимальности.

Рассчитан и изучен ряд стационарных режимов квазигеострофических циркуляций в океане, возникающих при различных модельных параметрах. Показано, что увеличение номера гармоники, генерируемой гармоникой рельефа дна, приводит к уменьшению скоростей течений в обоих слоях и уменьшению полного расхода АКТ. Наличие в рельефе дна высоких гармоник может приводить к формированию противотечения в нижнем слое. Противотечение устойчиво к небольшим вариациям возмущений рельефа дна и коэффициента турбулентной вязкости.

При некоторых характеристиках рельефа дна (наличие высоких гармоник) и значениях коэффициента турбулентной вязкости, в нижнем слое может формироваться противотечение. Оно стационарно, направлено против ветра и устойчиво к небольшим изменениям входных модельных параметров.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, грант № 18-11-00163.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *McWilliams J.C.* Fundamentals of Geophysical Fluid Dynamics. Cambridge University Press, 2006. 299 p.
2. *Дымников В.П., Залесный В.Б.* Основы вычислительной геофизической гидродинамики. Москва: Геос, 2019. 448 с.
3. *Дымников В.П., Грицун А.С.* Ляпуновские показатели и размерность аттрактора двуслойной бароклинной модели атмосферы // ДАН СССР. 1996. Т. 347. № 4. С. 535–538.
4. *Дымников В.П., Филатов А.Н.* Основы математической теории климата. Москва: ВИНИТИ, 1994. 252 с.
5. *Ипатова В.М.* Задача инициализации для модели общей циркуляции атмосферы. Москва: Труды МФТИ. 2012. Т. 12. № 2. С. 121–130.
6. *Agoshkov V.I., Ipatova V.M.* Convergence of solutions to the problem of data assimilation for a multilayer quasi-geostrophic model of ocean dynamics // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2010. V. 25. № 2. P. 105–115.
7. *Bernier Ch.* Existence of attractor for the quasi-geostrophic approximation of the Navier-Stokes equations and estimate of its dimension // Adv. Math. Sci. Appl. 1994. V. 4. № 2. P. 465–489.
8. *Charney J.G., Shukla J., and K.C. Mo.* Comparison of a barotropic blocking theory with observation // J. Atmos. Sci. 1981. V. 38. P. 762–779.
9. *Gritsun A., Branstator G., Dymnikov V.* Construction of the linear response operator of a atmospheric general circulation model to small external forcing // Rus. J. Num. Anal. Math. Modelling. 2002. V. 17. № 5. P. 399–416.
10. *Gritsun A.S.* Unstable periodic trajectories of a barotropic model of the atmosphere // Russ. J. Num. Anal. Math. Modelling. 2008. V. 23. № 4. P. 345–367.
11. *Ивченко В.О., Залесный В.Б.* Диффузионно-ротационная параметризация вихревых потоков потенциального вихря: баротропное течение в зональном канале // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2019. Т. 55. № 1. С. 3–16.
12. *Ivchenko V.O., Zalesny V.B., Sinha B.* Is the coefficient of eddy potential vorticity diffusion positive? Part 1: barotropic zonal channel // J. Phys. Oceanogr. 2018. V. 48. № 6. P. 1589–1607.
13. *Dong-wook Shina, Younghun Kangb, Eun-Jae Parkb.* C0-discontinuous Galerkin methods for a wind-driven ocean circulation model: Two-grid algorithm // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. № 328. 2018. P. 321–339.
14. *Марчук Г.И.* Избранные научные труды. Том II. Сопряженные уравнения и анализ сложных систем. Москва: РАН, 2018. 500 с.
15. *Шутяев В.П.* Методы усвоения данных наблюдений в задачах физики атмосферы и океана // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2019. Т. 55. № 1. С. 17–34.
16. Data assimilation for the Earth System. *Swinbank R., Shutyaev V., Lahoz W.A.* (eds.). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London. 2003. 377 p.
17. *Shutyaev V.* Control operators and fundamental control functions in data assimilation. In *R.Swinbank* , (eds.). Data assimilation for the Earth System. 2003. P. 55–64.
18. *Zalesny V., Agoshkov V., Shutyaev V., Parmuzin E., Zakharova N.* Numerical Modeling of Marine Circulation with 4D Variational Data Assimilation / Journal of Marine Science and Engineering. 2020. 8. 503. 19 p.
19. *Gilbert J.C., Lemarechal C.L.* The modules M1QN3 and N1QN3. Version 2.0c (June 1995).

Variational Method for the Solution of a Two-Layer Quasi-Geostrophic Ocean Circulation Problem

V. B. Zalesny*

Marchuk Institute of Numerical Mathematics, Russian Academy of Sciences, Gubkin str., 8, Moscow, 119333 Russia

**e-mail: vzalesny@yandex.ru*

A new variational formulation and a method for solving the problem of quasi-geostrophic dynamics in a two-layer periodic channel are considered. The area imitates the zone of the Antarctic Circumpolar Current lying in the Southern Ocean. A feature of the problem is the doubly connected domain of its solution (periodicity

in latitude). Using the Fourier series, the problem is reduced to a nonlinear system of ordinary differential equations (ODE) in time. Due to the doubly connected domain together with the ODE solution it is required to satisfy a stationary integral relation that determines the total mean transport. A variational numerical algorithm for solving this problem is proposed, which is close to the four-dimensional variational data assimilation (4DVAR) technique. The basis of the cost function is a stationary integral relation. Several numerical experiments were carried out to study stationary regimes depending on the model parameters. The results show that the presence of high harmonics in the bottom relief function can cause the formation of an undercurrent in the lower layer. The undercurrent is stable to small variations in relief disturbances and the turbulent viscosity coefficient.

Keywords: quasi-geostrophic circulation, two-layer ocean model, variational method, 4DVAR algorithm, stationary-current regime