ИЗВЕСТИЯ РАН. ФИЗИКА АТМОСФЕРЫ И ОКЕАНА, 2023, том 59, № 2, с. 242–244

УДК 551.551

ОБЛАКА И ТЕОРИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ: САМОПОДОБИЕ, ПОКАЗАТЕЛЬ ФРАКТАЛА 4/3 И ИНВАРИАНТЫ

© 2023 г. **Г. С. Голицын[a], *, О. Г. Чхетиани[a], **, Н. В. Вазаева[a, b], *****

[a] *Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, Пыжевский пер., 3, Москва, 119017 Россия*

[b] *МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, Москва, 105005 Россия*

**e-mail: gsg@ifaran.ru*

***e-mail: ochkheti@gmail.com*

****e-mail: vazaevanv@ifaran.ru*

Поступила в редакцию 04.06.2022 г.
После доработки 19.07.2022 г.
Принята к публикации 11.08.2022 г.

В 1982 году Ш. Лавджой опубликовал иллюстрацию к предложению Б. Мандельброта о том, как охарактеризовать отношение площади к периметру для сложных плоских форм. Было обнаружено, что показатель степени такого фрактала для определяемых спутниками и радарами дождевых облаков составляет 1.35, что близко к 4/3. Позднее оказалось, что такой же показатель степени характерен и для серебристых облаков. Такое значение может быть связано с классической теорией турбулентности 1941 года. Выявлена роль предфрактальных множителей, образующих пару особенных инвариантов для облачных полей и безразмерные числа самоподобия для облачных полей размеров 1–10^6 км^2.

Ключевые слова: теория турбулентности, облачность, фракталы, самоподобие

DOI: 10.31857/S0002351523020025, **EDN:** HNMBQJ

В 1977 г. Б. Мандельброт [Mandelbrot, 1977] ввел понятие фракталов для стохастических процессов, в частности, для характеристики стохастических плоских фигур было предложено использовать отношение площади к периметру.

В 1982 г. Ш. Лавджой [Lovejoy, 1982] проанализировал это соотношение для размеров облаков от 1 до 12×10^5 км^2 и обнаружил, что показатель фрактала для них $\beta = 1.35$ близок к 4/3, разница составляет всего 1/60, что может свидетельствовать о близости к теории турбулентности Колмогорова-Обухова 1941 г. (далее КО41 [Monin & Yaglom, 1975; Kolmogorov, 1934; Obukhov, 1959]). Еще в начале этого века найдено подтверждение этого соотношения для горизональных масштабов облаков по спутниковым данным [Wood & Field, 2011; Guillaume et al., 2018]. Аналогичное распределение было обнаружено и для областей ясного неба. Это еще одно подтверждение действия КО41 для больших масштабов. В [von Savigny et al., 2011] дается значение $\beta = 1.35$ для серебристых облаков ледяных частиц на высотах 80–90 км. Это говорит о том, что формы облаков описываются тем же универсальным законом, что и для стохастических плоских форм.

Более 40 лет эта проблема привлекает внимание и анализ экспериментальных данных, представленных здесь и в других работах, показывает повторяемость этих результатов на самых разных примерах.

На основе теории КО41 поясним их смысл. Лавджой представил свой результат на рис. 1 [Lovejoy, 1982], для связи площади с периметром облаков: $A = BP^{\alpha}$, в то время как в [Mandelbrot, 1977] имеем $P = CR^{\beta}$, $R = A^{1/2}$, где B и C являются предфрактальными множителями с соответствующими необходимыми размерностями, не представленными Лавджоем. Объединяя эти два выражения, получаем $A = B\left(CA^{\beta/2}\right)^{\alpha}$, $\alpha\beta/2 = 1$, $BC^{\alpha} = 1$. Согласно последнему соотношению выведем эмпирические статистические соотношения.

Перестроив все 77 точки данных (см. рис. 1 в [Lovejoy, 1982]) для нахождения статистических отношений между ними, с 95% достоверностью найдем, что $\alpha_1 = 1.48$ и $\alpha_2 = 1.50$ с отклонением ±0.03 для каждого α_i, где индекс 1 относится к спутниковым облакам, а 2 – к радарным дождевым облакам (черные точки). Отсюда получим $\beta_1 = 1.35$ и $\beta_2 = 1.33...$ с той же 95% точностью для обоих β_i. Для сокращения и простоты используем для них $\alpha = 3/2$ и $\beta = 4/3$. Из анализа графика (см. рис. 1 в [Lovejoy, 1982]) находим $B = 0.15$ км$^{1/2}$, что дает $C = B^{-1/\alpha} = 3.54$ км$^{-1/3}$.

Используя теорию КО41, можно получить ряд следствий из законов для моментов, позволяющих понять связи между фрактальной размерностью облака и турбулентностью.

Структурная функция для поля скоростей с нулевыми или малыми начальными условиями, спектр которой $\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}$ (k – волновое число, ε – скорость генерации/рассеивания кинетической энергии турбулентности), $\langle u^2\rangle = \varepsilon\tau = \varepsilon\left(R^2/\varepsilon\right)^{1/3} = (\varepsilon R)^{2/3}$, где $\langle x_i^2\rangle = \varepsilon\tau^3 = R^2$, τ – время, $\tau = \left(R^2/\varepsilon\right)^{1/3}$ [Obukhov, 1959; Голицын, 2021]. С учетом уравнений вторых моментов получаем закон турбулентной диффузии Ричардсона-Обухова [Monin & Yaglom, 1975; Obukhov, 1959], и спектр ω^{-4} ($\omega = 2\pi/\tau$) – аналогичный частотному спектру ветрового морского волнения [Голицын, 2021]. Отсюда легко получить нелинейное дисперсионное уравнение [Голицын, 2021]: $\omega = \left(\varepsilon k^2\right)^{1/3}$, которое наглядно демонстрирует сложность турбулентности и ее нелинейность.

Общее выражение для масштаба длины $L = (Kt)^{1/2}$. Здесь K является коэффициентом диффузии. Для площади мы принимаем $A = Kt$. Однако периметр растет быстрее, чем масштаб L, как $P = (K_P\tau)^{1/2}$. Отсюда, записав безразмерное соотношение для отношения периметра к квадрату скорости, можно сделать следующие выводы.

Единицы времени для периметра гораздо короче, чем для площадей, или, другими словами, отношение коэффициента $a = \left(K_P/K\right)$ должно расти со временем как $t^{1/2}$. Скорость генерации кинетической энергии оценивается как $\varepsilon^{-1/6}$. Оценив эту величину по статистике общей атмосферной циркуляции А. Оорта [Oort, 1964], обнаружим, что общая скорость кинетической энергии/рассеяния составляет 2.3 Вт м$^{-2}$. Масса атмосферного столба $M = 10^4$ кг м$^{-2}$. А для единицы массы воздуха получаем $\varepsilon = 2.3$ м^2 с$^{-3}$ $= 230\times10^{-12}$ км^2 с$^{-3}$ и $\varepsilon^{-1/6} = 40.4$ с$^{1/2}$ км$^{-1/3}$. По теории размерностей для масштаба длины имеем $L = (Kt)^{1/2}$. С использованием соотношения $\left(a/\varepsilon^{1/3}t\right)^{1/2}$ и вышеуказанного значения $\varepsilon^{-1/6} = 40.4$ с$^{1/2}$ км$^{-1/3}$, по данным наблюдений, оцениваем $\left(\varepsilon^{1/3}t/a\right)^{1/2} = 0.28$ км$^{1/3}$ $\approx$ ≈ 0.3 км$^{1/3}$. Это константа для диапазона размеров облаков от 1 до 1000 км, на основе которой можем дать грубую оценку безразмерного отношения $a = \left(K_P/K\right)$. Поскольку ε можно более или менее оценить как $(t/a) = c_1$, где c_1 – постоянная, то $a \approx 0.0077t$, т.е. $\left(K_P/K\right)$ со временем растет как t, значит, периметры на границах облаков должны расти быстрее, чем общая площадь. Фрактальный характер отношения площади к периметру отражает динамику процесса образования облаков.

Напомним весь способ вывода этих результатов: мы начинаем с уравнения Фоккер-Планка-Колмогорова с марковским приближением для ускорения частиц, т.е. 6-мерное пространство с дельта-временной корреляцией для сил (ускорений), которое дает вторые моменты для распределения вероятностей. Отсюда получаем шкалу времени $(A/\varepsilon)^{1/3}$. Особенности самоподобия заключаются в появлении фракталов размерностью 4/3. Эти значения мы можем оценить или измерить из наблюдений. Приближенными инвариантами являются произведения показателей степени разрушения и предфрактальных множителей вместе с комбинацией $\left(\varepsilon^{1/3}t/a\right)^{1/2}$. С общей точки зрения весь процесс иллюстрирует случайное блуждание жидкой частицы в 6-мерном фазовом пространстве скоростей и координат, где может оказаться важным прямой численный расчет границ облаков с большим разрешением, в котором $\beta = 1.35 \pm 0.1$.

Таким образом, в статье объясняется фрактальный показатель отношения площади облаков к периметру 4/3 с использованием работы Колмогорова 1934 г. [Kolmogorov, 1934] и Обухова 1959 г. [Obukhov, 1959]. Связь между периметром и площадью облачных образований для случайных блужданий частиц жидкости в 6-мерном фазовом пространстве позволяет провести прямой численный расчет границ облаков с большим разрешением.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 20-17-00200).

Благодарим В.П. Маслова, Д.Д. Соколова, Е.Б. Гледзера, Ю.И. Троицкую за полезные обсуждения этих результатов.

Это краткое содержание статьи “Clouds and turbulence theory: peculiar self-similarity, 4/3 fractal exponent and invariants”, полный текст опубликован в “Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics”, 2022. Vol 58. No 6. P. 668–671. DOI: 10.1134/S0001433822060081

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Голицын Г.С. Вероятностная структура макромира: землетресения, ураганы, наводнения... М. – Физматлит, Москва, 2021. 176 с.

Guillaume A., Kahn B.H., Yue Q., Fetzer E.J., Wong S., Manipon G.J., Hua H., Wilson B.D. Horizontal and vertical scaling of cloud geometry inferred from CloudSat data. // J. Atmos. Sci. 2018. V. 75(7).

P. 2187–2197.
https://doi.org/10.1175/JAS-D-17-0111.1

Kolmogorov A.N. Zufallige Bewegungen. // Ann. Math. 1934. V. 35. P. 116–117.
https://doi.org/10.2307/1968123

Lovejoy S. Area-perimeter relation for rain and cloud areas // Science. 1982. V. 216(4542). P. 185–187.
https://doi.org/10.1126/science.216.4542.185

Mandelbrot B. Fractals, Form, Chance and Dimension. W.H. Freeman and Co., San Francisco, 1977. 352 p.

Monin A.S., Yaglom A.M. Statistical Hydromechanics. V. 2. MIT Press, Cambridge, MA, 1975. 882 p.

Obukhov A.M. Description of turbulence in terms of Lagrangian variables. // Adv. Geophys. 1959. V. 6. P. 113–115.
https://doi.org/10.1016/s0065-2687(08)60098-9

Oort A.H. On estimates of the atmospheric energy cycle. // Mon. Weather Rev. 1964. V. 92(11). P. 483–493.
https://doi.org/10.1175/1520-0493(1964)092<0483:OEOTAE>2.3.CO;2

von Savigny C., Brinkhoff L.A., Bailey S.M., Randall C.E., Russell III J.M. First determination of the fractal perimeter dimension of noctilucent clouds. // Geophysical Research Letters. 2011. V. 38(2).
https://doi.org/10.1029/2010GL045834

Wood R., Field P.R. The distribution of cloud horizontal sizes // J. Climate. 2011. V. 24(18). P. 4800–4816.
https://doi.org/10.1175/2011JCLI4056.1

Clouds and Turbulence Theory: Peculiar Self-Similarity, 4/3 Fractal Exponent and Invariants

G. S. Golitsyn[1, *], O. G. Chkhetiani[1, **], and N. V. Vazaeva[1, 2, *]**

[1] *Obukhov Institute of Atmospheric Physics Russian Academy of Science, Pyzhovskiy per., 3, Moscow, 119017 Russia*
[2] *Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya str., 5, bld. 1, Moscow, 105005 Russia*
**e-mail: gsg@ifaran.ru*
***e-mail: ochkheti@gmail.com*
****e-mail: vazaevanv@ifaran.ru*

In 1982 Lovejoy has published an illustration to Mandelbrot proposal how to characterize the area-perimeter ratio of complicated planar forms and it was found that exponent β for the satellite- and radar-determined cloud and rain areas of such a fractal is 1.35 close to 4/3. Later on it was notified that the same exponent was found also for noctilucent clouds. Such a value might be related to classic turbulence theory of 1941. This text demonstrates this relation using two basic papers by Kolmogorov and Obukhov. The role of prefractal multipliers is revealed, they form a couple of the peculiar invariants for cloud fields and a non-dimensional self-similarity numbers for these fields of sizes $1–10^6$ km^2. The peculiarity is in their dimensional dependence and in the presence of few invariants, not usual invariants in cloud forms. Further research on random walk of a fluid particle in the 6D phase-space may lead to new discoveries.

Keywords: turbulence theory, clouds, fractals, self-similarity