

УДК 539. 59,534-14

## НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СДВИГОВОГО ТЕЧЕНИЯ НА КОНЕЧНОМ ВРЕМЕННОМ ПРОМЕЖУТКЕ

© 2023 г. М. В. Калашник<sup>a, b, c, \*</sup>

<sup>a</sup>Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, Пыжжевский пер., 3, Москва, 119017 Россия

<sup>b</sup>Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, ул. Большая Грузинская, 10, Москва, 123242 Россия

<sup>c</sup>ФГБУ “НПО “Тайфун”, ул. Победы, 4, Калужской обл., Обнинск, 249038 Россия

\*e-mail: kalashnik-obn@mail.ru

Поступила в редакцию 21.10.2022 г.

После доработки 10.11.2022 г.

Принята к публикации 11.01.2023 г.

В рамках дискретной квазигеострофической модели с двумя вертикальными уровнями решена задача о линейной устойчивости течения стратифицированной вращающейся жидкости с постоянными вертикальным и горизонтальным сдвигами скорости. Показано, что учет горизонтального сдвига приводит к качественному изменению динамики неустойчивых волновых возмущений. Основная особенность связана с эффектом временного экспоненциального роста неустойчивых возмущений, т.е. роста на конечном временном промежутке. Этот эффект проявляется в чередовании стадий гладкого осциллирующего поведения (во времени) со стадиями экспоненциального (взрывного) роста конечной продолжительности. Дана кинематическая интерпретация эффекта временного экспоненциального роста, связанная с прохождением зависящего от времени волнового вектора возмущения через область экспоненциальной неустойчивости, существующей в отсутствие горизонтального сдвига. Показано, что в математическом плане этот эффект описывается решениями дифференциального уравнения второго порядка, содержащего точки поворота. Приведены асимптотические решения уравнения при слабых горизонтальных сдвигах.

**Ключевые слова:** бароклиная неустойчивость, горизонтальный и вертикальный сдвиг скорости, инкремент нарастания, неустойчивые моды

**DOI:** 10.31857/S0002351523020037, **EDN:** HOZDEJ

Задача о неустойчивости геострофического течения с вертикальным сдвигом скорости — одна из классических задач геофизической гидродинамики. Впервые она была рассмотрена в классической работе Иди [Eady, 1949]. Используя асимптотические решения уравнений гидродинамики, Иди определил параметры неустойчивых волновых возмущений (волн Иди). Было показано, что они хорошо согласуются с параметрами атмосферных циклонических возмущений средних широт (длина наиболее неустойчивого возмущения порядка 4000 км), время удвоения амплитуды порядка 3-х суток. Впоследствии были получены решения Иди в рамках дискретных по вертикали квазигеострофических моделей, хорошо согласующиеся с непрерывными решениями. В рамках таких моделей разными авторами рассматривались различные обобщенные постановки задачи Иди. В рассмотрении принимались бета-эффект, сжимаемость, горизонтальный сдвиг ветра, нелинейность. Далеко не полный список публикаций, посвященных этой классической задаче теории бароклиной неустойчивости можно найти в из-

вестных монографиях и обзорах [Уизем, 1977, Ле Блон, Майсек, 1981, Лайтхилл, 1981, Фабер, 2001, Гилл, 1986, Монин, 1988, Ламб, 1947, Кочин, Кибель, Розе, 1963].

В настоящей работе рассмотрен один из вариантов задачи Иди — задача о неустойчивости геострофического течения с постоянными вертикальным и горизонтальным сдвигами. Эта задача была рассмотрена в работе автора [Калашник, 2009] в рамках квазигеострофической модели атмосферы с непрерывной стратификацией. В настоящей работе для решения задачи использован дискретный вариант квазигеострофической модели с двумя вертикальными уровнями. Использование этого варианта значительно упрощает исследование устойчивости. Основная особенность решений дискретной модели связана с эффектом временного экспоненциального роста неустойчивых волн, т.е. роста на конечном временном промежутке. Данный эффект проявляется в смене динамического режима колебаний режимом экспоненциального (взрывного) роста конечной продолжительности. Подобное поведе-

ние представляет собой новый, ранее не изученный механизм реализации бароклинной неустойчивости, который остался совершенно незамеченным в исследованиях аналогичной задачи [Barcilon, Bishop, 1999; Bishop, 1993].

**2. Двухуровневая квазигеострофическая модель и линейная теория устойчивости.** Для изучения неустойчивости используем дискретный вариант поверхностной геострофической модели, описывающей движения слоя стратифицированной вращающейся жидкости с нулевой потенциальной завихренностью. В качестве вертикального и горизонтального масштаба в безразмерных уравнениях модели принимаются соответственно толщина слоя  $H$  и бароклинный радиус деформации Россби  $D = NH/f$ , где  $N$  – частота Брента,  $f$  – параметр Кориолиса. Масштаб времени, функции тока и скорости соответственно  $T_* = D/U_*$ ,  $\Psi_* = U_*D$  и  $U_* = \Theta_*/N$ , где  $\Theta_*$  – характерное значение перепада плавучести. Безразмерные горизонтальные компоненты скорости  $u, v$  и плавучесть  $\vartheta$  связаны с функцией тока  $\psi$  соотношениями  $u = -\psi_y$ ,  $v = \psi_x$ ,  $\vartheta = \psi_z$ . В безразмерных переменных основное уравнение поверхностной геострофической модели (равенство нулю потенциальной завихренности) имеет вид уравнения Лапласа

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz} = 0, \quad (1)$$

к которому присоединяются нестационарные граничные условия

$$z = 0, 1: \psi_z + [\psi, \psi_z] = 0, \quad (2)$$

где квадратными скобками обозначен двумерный якобиан  $[\psi, q] = \psi_x q_y - \psi_y q_x$ . Данные условия следуют из условий непротекания на твердых горизонтальных границах слоя и выражения для вертикальной компоненты скорости в квазигеострофическом приближении [Pedlosky, 1987]. Уравнения (1), (2) лежат в основе SQG модели с двумя границами [Held et al., 1995]. Дискретная аппроксимация оператора Лапласа в (1), включающая разбиение вертикального отрезка интегрирования на четыре отрезка толщины  $h = 1/4$  и привлечение уравнений переноса плавучести на границах (2), приводят к следующей системе уравнений

$$\begin{aligned} q_{1t} + [\psi_1, q_1] &= 0, \quad q_{2t} + [\psi_2, q_2] = 0, \\ q_{1,2} &= \Delta \psi_{1,2} \pm (\lambda^2/2)(\psi_2 - \psi_1), \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\psi_1, \psi_2$  – значения функции тока на верхней и нижней границах слоя,  $\Delta$  – двумерный оператор Лапласа, параметр  $\lambda^2 = 1/2h^2 = 8$ . Уравнения (3) совпадают с уравнениями классической двухуровневой модели Филлипса [Pedlosky, 1987; Phil-

lips, 1954], однако отличаются от нее физической интерпретацией переменных. Распределения  $PV$   $q_1, -q_2$ , на нижнем и верхнем уровнях в модели Филлипса, теперь имеют смысл удвоенных распределений плавучести на верхней и нижней границах слоя атмосферы. Подробный вывод уравнений (3) представлен в работах [Kalashnik, Chkhetiani, Kurgansky, 2021; Калашник, Курганский, Чхетиани, 2022].

Из уравнений (3) следует закон сохранения полной энергии

$$E_t = 0,$$

$$E = (1/2) \iint \{ (\nabla \psi_1)^2 + (\nabla \psi_2)^2 + 4(\psi_2 - \psi_1)^2 \} dx, \quad (4)$$

$x = (x, y)$ ,  $\nabla$  – двумерный градиент. Сохраняются также квадратичные интегралы

$$(V_{1,2})_t = 0, \quad V_{1,2} = \iint q_{1,2}^2 dx, \quad (5)$$

отражающие законы сохранения энтропии на каждой границе.

Для дальнейшего преобразуем систему (3) к форме, удобной для исследования устойчивости. Введем баротропный  $\sigma = (1/2)(\psi_1 + \psi_2)$  и бароклинный компоненты  $\theta = (1/2)(\psi_2 - \psi_1)$  функции тока. Для этих компонентов система (3) сводится к системе

$$\begin{aligned} (\Delta \theta - \lambda^2 \theta)_t + [\sigma, \Delta \theta - \lambda^2 \theta] + [\theta, \Delta \sigma] &= 0, \\ (\Delta \sigma)_t + [\sigma, \Delta \sigma] + [\theta, \Delta \theta] &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнения (6) получаются вычитанием и сложением уравнений (3). Из системы (6) следует закон сохранения полной энергии в форме

$$E_t = 0, \quad E = (1/2) \iint \{ (\nabla \theta)^2 + (\nabla \sigma)^2 + \lambda^2 \theta^2 \} dx. \quad (7)$$

Стационарные зональные течения описываются точным решением (6)  $\theta = \Theta(y)$ ,  $\sigma = \Sigma(y)$ . Это решение описывает течение со скоростью в двух слоях  $U_{1,2} = \bar{U}(y) \mp \tilde{U}(y)$ , где  $\bar{U}(y) = -\Sigma_y$  и  $\tilde{U}(y) = -\Theta_y$  есть баротропный и бароклинный компоненты скорости течения. Полагая в (7)  $\theta = \Theta(y) + \theta'$ ,  $\sigma = \Sigma(y) + \sigma'$ , для малых возмущений (штрихи у возмущений опускаем) получим систему

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x} \right) (\Delta \theta - \lambda^2 \theta) + \tilde{U} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \sigma + \lambda^2 \sigma) - \\ - \tilde{U}''(y) \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \bar{U}''(y) \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x} \right) (\Delta \sigma) + \tilde{U} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \theta) - \\ - \tilde{U}''(y) \frac{\partial \theta}{\partial x} - \bar{U}''(y) \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Далее будем рассматривать течение с постоянными горизонтальными и вертикальными сдвигами.

Положим для определенности  $\bar{U} = Sy$ , где  $S$  – величина горизонтального сдвига, и  $\tilde{U} = 2/\lambda^2 = 1/4$ . Для этого течения система уравнений (8) примет вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + Sy \frac{\partial}{\partial x}\right)(\Delta\theta - \lambda^2\theta) + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x}(\Delta\sigma + \lambda^2\sigma) &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + Sy \frac{\partial}{\partial x}\right)\Delta\sigma + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x}(\Delta\theta) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

## 2. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМ ВЕРТИКАЛЬНЫМ СДВИГОМ

Рассмотрим вначале случай с отсутствием горизонтального сдвига, когда  $\bar{U} = 0$  ( $S = 0$ ). Отыскивая экспоненциально нарастающие решения системы (9) вида  $\theta = \theta_0 e^{\gamma t} e^{i(kx+ly)}$ ,  $\sigma = \sigma_0 e^{\gamma t} e^{i(kx+ly)}$  для инкремента нарастания  $\gamma$  получим уравнение

$$\gamma^2(\mu^2 + \lambda^2) = \tilde{U}^2 k^2 (\lambda^2 - \mu^2),$$

где  $\mu^2 = k^2 + l^2$ . Отсюда

$$\gamma = \pm \tilde{U} k \sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 + \mu^2}}. \quad (10)$$

Согласно (10) неустойчивость имеет место для значений  $\mu < \lambda$  (длинные волны), т.е. для значений волновых чисел  $k, l$  лежащих внутри круга радиуса  $\lambda$ . Используя (10) легко показать, что максимальную скорость роста  $\tilde{\gamma} = \text{Re } \gamma$  имеют двумерные возмущения с  $l = 0$  и волновым числом  $k = k_m = \lambda \sqrt{\sqrt{2} - 1} = 0.644\lambda$  где, напомним,  $\lambda^2 = 1/2h^2 = 8$ . Для указанных значений параметров размерная длина волны наиболее опасного возмущения  $(2\pi/k_m)D = 3.448D = 3448 \text{ km}$  (четверть длины – масштаб циклона). При  $\tilde{U} = 1$  время нарастания возмущения в  $e$  раз  $T_m = (1/\tilde{\gamma}_m)T_*$  составляет (в размерных переменных) величину порядка суток.

## 3. ТЕЧЕНИЕ С ГОРИЗОНТАЛЬНЫМ И ВЕРТИКАЛЬНЫМ СДВИГАМИ. ЭФФЕКТ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РОСТА ВОЗМУЩЕНИЙ НА КОНЕЧНОМ ВРЕМЕННОМ ПРОМЕЖУТКЕ

Рассмотрим теперь динамику возмущений в присутствии течения с горизонтальным сдвигом  $S \neq 0$ . Поведение малых возмущений течения описывается линейной системой (9). Как показано в предыдущем разделе, в отсутствие горизонтального сдвига существует нормальная мода, которая экспоненциально растет, если квадрат модуля вол-

нового вектора  $\mu^2 = k^2 + l^2 < \lambda^2$ , и осциллирует во времени, если  $\mu^2 > \lambda^2$ . Принципиально новая особенность, вносимая горизонтальным сдвигом, связана с эффектом временного экспоненциального роста волновых мод, т.е. экспоненциального роста на конечном временном промежутке. Подобное поведение представляет собой новый, малоизученный тип гидродинамической неустойчивости.

Для исследования устойчивости течения используем немодальный подход, основанный на описании динамики возмущений в полулагранжевой (движущейся вместе с потоком) системе координат. Следуя работам [Chagelishvili et al., 1997; Kalashnik et al., 2006] введем новые переменные  $t_1 = t$ ,  $x_1 = x - Syt$ ,  $y_1 = y$ . С учетом формул для преобразования производных

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y_1} - St_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_1} - Sy_1 \frac{\partial}{\partial x_1},$$

из (9) получим систему с коэффициентами, зависящими только от времени

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_1}(\Delta\theta - \lambda^2\theta) + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x_1}(\Delta\sigma + \lambda^2\sigma) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t_1}\Delta\sigma + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x_1}(\Delta\theta) &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где оператор Лапласа в новых переменных  $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + (\partial/\partial y_1 - St_1 \partial/\partial x_1)^2$ . Система (11) имеет решения в форме немодальной волны с переменными амплитудами

$$\theta = A(t_1) \sin(kx_1 + ly_1), \quad \sigma = B(t_1) \cos(kx_1 + ly_1). \quad (12)$$

Прямая подстановка в (11) показывает, что эти амплитуды удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt_1}(k^2 + (l - St_1 k)^2 + \lambda^2)A + \\ + \frac{k}{4}(\lambda^2 - k^2 - (l - St_1 k)^2)B = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{d}{dt_1}(k^2 + (l - St_1 k)^2)B + \frac{k}{4}(k^2 + (l - St_1 k)^2)A = 0.$$

Возвращаясь к исходным физическим переменным и обозначая  $\mu^2(t) = k^2 + l^2(t)$ ,  $l(t) = l - Sk t$ , систему (13) можно записать в форме

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mu^2(t) + \lambda^2)A + \frac{k}{4}(\lambda^2 - \mu^2(t))B = 0, \\ \frac{d}{dt}\mu^2(t)B + \frac{k}{4}\mu^2(t)A = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

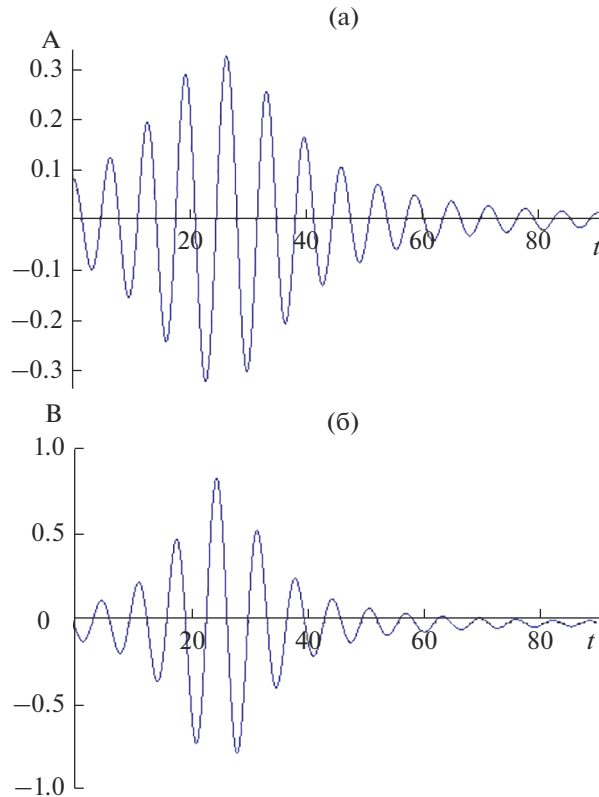


Рис. 1. Зависимость от времени амплитуд для значений параметров  $k = 4$ ,  $l = 10$ ,  $S = 0.1$ ,  $\lambda^2 = 8$ .

Немодальное решение в исходных физических переменных соответственно примет вид

$$\theta = A(t) \sin(kx + l(t)y), \quad \sigma = B(t) \cos(kx + l(t)y), \quad (15)$$

$$l(t) = l - Skt,$$

Описание динамики возмущений, таким образом, сводится к анализу поведения решений системы (14). Это поведение может быть достаточно нетипичным, в частности, содержать промежутки экспоненциального роста конечной (во времени) продолжительности. Без ограничения общности далее будем рассматривать положительные значения  $k$  и  $l$ , при которых волновое число  $l(t)$  меняет знак. Зависимость от времени  $\mu^2(t)$  при этом немонотонна и имеет точку минимума при  $t = l/Sk$ .

Замена переменных  $A_1 = (\mu^2(t) + \lambda^2)A$ ,  $B_1 = \mu^2(t)B$  преобразует систему (14) к системе

$$\frac{dA_1}{dt} + f(t)B_1 = 0, \quad \frac{dB_1}{dt} + g(t)A_1 = 0, \quad (16)$$

$$f(t) = \frac{k\lambda^2 - \mu^2(t)}{4\mu^2(t)}, \quad g(t) = \frac{k\lambda^2 + \mu^2(t)}{4\mu^2(t)},$$

которая сводится к одному уравнению второго порядка

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{g(t)} \frac{dB_1}{dt} - f(t)B_1 = 0. \quad (17)$$

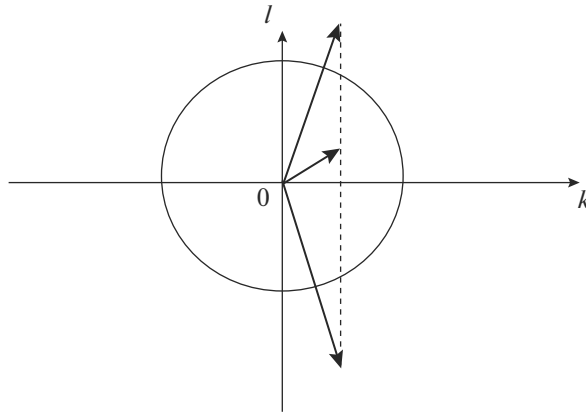
Поскольку функция  $g(t) > 0$ , характер поведения решений уравнения (17) определяется знаком функции  $f(t)$ , т.е. знаком выражения  $\lambda^2 - \mu^2(t)$ . Это выражение можно записать в виде

$$\lambda^2 - \mu^2(t) = S^2 k^2 (t - t_1)(t_2 - t), \quad (18)$$

$$t_{1,2} = \left( l \mp \sqrt{\lambda^2 - k^2} \right) / Sk.$$

Из (18) следует, что для значений волновых чисел, удовлетворяющих условию  $k^2 > \lambda^2$  (короткие волны), значение  $\lambda^2 - \mu^2(t) < 0$  и все решения уравнения (17) или эквивалентной ему системы (14) осциллируют во времени. Пример численного решения системы (14) для этих значений представлен на рис. 1.

Совершенно другое поведение наблюдается в случае  $k^2 < \lambda^2$  (длинные волны), когда значение  $\lambda^2 - \mu^2(t)$  может менять знак. В этом случае на временном промежутке  $t_1 < t < t_2$ , где  $f(t) > 0$ , одно из фундаментальных решений уравнения (17)



**Рис. 2.** Положение волнового вектора возмущений для трех моментов времени в ситуации с двумя точками поворота. С ростом времени волновой вектор проходит через область экспоненциальной неустойчивости (круг на рисунке).

экспоненциально растет, вне этого промежутка, где  $f(t) < 0$ , соответствующее решение осциллирует. Для уравнения (17) точки  $t_1$  и  $t_2$  являются точками поворота, т.е. точками при переходе через которые меняется поведение решения (осциллирующее, экспоненциальное).

Важно подчеркнуть, что появление точек поворота связано с немонотонной зависимостью от времени модуля волнового вектора  $\mu(t)$ . На плоскости волновых чисел экспоненциальному росту отвечают положения волнового вектора  $(k, l(t))$ , лежащие внутри круга радиуса  $\lambda$ , т.е. круга неустойчивости в отсутствие горизонтального сдвига. Если в начальный момент времени волновой вектор лежит внутри этого круга, т.е. выполнено условие  $\mu^2(0) = k^2 + l^2 < \lambda^2$ , то на промежутке интегрирования  $t > 0$  существует одна точка поворота  $t_2$ , при переходе через которую экспоненциальный рост сменяется осцилляциями. При выполнении условий  $\mu^2(0) = k^2 + l^2 > \lambda^2$ ,  $k^2 < \lambda^2$  (внешность круга, лежащая в вертикальной полосе  $|k| < \lambda$ ), на промежутке  $t > 0$  существуют две точки поворота  $t_1, t_2$ . Положение волнового вектора с течением времени при наличии двух точек поворота проиллюстрировано на рис. 2. Если ассоциировать неустойчивость с появлением стадии экспоненциального роста, то учет горизонтального сдвига значительно расширяет область неустойчивости.

Непосредственно в окрестностях точек поворота  $\mu^2(t) \sim \lambda^2$ ,  $g(t) \sim k/2$ . С учетом этих асимптотик и выражения (18) сделаем в уравнении (17) замену  $\tau = Sk t$  и обозначим  $\tau_{1,2} = Sk t_{1,2}$ . При этом получим уравнение

$$\frac{d^2 B_1}{d\tau^2} + r^2(\tau - \tau_1)(\tau - \tau_2)B_1 = 0, \quad r = 1/\lambda^2 S. \quad (19)$$

При слабых сдвигах  $S \ll 1$  уравнение (19) есть уравнение с большим параметром  $r \gg 1$  и для нахождения его решений можно использовать известные асимптотические методы [Найфэ, 1976]. Если обозначить  $\beta(\tau) = (\tau - \tau_1)(\tau - \tau_2)$ , то ВКБ асимптотики общего решения уравнения (19) слева и справа от точки поворота  $\tau_1$  имеют вид

$$B_1 = \beta(\tau)^{-1/4} \left( c_1 \cos \left[ r \int_{\tau}^{\tau_1} \beta(z)^{1/2} dz \right] + c_2 \sin \left[ r \int_{\tau}^{\tau_1} \beta(z)^{1/2} dz \right] \right), \quad \tau < \tau_1, \quad (8)$$

$$B_1 = (-\beta(\tau))^{-1/4} \left( d_1 \exp \left[ r \int_{\tau_1}^{\tau} (-\beta(z))^{1/2} dz \right] + d_2 \exp \left[ -r \int_{\tau_1}^{\tau} (-\beta(z))^{1/2} dz \right] \right), \quad \tau > \tau_1.$$

Эти асимптотические разложения, отвечающие переходу от осциллирующего к экспоненциальному поведению, сращиваются путем введения внутреннего разложения вблизи  $\tau_1$ , которое представляется в терминах функций Эйри  $Ai(z)$  и  $Bi(z)$  [Найфэ, 1976]. Внутреннее разложение имеет вид:  $B_1 = b_1 Ai(z) + b_2 Bi(z)$ . Используя асимптотики функций Эйри, можно выразить коэффициенты  $c_1, c_2$  и  $d_1, d_2$  через  $b_1, b_2$ . Отсюда следует, что коэффициенты  $c_1, c_2$  однозначно выражаются через  $d_1, d_2$ . Таким образом, осуществляется сращивание внутреннего и внешнего разложений (8). Построенные асимптотики показывают, что при переходе через точку  $\tau_2$  экспоненциальный рост сменяется осцилляциями.

Результаты прямого численного интегрирования системы (16) в ситуации с двумя точками поворота представлены на рис. 3. Приняты значения па-

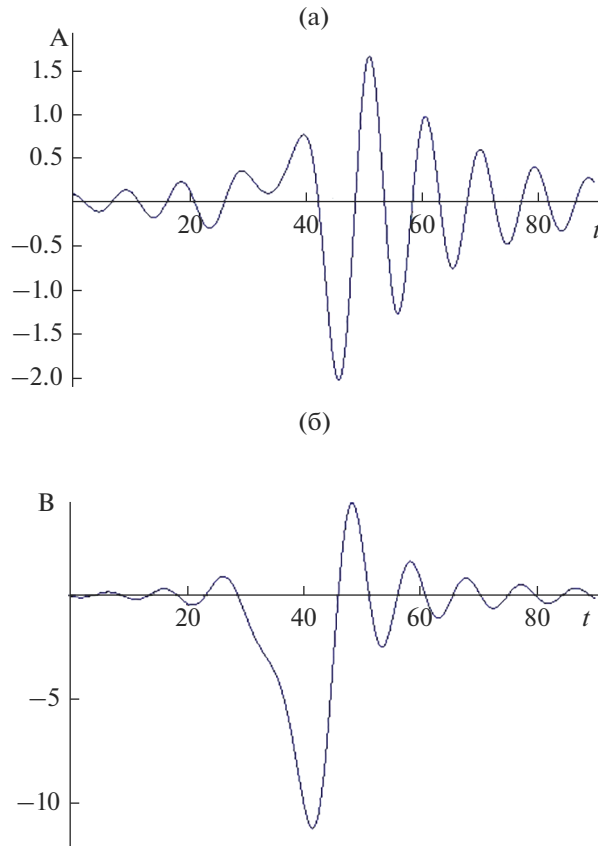


Рис. 3. Зависимость от времени амплитуд при  $k = 2.7$ ,  $l = 10$ ,  $S = 0.1$ ,  $\lambda^2 = 8$ . Точки поворота  $t_1 = 33.916$ ,  $t_2 = 40.158$ .

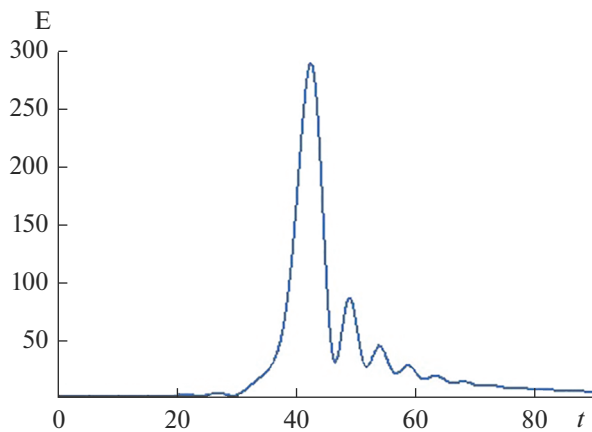


Рис. 4. Зависимость от времени полной энергии возмущений для указанных значений параметров.

раметров  $k = 2.7$ ,  $l = 10$ ,  $S = 0.1$ ,  $\lambda^2 = 8$ . Значение волнового числа взято близким у критическому (пороговому) значению  $k_{kr} = \lambda = \sqrt{8} = 2.828$ . При этом промежуток экспоненциального роста достаточно мал. При более сильных отклонениях от критического значения на промежутке экспоненциального роста растущее решение становится очень большим и график решения не вмещает полностью растущую часть. Отметим, что соглас-

но (18) длина промежутка экспоненциального роста определяется выражением

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2\sqrt{\lambda^2 - k^2}}{Sk}.$$

При фиксированном  $\lambda^2 > k^2$  и в пределе длинных волн  $k \rightarrow 0$  значение  $\Delta t \rightarrow \infty$ . Стадия экспоненциального роста длинноволновых возмуще-

ний, таким образом, по времени становится очень длинной.

На рис. 4 для принятых значений параметров представлена зависимость от времени полной энергии возмущений (7), которую для возмущений в форме немодальных волн (15) можно записать в виде

$$E(t) = (1/4)(\mu^2(t)(A^2(t) + B^2(t)) + \lambda^2 A^2(t)).$$

Данное выражение получается после осреднения энергии по горизонтальным координатам. Отчетливо виден резкий скачок полной энергии после прохождения первой точки поворота. Аналогичный скачок наблюдается и в зависимости от времени потенциальной энергии  $\Pi(t) = (1/4)\lambda^2 A^2(t)$ .

Таким образом, результаты данного раздела показывают, что в течении с горизонтальным сдвигом скорости динамика возмущений приобретает принципиально новые особенности. Основная особенность связана с эффектом временного экспоненциального роста возмущений, т.е. роста на конечном временном промежутке. Баротропный компонент скорости течения, таким образом, может приводить к новым сценариям развития бароклинической неустойчивости.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках дискретной квазигеострофической модели с двумя вертикальными уровнями исследована задача о линейной устойчивости течения стратифицированной вращающейся жидкости с постоянными вертикальным и горизонтальным сдвигами скорости. Показано, что учет горизонтального сдвига приводит к качественному изменению динамики волновых возмущений. Взамен традиционного экспоненциального роста неустойчивых волн, на начальном этапе эволюции может наблюдаться временный экспоненциальный рост, т.е. рост на конечном временном промежутке. Это рост сменяется стадией низкочастотных колебаний. Дана кинематическая интерпретация эффекта временного экспоненциального роста, связанная с прохождением зависящего от времени волнового вектора возмущения через область экспоненциальной неустойчивости, существующей в отсутствие горизонтального сдвига. Показано, что в математическом плане этот эффект описывается решениями дифференциального уравнения второго порядка, содержащего точки поворота.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (номер проекта 22-27-00039).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Гилл А. Динамика атмосферы и океана. М.: Мир, 1986. Т. 2. 415 с.

Калашник М.В. Линейная динамика волн Иди в присутствии горизонтального сдвига // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2009. Т. 45. № 6. С. 764–774.

Калашник М.В., Курганский М.В., Чхетиани О.Г. Бароклиническая неустойчивость в геофизической гидродинамике // Успехи физических наук. 2022. Т. 192. № 10. С. 1110–1144.

<https://doi.org/10.3367/UFN.2021.08.039046>

Кочин Н.Е., Кибель Н.А., Розе Н.В. Теоретическая гидродинамика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963. 530 с.

Ламб Г. Гидродинамика. Л.: Гостехиздат, 1947. 1084 с.

Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 600 с.

Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. М.: Мир, 1981. Т. 1. 480 с., Т. 2. 365 с.

Монин А.С. Теоретические основы геофизической гидродинамики. Л.: Гидрометеиздат, 1988. 433 с.

Найфэ А. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.

Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.

Фабер Т.Е. Гидроаэродинамика. М.: Постмаркет, 2001. 560 с.

Barcelon A., Bishop C.H. Nonmodal development of baroclinic waves undergoing horizontal shear deformation // J. Atmos. Sci. 1998. V. 55. № 4. P. 3583–3597.

Bishop C.H. On the behavior of baroclinic waves undergoing horizontal shear deformation I: The “RT” phase diagram // Quart. J. Roy. Met. Soc. 1993. V. 119. P. 221–240.

Chagelishvili G.D., Khujadze G.R., Lominadze J.G., Rogava A.D. Acoustic Waves in Unbounded Shear Flows // Physics of Fluids. 1997. V. 9. P. 1955–1965.

Chagelishvili G.D., Tevzadze A.G., Bodo G., Moiseev S.S. Linear mechanism of wave emergence from vortices in smooth shear flows // Phys. Rev. Letters. 1997. V. 79. № 17. P. 3178–3181.

Eady E.T. Long waves and cyclone waves // Tellus. 1949. № 1(3). P. 33–52.

Held I.M., Pierrehumbert R.T., Garner S.T., Swanson K.L. Surface quasi-geostrophic dynamics // J. Fluid Mech. 1995. V. 282. P. 1–20.

Kalashnik M.V., Chkhetiani O.G., Kurgansky M.V. Discrete SQG models with two boundaries and baroclinic instability of jet flows // Phys. Fluids. 2021. V. 33. P. 076608. <https://doi.org/Submitted:14May2021>. Accepted: 04 July 2021. Published Online: 20 July 2021. <https://doi.org/10.1063/5.0056785>

Kalashnik M.V., Mamatsashvili G.R., Chagelishvili G.D., Lominadze J.G. Linear dynamics of non-symmetric perturbations in geostrophic flows with a constant horizontal shear // Quart. J. Roy. Met. Soc. 2006. V. 132. № 615. P. 505–518.

Pedlosky J., *Geophysical Fluid Dynamics* (Springer-Verlag, Berlin/New York, 1987). P. 710.

Phillips N.A. Energy transformation and meridional circulations associated with simple baroclinic waves in a two-level, quasi-geostrophic model // Tellus. 1954. V. 6. P. 273–283.

## Shear Flow Instability over a Finite Time Interval

M. V. Kalashnik<sup>1, 2, 3, \*</sup>

<sup>1</sup>*Obukhov Institute of Atmospheric Physics RAS, Pyzhevsky per., 3, Moscow, 119017 Russia*

<sup>2</sup>*Institute of Physics of the Earth. O.Yu. Schmidt RAS, Bolshaya Gruzinskaya str., 10, Moscow, Moscow, 123242 Russia*

<sup>3</sup>*Research and Production Association Typhoon, Pobedy str., 4, Obninsk, Kaluga obl., 249038 Russia*

*\*e-mail: kalashnik-obn@mail.ru*

Within the framework of a discrete quasi-geostrophic model with two vertical levels, the problem of linear stability of the flow of a stratified rotating fluid with constant vertical and horizontal velocity shifts is solved. It is shown that taking into account the horizontal shear leads to a qualitative change in the dynamics of unstable wave disturbances. The main feature is related to the effect of temporary exponential growth of unstable perturbations, i.e. growth over a finite time period. This effect manifests itself in the alternation of stages of smooth oscillating behavior (in time) with stages of exponential (explosive) growth of finite duration. A kinematic interpretation of the effect of temporal exponential growth is given, which is associated with the passage of a time-dependent perturbation wave vector through the region of exponential instability that exists in the absence of a horizontal shear. It is shown that mathematically this effect is described by solutions of a second-order differential equation containing turning points. Asymptotic solutions of the equation are given for weak horizontal shifts.

**Keywords:** baroclinic instability, horizontal and vertical velocity shear, growth rate, unstable modes