

УДК 532.5:551.465

## ДАЛЬНИЕ ПОЛЯ НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА БЕСКОНЕЧНО ГЛУБОКОГО ОКЕАНА И ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА, ВОЗБУЖДАЕМЫЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ

© 2023 г. В. В. Булатов<sup>а</sup>, \*, И. Ю. Владимиров<sup>б</sup>, \*\*

<sup>а</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Вернадского просп., 101-1, Москва, 119526 Россия

<sup>б</sup>Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Нахимовский просп., 36, Москва, 117997 Россия

\*e-mail: [internalwave@mail.ru](mailto:internalwave@mail.ru)

\*\*e-mail: [iyuvladimirov@rambler.ru](mailto:iyuvladimirov@rambler.ru)

Поступила в редакцию 13.01.2023 г.

После доработки 15.02.2023 г.

Принята к публикации 10.03.2023 г.

Решена задача о построении асимптотик дальних волновых полей, возникающих на границе раздела льда и бесконечно глубокой однородной жидкости при обтекании локализованного источника возмущений. Получено интегральное представление решения и с помощью метода стационарной фазы построено асимптотическое представление решения для сверхкритических режимов волновой генерации. Проведено сравнение точных и асимптотических результатов, и показано, что асимптотики вдали от источника возмущений позволяют описать амплитудно-фазовую структуру дальних волновых полей.

**Ключевые слова:** ледяной покров, возвышение поверхности раздела, дальние поля, локализованный источник

**DOI:** 10.31857/S0002351523030033, **EDN:** TNKLXC

Характерным природным фактором полярных районов Мирового океана и замерзающих морских акваторий является наличие ледяного покрова. Плавающий ледяной покров, определяющий динамическое взаимодействие между океаном и атмосферой, влияет на динамику не только морской поверхности, но и подповерхностных вод [Marchenko et al., 2010; Булатов, 2017; Morigov, 2018; Velarde et al., 2018]. В общем движении по вертикали участвует как ледяной покров, так и вся масса жидкости под ним. Волновые процессы под ледяным покровом проявляются в его деформации, которая зависит от физико-механических свойств льда. Воздействием волн можно объяснить такие явления как образование трещин в сплошных ледяных полях, разрушение льда в прикромочных зонах, взламывание припая. Изучение волновых процессов в море с плавающим ледяным покровом актуально для изучения его реакции на различные гидродинамические возмущения, движущиеся средства, процессы распада ледяных полей в интересах судоходства, а также совершенствования методов дистанционного зондирования поверхности ледяного покрытия. Современное состояние проблемы и подроб-

ный обзор работ содержится в [Булатов, 2017; Mei et al., 2017; Ильичев, 2003].

В природных условиях причинами деформации ледяной поверхности могут быть, например, импульсные и периодические изменения давления, подводные источники различной физической природы (в том числе подводные взрывы), движущиеся по льду нагрузки постоянной и переменной интенсивности, локализованные возмущения морской поверхности [Сидняев, 2013; Булатов, 2017; Mei et al., 2017; Marchenko et al., 2010]. Обычно предполагается, что ледяной покров является сплошным, то есть его горизонтальные масштабы превышают длины возбуждаемых волн [Савин и др., 2015; Стурова, 2021]. Ледяной покров при достаточно естественных условиях моделируется тонкой упругой пластиной, деформации малы и пластина является физически линейной [Dinvey et al., 2019; Стурова, 2015; Ильичев, 2021]. В дальнейшем для проведения прогнозных расчетов возмущений ледяного покрова можно подбирать параметры использованной модели так, чтобы приблизить смоделированную волновую систему к реально наблюдаемым в природных условиях картинам возмущения поверхности

льда [Букатов, 2017; Свиркунов и др., 2014; Булатов и др., 2015; Mei et al., 2017].

Целью настоящей работы является решение ранее не рассматриваемой задачи о построении асимптотик дальних волновых возмущений ледяного покрова, возбуждаемых локализованным источником в потоке однородной жидкости бесконечной глубины.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМЫ РЕШЕНИЙ

Рассматривается поток идеальной бесконечно глубокой жидкости, который обтекает точечный источник мощности массы  $q$  ( $q = \text{const}$ ). Сверху течение ограничено ледяным покровом толщины  $h$ . Горизонтальная плоскость  $\xi y$  совпадает с невозмущенной границей раздела жидкости плотности  $\rho_0$  и льда плотности  $\rho_1$ . Скорость потока жидкости направлена вдоль оси  $\xi$  и равна  $V$ , источник расположен в точке  $(0, 0, z_0)$ ,  $z_0 < 0$ . Обозначим через  $\varphi(\xi, y, z)$  установившийся во времени потенциал возмущений скорости:  $\nabla\varphi = (u, v, w)$ , и через  $\eta(\xi, y)$  — установившуюся величину возвышения поверхности раздела жидкости и ледового покрова. Тогда  $(V + u, v, w)$  — вектор скорости произвольной частицы жидкости. В линейном приближении математическая постановка задачи формулируется следующим образом [Букатов, 2017; Савин и др., 2015; Стурова, 2021; Ильичев, 2003]

$$\left(\Delta + \frac{\partial^2}{z^2}\right)\varphi = q\delta(\xi)\delta(y)\delta(z - z_0), \quad (1)$$

$$\frac{D\varphi}{Dt} + g\eta - C\Delta\eta + B\Delta^2\eta + A\frac{D^2\eta}{Dt^2} = 0, \quad z = 0, \quad (2)$$

$$\frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad z = 0, \quad (3)$$

$$\varphi \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty, \quad (4)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \frac{D}{Dt} = V\frac{\partial}{\partial\xi},$$

$$A = \frac{h\rho_1}{\rho_0}, \quad B = \frac{Eh^3}{12\rho_0(1 - v_0^2)}, \quad C = \frac{\sigma h}{\rho_0},$$

где  $g$  — ускорение свободного падения,  $E$  — модуль Юнга льда,  $v_0$  — коэффициент Пуассона,  $\sigma$  — начальное напряжение. Характерные значения этих величин в морских условиях равны [Marchenko et al., 2010; Букатов, 2017; Morigozov, 2018;

Velarde et al., 2018]:  $\rho_0 = 1025 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ ,  $\rho_1 = 0.9\rho_0$ ,

$E = 3 \times 10^9 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$ ,  $v_0 = 0.3$ ,  $\sigma = 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$ . Из двух гра-

ничных условий (2)–(3) можно получить одно условие для  $\varphi$

$$\frac{D^2\varphi}{Dt^2} + g\frac{\partial\varphi}{\partial z} - C\Delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) + B\Delta^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) + A\frac{D^2}{Dt^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = 0, \quad z = 0. \quad (5)$$

В терминах фурье образа потенциала

$$\Phi(\mu, v, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ivy) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi, y, z) \exp(i\mu\xi) dy d\xi.$$

Задача (1), (4), (5) формулируется следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\Phi}{z^2} - k^2\Phi &= q\delta(z - z_0), \\ -\mu^2V^2\Phi + (g + Ck^2 + Bk^4 - A\mu^2V^2)\frac{\partial\Phi}{\partial z} &= 0, \\ z &= 0, \\ \Phi \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty, \quad k^2 &= \mu^2 + v^2. \end{aligned}$$

Решение этой задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi &= -\frac{(\mu^2V^2 \text{sh } kz + kP \text{ch } kz) \exp(kz_0)}{kR}, \\ & \quad z_0 < z \leq 0, \\ \Phi &= -\frac{(\mu^2V^2 \text{sh } kz_0 + kP \text{ch } kz_0) \exp(kz)}{kR}, \\ & \quad z < z_0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$P = g + Ck^2 + Bk^4 - A\mu^2V^2, \quad R = -\mu^2V^2 + kP.$$

Тогда из (3), (6) Фурье образ возвышения  $\Psi$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Psi &= -\frac{iqV\mu \exp(kz_0)}{(Ak + 1)b(\mu, v)}, \quad \Omega(k) = \frac{k(g + Ck^2 + Bk^4)}{Ak + 1}, \\ b(\mu, v) &= \Omega^2(k) - \mu^2V^2. \end{aligned}$$

Здесь  $\Omega(k)$  — дисперсионное соотношение для волн в неподвижной жидкости под ледовым покровом [Савин и др., 2015; Стурова, 2021; Ильичев, 2003]. Тогда выражение для возвышения имеет вид

$$\begin{aligned} \eta(\xi, y) &= \frac{-iqV}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ivy) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\mu, v)}{b(\mu, v)} \exp(-i\mu\xi) dv d\mu, \\ f(\mu, v) &= \frac{\mu \exp(kz_0)}{Ak + 1}. \end{aligned} \quad (7)$$

2. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИК РЕШЕНИЙ

В [Савин и др., 2015] отмечено, что решение в форме (7) представляет сложную в вычислительном плане задачу из-за возникающих в расчетных формулах сингулярностей. Рассмотрим поведение функции  $\eta(\xi, y)$  вдоль некоторого направления  $S_\alpha$ , составляющего угол  $\alpha$  с положительным направлением оси  $\xi$ , т.е. будем считать, что  $\xi = r \cos \alpha$ ,  $y = r \sin \alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq \pi$ . Чтобы найти асимптотику интеграла (7) при  $r \rightarrow \infty$  необходимо перевести контур интегрирования по переменной  $\mu$  в нижнюю полуплоскость. Интеграл в нижней полуплоскости экспоненциально мал при  $r \rightarrow \infty$ . Основной вклад в (7) будет определяться полюсами подынтегральной функции, расположенными на действительной оси. Эти два полюса (дисперсионные кривые)  $\mu = \pm \mu_1(v)$  находятся из решения уравнения  $b(\mu, v) = 0$ , т.е.  $\mu^2 V^2 = \Omega^2(\sqrt{\mu^2 + v^2})$ . Это уравнение имеет действительные корни лишь при выполнении условия:  $V > V_* = \Omega(k_*)/k_*$ , где  $k_*$  – единственные положительный корень уравнения:  $2ABk^5 + 3Bk^4 + Ck^2 - 2Agk - g = 0$  [Савин и др., 2015; Ильичев, 2021].

Далее предполагается, что  $V > V_*$ , поскольку только в этом случае источник генерирует в набегающем потоке волновые возмущения [Савин и др., 2015; Стурова, 2021; Ильичев, 2003; Sturova, 2015]. Тогда для суммарного вклада вычетов  $\mu = \pm \mu_1(v)$  можно получить

$$\eta(\xi, y) = \frac{-iqV}{4\pi} \int_{L_+(\alpha)} \frac{f(\mu, v)}{G(\mu, v)} \cos(\mu\xi + vy) dv, \tag{8}$$

$$G(\mu, v) = \frac{\partial b(\mu, v)}{\partial \mu}, \quad \mu = \mu_1(v),$$

где  $L_+(\alpha)$  – та часть дисперсионной кривой  $\mu = \mu_1(v)$ , для которой проекция вектора групповой скорости на направление  $S_\alpha$  положительна, т.е. выполнено следующее неравенство:  $(V - \Omega'(k) \frac{\mu}{k}) \cos(\alpha) - \Omega'(k) \frac{v}{k} \sin(\alpha) > 0$ . Это условие (условие излучения) означает, что волновая энергия распространяется наружу от источника возмущений. Интеграл (8) можно рассматривать как криволинейный интеграл второго рода вдоль кривой  $L_+(\alpha)$ , причем направление обхода этой кривой выбирается таким образом, чтобы проекция касательной к  $L_+(\alpha)$  на направление  $S_{\alpha+\pi/2}$  была положительной:  $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) d\mu + \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) dv > 0$ .

Асимптотика интеграла (8) при  $r \rightarrow \infty$  вычисляется методом стационарной фазы

$$\eta(\xi, y) \approx -\frac{qV}{\sqrt{2\pi r |D(k)|}} \frac{\mu_1(k) \exp(kz_0) \cos(\Theta)}{(Ak + 1)T},$$

$$T = (\Omega(k) \Omega'(k) \frac{\mu_1(k)}{k} - \mu_1(k) V^2) \cos(\alpha) + \Omega(k) \Omega'(k) \frac{v_1(k)}{k} \sin(\alpha),$$

$$D(k) = \left( -\mu_1'(k) v_1''(k) + v_1'(k) \mu_1''(k) \right) \times \left( (\mu_1(k))^2 + (v_1(k))^2 \right)^{-3/2}, \tag{9}$$

$$\Theta = \mu_1(k) \xi - v_1(k) y + \frac{\pi}{4} \text{sign}(D(k)),$$

$$k = k_0(\alpha), \quad \mu_1(k) = \frac{\Omega(k)}{V},$$

$$v_1(k) = \sqrt{k^2 - (\Omega(k)/k)^2},$$

где  $k_0(\alpha)$  – единственный корень уравнения  $\mu_1'(k) \cos(\alpha) - v_1'(k) \sin(\alpha) = 0$ , функции  $\mu_1(k)$ ,  $v_1(k)$  – определяют параметрическое (с параметром  $k$ ) представление правой ( $v \geq 0$ ) ветви дисперсионной кривой  $\mu_1(v)$ ,  $D(k)$  – ориентированная кривизна ветви  $(\mu_1(k), -v_1(k))$ , т.е. левой ( $v \leq 0$ ) половины дисперсионной кривой  $\mu_1(v)$ . Отметим, что  $(\mu_1(k), -v_1(k))$  – единственная стационарная точка фазовой функции интеграла (8), лежащая на кривой  $L_+(\alpha)$ . Так как эта точка расположена на левой ( $v \leq 0$ ) ветви дисперсионной кривой, то в формулах (9) кривизна дисперсионной кривой вычисляется только для левой ветви.

На рис. 1–3 представлены результаты расчетов возвышения ледяного покрова для следующих параметров, характерных для реальных гидрофизических условий Мирового океана [Marchenko et al., 2010; Булатов, 2017; Morozov, 2018; Velarde et al., 2018]:  $q = 5 \frac{M^3}{c}$ ,  $V = 10 \frac{M}{c}$ ,  $h = 0.25$  м,  $z_0 = -2$  м, что в данной постановке позволяет, например, моделировать обтекание затупленного достаточно протяженного тела с диаметром порядка одного метра [Булатов и др., 2015]. Очевидно, что в дальнейшем, используя операцию свертки, наибольший выигрыш при использовании данного подхода можно получить при исследовании волновых возмущений ледяного покрова, возбуждаемых распределенными в пространстве источниками различной физической природы, как естественного, так и антропогенного характеров [Свирикунов и др., 2014; Булатов и др., 2015]. На рис. 1 приведены результаты расчетов по формулам (8), на рис. 2 приведены результаты расчетов по асимптотическим

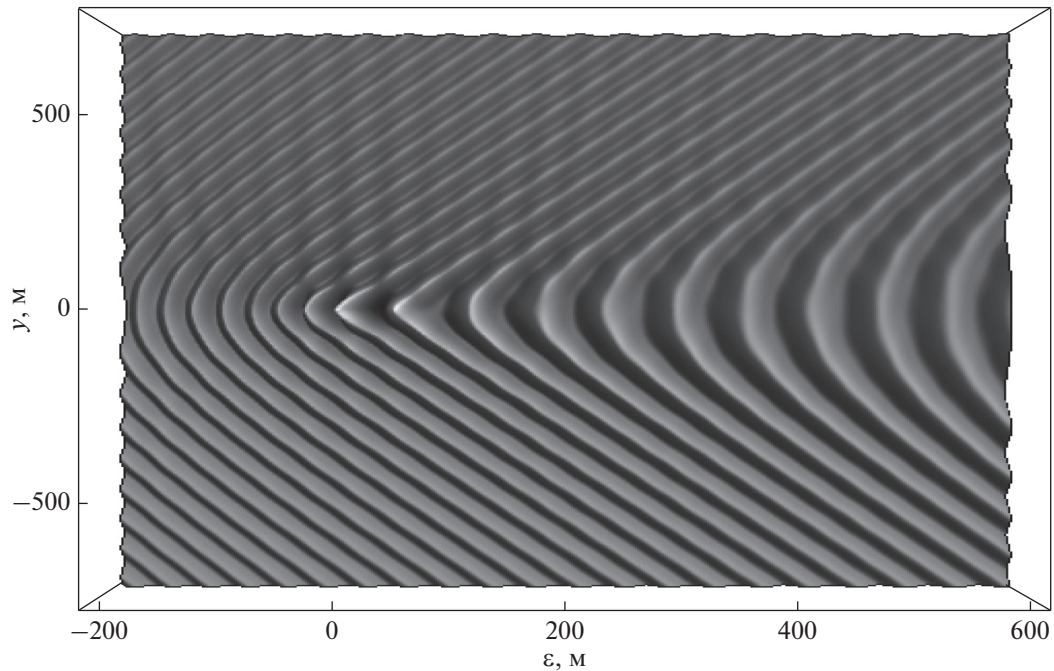


Рис. 1. Возвышение ледяного покрова: точное решение.

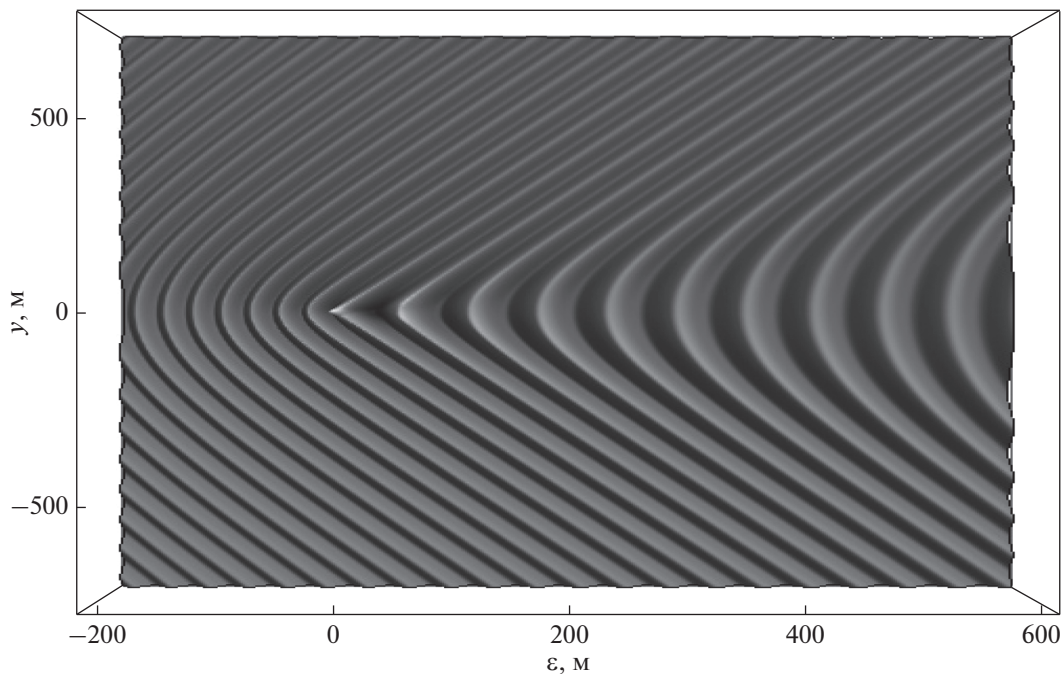


Рис. 2. Возвышение ледяного покрова: асимптотика стационарной фазы.

формулам (9). Как видно из представленных результатов, построенные асимптотики адекватно описывают амплитудно-фазовую структуру дальних волновых полей возвышения ледяного покрова. На рис. 3 представлена “срезка” амплитуды возвышения вдоль оси  $\xi$  при фиксированном

значении  $y$ , рассчитанная по формуле (8). Как показывают численные расчеты, для использованных параметров источника возбуждения характерные величины возвышения составляют не менее 5 миллиметров, что, по порядку величин, не противоречит наблюдаемым в природных усло-

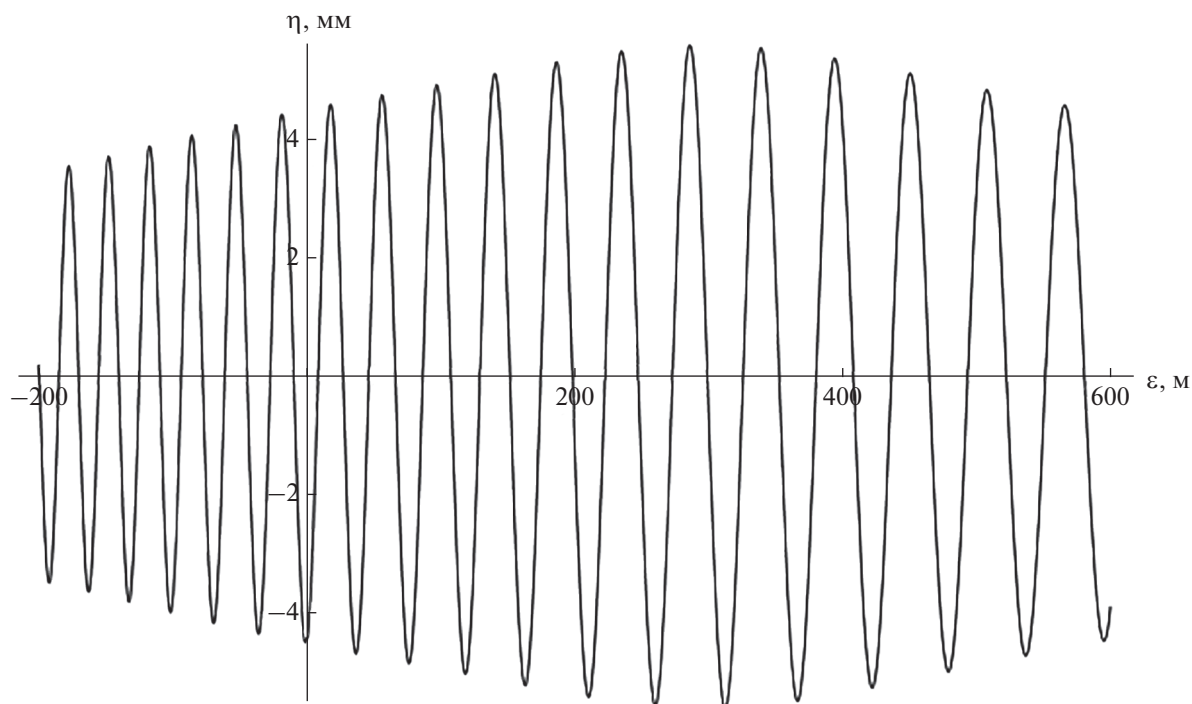


Рис. 3. Возвышение ледяного покрова при  $y = 200$  м.

виях значениям возмущения ледяного покрова [Marchenko et al., 2010; Булатов, 2017; Morigozov, 2018; Velarde et al., 2018].

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе с помощью метода стационарной фазы построены асимптотические решения, описывающие динамику волновых пакетов, возбуждаемых на поверхности ледяного покрова при обтекании локализованного источника потоком бесконечно глубокой однородной жидкости. Построенные асимптотики дальних полей дают возможность эффективно рассчитывать основные характеристики волновых возмущений, и, кроме того, качественно анализировать полученные решения, что важно для правильной постановки математических моделей волновой динамики. Полученные асимптотические результаты с различными значениями входящих в них физических параметров позволяют провести оценку характеристик возмущений ледяного покрова, наблюдаемых в реальных океанических условиях. Построенные в работе асимптотики позволяют рассчитывать дальние волновые поля, в том числе, и от нелокальных источников возмущений различной физической природы. В результате проведения модельных многовариантных расчетов по асимптотическим формулам смоделированная волновая система может быть приближена к наблюдаемым в натурных условиях волновым картинкам, что позволяет оценить физические параметры

реальных источников возбуждения волн в морской среде с ледовым покрытием. Поэтому полученные асимптотические результаты дают возможность определить основные характеристики начальных возмущений, варьируя модельные значения исходных параметров. Таким образом, математические модели волновой генерации на поверхности раздела морской воды и льда могут быть не только верифицированы, но и использованы для проведения прогнозных оценок.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ грант № 23-21-00194.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Булатов А.Е. Волны в море с плавающим ледяным покровом. Севастополь: ФГБУН МГИ, 2017. 360 с.
- Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015. 735 с.
- Ильичев А.Т. Уединенные волны в моделях гидродинамики. М.: Физматлит, 2003. 256 с.
- Ильичев А.Т. Эффективные длины волн огибающей на поверхности воды под ледяным покровом: малые амплитуды и умеренные глубины // ТМФ. 2021. Т. 28. № 3. С. 387–408.
- Савин А.С., Савин А.А. Пространственная задача о возмущениях ледяного покрова движущимся в жидкости диполем // Изв. РАН. МЖГ. 2015. № 5. С. 16–23.
- Свиркунов П.Н., Калашник М.В. Фазовые картины диспергирующих волн от движущихся локализованных источников // УФН. 2014. Т. 184. № 1. С. 89–100.

- Сидняев Н.И.* Теоретические исследования гидродинамики при подводном взрыве точечного источника // Инженерный журн.: наука и инновации. 2013. № 2. URL: <https://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/614.html>.
- Стурова И.В.* Движение нагрузки по ледяному покрову с неравномерным сжатием // Изв. РАН. МЖГ. 2021. № 4. С. 63–72.
- Dinvaу E., Kalisch H., Parau E.I.* Fully dispersive models for moving loads on ice sheets // J. Fluid Mech. 2019. V. 876. P. 122–149.
- Marchenko A.V., Morozov E.G., Muzylev S.V., Shestov A.S.* Interaction of short internal waves with the ice cover in an Arctic fjord // Oceanology. 2010. V. 50(1). P. 18–27.
- Mei C.C., Stiassnie M., Yue D.K.-P.* Theory and applications of ocean surface waves. Advanced series of ocean engineering. V. 42. London: World Scientific Publishing, 2017. 1500 p.
- Morozov E.G.* Oceanic internal tides. Observations, analysis and modeling. Berlin: Springer, 2018. 317 p.
- Sturova I.V.* Radiation of waves by a cylinder submerged in water with ice floe or polynya // J. Fluid Mech. 2015. V. 784. P. 373–395.
- Velarde M.G., Tarakanov R.Yu., Marchenko A.V. (Eds.)*. The ocean in motion. Springer Oceanography. Springer International Publishing AG, 2018. 625 p.

## Far Fields at Interface between an Infinitely Deep Ocean and Ice Excited by a Localized Source

V. V. Bulatov<sup>1, \*</sup> and I. Yu. Vladimirov<sup>2, \*\*</sup>

<sup>1</sup>*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Vernadskogo pr., 101-1, Moscow, 119526 Russia*

<sup>2</sup>*Shirshov Institute of Oceanology RAS, Nahimovskiy, pr., 36, Moscow, 117997 Russia*

\**e-mail: internalwave@mail.ru*

\*\**e-mail: iyuvladimirov@rambler.ru*

The problem of constructing asymptotics of the far wave fields that arise at the interface between ice and an infinitely deep liquid in the flow around a localized source is solved. An integral representation of the solution is obtained, and an asymptotic representation of the solution for supercritical modes of wave generation is constructed using the stationary phase method. The exact and asymptotic results are compared, and it is shown that the asymptotics far from the source make it possible to describe the amplitude-phase structure of far wave fields.

**Keywords:** ice cover, interface elevation, far fields, localized source