

УДК 551.466

КРИТЕРИЙ ПРИМЕНИМОСТИ ТЕОРИИ ДЛИННЫХ ВОЛН ДЛЯ ОПИСАНИЯ ДИСПЕРГИРУЮЩИХ ВОЛН ЦУНАМИ

© 2023 г. М. А. Носов^{a, b, *}, А. И. Зарубина^{a, **}

^aФизический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы, 1, стр. 2, Москва, 119991 Россия

^bИнститут морской геологии и геофизики Дальневосточного отделения РАН,
ул. Науки, 1Б, Южно-Сахалинск, 693022 Россия

*e-mail: m.a.nosov@mail.ru

**e-mail: zarubina.ai17@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 23.03.2023 г.

После доработки 17.04.2023 г.

Принята к публикации 26.04.2023 г.

Проанализированы условия применимости бездисперсионной теории длинных волн для воспроизведения диспергирующих волн цунами. В качестве количественного критерия предложена к использованию дистанция дисперсионного разрушения, — величина, которая однозначно определяется длиной волны, доминирующей в спектре начального возвышения водной поверхности в очаге цунами, и корректирующим коэффициентом α . Физический смысл величины α — доля длины волны, на которую диспергирующий волновой пакет отстанет от фронта длинной волны, при распространении на расстояние, равное дистанции дисперсионного разрушения. С использованием модельного остаточного смещения поверхности дна, геометрические параметры которого варьируются случайным образом, в рамках предположения о мгновенной генерации волн и с учетом сглаживающего эффекта водного слоя методом Монте-Карло установлена связь между точностью воспроизведения волн бездисперсионной моделью и величиной α . С использованием “шкалы коэффициента α ” выполнено ранжирование критериев, которые были предложены ранее другими авторами.

Ключевые слова: распространение цунами, фазовая дисперсия, длинные волны

DOI: 10.31857/S0002351523040132, EDN: YOYESH

1. ВВЕДЕНИЕ

Численное моделирование зарекомендовало себя в качестве эффективного средства изучения и прогнозирования волн цунами [Gisler, 2008; Носов, 2014; Behrens and Dias, 2015; Titov et al., 2016; Saito and Kubota, 2020]. Модели, построенные на основе трехмерных уравнений гидродинамики, существуют, но все они используются для воспроизведения волн на ограниченных акваториях [Shijo et al., 2016; Kozelkov et al., 2017; Носов, Колесов, 2019]. Расчет трансокеанского или глобального распространения цунами с применением 3D моделей невозможен в силу колоссальной вычислительной сложности задачи.

Существенный выигрыш в объеме вычислений достигается при использовании 2D моделей, которые строятся на основе уравнений гидродинамики, проинтегрированных вдоль вертикальной координаты. К этому классу относятся классические бездисперсионные уравнения теории длинных волн (мелкой воды) и различные виды уравнений Буссинеска [Madsen et al., 1991; Пели-

новский, 1996]. Понижение размерности задачи (3D $\rightarrow$ 2D) приводит к ограничению способности моделей описывать фазовую дисперсию гравитационных волн: классические уравнения мелкой воды не воспроизводят дисперсию в принципе, а уравнения Буссинеска способны воспроизводить только слабую дисперсию.

Натурные наблюдения показывают, что фазовая дисперсия присуща волнам цунами как и любым гравитационным волнам на воде [Куликов и др., 2005; Watada et al., 2014; Levin and Nosov, 2016; Korolev et al., 2019; Saito, 2019]. Примечательно, что дисперсия цунами может быть обязана не только вертикальной структуре волновых течений, но также и набору факторов, которые принято считать вторичными (сжимаемость воды, упругость дна, стратификация и т.д.). Влияние вторичных факторов невелико, — оно становится значимым только при трансокеанском распространении волн [Watada et al., 2014]. Но классическая (нормальная) дисперсия гравитационных волн на воде, влияющая на короткопериодные компоненты спектра цунами, может проявляться

и на сравнительно небольших удалениях от источника (десятки и сотни километров), и даже внутри области источника. В данной работе мы остановимся именно на эффекте классической дисперсии.

Дисперсионные эффекты имеют свойство накапливаться по мере распространения волн. Так как это накопление происходит плавно, то четкой границы, до которой теория длинных волн может адекватно описывать диспергирующие волны цунами, не существует. Для определения такой границы необходимо ввести количественную меру точности расчета волновых форм и задаться определенным значением этой меры. Субъективная оценка “степени проявления дисперсии”, предлагаемая различными авторами, очевидно, не может привести к выработке единого количественного критерия.

Проблема определения пределов, до которых теория длинных волн способна адекватно описывать диспергирующие волны цунами, занимала исследователей уже в самом начале эпохи численного моделирования цунами. Первый из таких критериев [Kajiura, 1963, 1970; Shuto, 1991] — назовем его “критерий Каджауры” — опирается на оценку величины безразмерного параметра

$$p_a = (6H/R)^{1/3}(a/H), \quad (1)$$

где H — глубина океана, R — расстояние, пройденное волной (удаление от источника), a — протяженность источника цунами в направлении распространения волны. В соответствии с критерием Каджауры дисперсионными эффектами можно пренебречь при условии $p_a > 4$. Критерий применим на больших удалениях от источника: $R > 10a$.

В работах [Пелиновский, 1982; Mirchina, Pelinovsky, 1982; Пелиновский, 1996] была предложена к рассмотрению размерная величина “длина дисперсии” — расстояние, на котором дисперсионные эффекты становятся заметными (критерий Пелиновского)

$$L_d = a_d \lambda^3 / H^2, \quad (2)$$

где a_d — безразмерный численный коэффициент, зависящий от формы начального возвышения и условий заметности дисперсионных эффектов ($a_d \approx 0.06$ [Mirchina, Pelinovsky, 1982]), λ — длина волны.

Авторы статьи [Glinsdal et al., 2013] предложили рассматривать “нормализованное время дисперсии” (normalized dispersion time) — безразмерную величину, определяемую формулой

$$\tau = (C_0 - C_{ph}(\lambda))t/\lambda, \quad (3)$$

где $C_0 = \sqrt{gH}$ — скорость длинных волн, $C_{ph}(\lambda)$ — фазовая скорость гравитационных волн длины λ , которая рассчитывается по классической формуле: $C_{ph} = \omega/k = \sqrt{gk \operatorname{th}(kH)}/k$, t — время распространения волны, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число. При $kH \ll 1$ (длинные волны) формула (3) представима в следующем приближенном виде:

$$\tau \approx \frac{6H^2 L}{\lambda^3}, \quad (4)$$

где $L = C_0 t$ — расстояние, которое пройдет длинная волна за время t . По критерию, который мы далее будем именовать “критерий Глимсдала”, дисперсионные эффекты малы при $\tau < 0.01$, а при $\tau > 0.1$ эти эффекты становятся существенными.

Авторы статьи [Glinsdal et al., 2013] отмечают, что их критерий находится в соответствии с критерием Каджауры. Действительно, если принять, что длина волны цунами равна горизонтальной протяженности источника ($\lambda \approx a$), то параметры τ и p_a оказываются связаны между собой формулой

$$\tau = \frac{36}{p_a^3}. \quad (5)$$

В соответствии с формулой (5) критическая величина параметра $p_a = 4$, предложенная Каджаурой, соответствует величине $\tau_K \approx 0.56$. Видно, что критерий Глимсдала (даже при $\tau_G = 0.1$) является более строгим по сравнению с критерием Каджауры.

Несложно убедиться, что критерий Пелиновского (2) также соответствует и критерию Глимсдала, и критерию Каджауры. Безразмерные параметры, входящие в формулы (1), (2) и (4), связаны между собой следующими простыми соотношениями:

$$\tau_p = 6a_d, \quad (6)$$

$$a_d = 6/p_a^3. \quad (7)$$

Имея в виду численное значение параметра $a_d \approx 0.06$, указанное в работе [Mirchina, Pelinovsky, 1982], можно заключить, что величина τ , соответствующая критерию Пелиновского, составляет $\tau_p \approx 0.36$. Следовательно, критерий Пелиновского по строгости занимает промежуточное место между критериями Глимсдала и Каджауры: $\tau_G < \tau_p < \tau_K$.

Все три отмеченных выше критерия были получены авторами из различных теоретических соображений. Каджаура анализировал асимптотическое поведение волновых форм. Пелиновский в [Пелиновский, 1996] отмечает, что его критерий вытекает из линеаризованного уравнения Кортевега–де Вриза и из соображений размерности.

Формула Глимсдала (3) опирается на физику процесса, — она описывает отношение разницы расстояний, пройденных длинной и диспергирующей волнами за время t , к длине волны. Примечательно, что близкий физический подход к получению искомого критерия был предложен задолго до выхода в свет статьи [Glimsdal et al., 2013] в работе [Kulikov et al., 1996].

В работе [Kulikov et al., 1996] были введены понятия времени и расстояния дисперсионного разрушения (“collapse time” и “collapse distance”):

$$T_c = \frac{\lambda}{\sqrt{gH} - C_{gr}}, \quad (8)$$

$$D_c = T_c \sqrt{gH}, \quad (9)$$

где C_{gr} — групповая скорость гравитационных волн на воде, определяемая по дисперсионному соотношению традиционным образом ($C_{gr} = d\omega/dk$). Физический смысл величины T_c — время, за которое волновой пакет отстанет от фронта на длину волны λ . Величина D_c — расстояние, при распространении на которое волновой пакет отстанет от фронта на длину волны λ .

Отметим, что подход Куликова отличают четкая физическая интерпретация вводимых понятий, а также задействование групповой скорости волн C_{gr} вместо фазовой C_{ph} , которая используется авторами [Glimsdal et al., 2013]. Подход, предложенный в работе [Kulikov et al., 1996], является более корректным и универсальным, — он легко может быть распространен на любой тип волн (любой тип дисперсионного соотношения). Заметим, что для длинных гравитационных волн на воде ($kH \ll 1$) различие между фазовой и групповой скоростями невелико. А вот, например, для длинных волн во вращающемся океане (волн Пуанкаре), которые характеризуются дисперсионным соотношением $\omega^2 = gHk^2 + f^2$, где f — параметр Кориолиса [Grimshaw et al., 1998], различие между фазовой и групповой скоростями может иметь принципиальное значение.

В нашей работе [Носов, 2017] было показано, что при переходе к безразмерным переменным формулы (8) и (9) сливаются в единое выражение:

$$T_c^* = D_c^* = \frac{\lambda^*}{1 - C_{gr}^*}, \quad (10)$$

где $T_c^* = T_c / \sqrt{H/g}$, $D_c^* = D_c / H$, $\lambda^* = \lambda / H$, $C_{gr}^* = C_{gr} / \sqrt{gH}$. В длинноволновом пределе ($k^* = kH \ll 1$) из формулы (10) получаем

$$T_c^* = D_c^* \approx \frac{4\pi}{k^*} = \frac{\lambda^{*3}}{2\pi^2}. \quad (11)$$

Если в формуле (11) перейти обратно к размерным величинам, то несложно убедиться, что она эквивалентна формуле Пелиновского (2) при значении параметра $a_d = 1/2\pi^2 \approx 0.051$, которое близко к критическому значению, указанному в статье [Mirchina and Pelinovsky, 1982].

Завершая обзор, можно заключить, что все четыре подхода в длинноволновом пределе дают формулы, которые включают в себя единую комбинацию λ^3/H^2 , но отличаются “субъективными” числовыми множителями, предлагаемыми различными авторами. Различие в значениях этих множителей затрудняет использование теоретических результатов на практике. Кроме того, для практического применения критерия важно иметь физически адекватный способ определения доминирующей длины волны. Дело в том, что оценка времени/расстояния дисперсионного разрушения сильно зависит от длины волны ($T_c^* = D_c^* \sim \lambda^{*3}$). Поэтому даже небольшая неточность в определении длины волны способна существенно повлиять на результат.

Основная цель настоящей работы состоит в разработке способа количественного определения пределов времени/пространства, до которых теория длинных волн позволяет рассчитывать диспергирующие волны цунами с заданной точностью. Опираясь на теоретические понятия времени и расстояния дисперсионного разрушения, введенные Е.А. Куликовым в работе [Kulikov et al., 1996], мы адаптируем эти понятия для практического применения, указывая, в частности, способ выбора доминирующей длины волны.

2. РАСЧЕТ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН

Будем рассматривать одномерное — вдоль горизонтальной оси $0x$ — распространение гравитационных поверхностных волн в бассейне постоянной глубины H . Все нижеследующие формулы, за исключением специально оговариваемых случаев, будут представлены в безразмерных переменных. При обезразмеривании в качестве масштаба длин выберем глубину H : $x^* = x/H$, $k^* = kH$ (k — волновое число). В качестве масштаба времени — время распространения длинных волн на расстояние, равное глубине $\sqrt{H/g}$, где g — ускорение силы тяжести: $t^* = t/\sqrt{H/g}$. Амплитуды смещения поверхности дна и свободной поверхности воды нормируем на максимальную величину остаточного смещения: $\eta^* = \eta/\eta_{\max}$, $\xi^* = \xi/\eta_{\max}$. Знак “*” в дальнейшем опустим.

В качестве источника волн рассмотрим остаточное смещение поверхности дна $\eta(x)$ ($|\eta| \ll H$), возникающее мгновенно в момент времени $t = 0$.

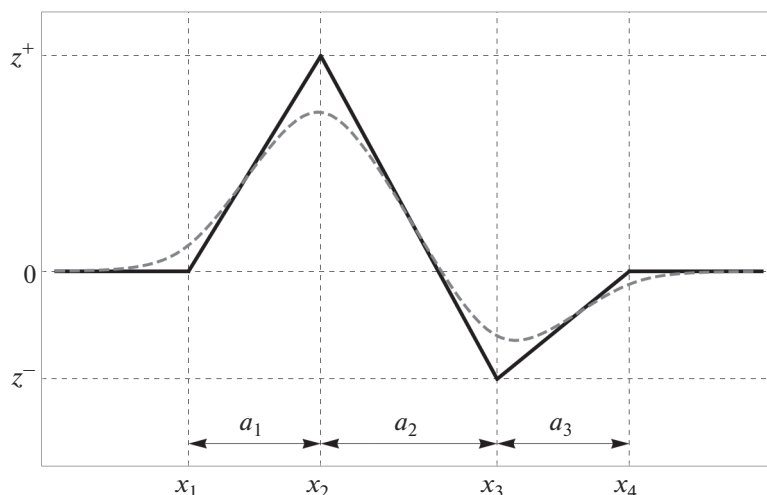


Рис. 1. Геометрия модельного источника волн. Остаточное смещение дна показано черной сплошной линией, начальное возвышение водной поверхности — серой пунктирной линией.

Мгновенное смещение дна вытесняет воду и формирует на свободной поверхности возмущение ξ_0 (начальное возвышение), которое рассчитывается по следующим формулам [Носов, Семенцов, 2014]:

$$\xi_0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B(k)}{\text{ch}(k)} e^{-ikx} dk, \quad (12)$$

$$B(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(x) e^{ikx} dx. \quad (13)$$

Произвольное одномерное бегущее волновое возмущение свободной поверхности представимо в виде интеграла Фурье:

$$\xi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i(\omega(k)t - kx)} dk, \quad (14)$$

где $\omega(k)$ — циклическая частота, зависящая от волнового числа k . Вид зависимости $\omega(k)$ определяется дисперсионным соотношением, а функция $A(k)$ — формой начального возвышения. Для источника, описанного выше, она имеет вид:

$$A(k) = \frac{B(k)}{\text{ch}(k)}. \quad (15)$$

Заметим, что наличие экспоненциально возрастающей функции “ch(k)” в знаменателе формулы (15) обеспечивает ограниченность спектрального состава поверхностных волн (сглаживающий эффект водного слоя). В силу того, что именно коротковолновые компоненты поверх-

ностных гравитационных волн подвержены фазовой дисперсии в наибольшей степени, корректный учет сглаживающего эффекта имеет важное значение для проводимого исследования. Поэтому в качестве источника волн мы задаем начальное возвышение водной поверхности, рассчитанное по остаточному смещению дна с учетом сглаживающего эффекта.

Выбирая различные виды дисперсионных соотношений $\omega(k)$ в формуле (14), можно рассчитать волновые профили, соответствующие различным приближениям. В настоящей работе мы будем рассматривать два дисперсионных соотношения:

$$\omega^2 = k \text{th}(k), \quad (16)$$

$$\omega^2 = k^2. \quad (17)$$

Формула (16) соответствует полной дисперсионной теории поверхностных гравитационных волн на воде, формула (17) — приближению длинных волн.

Вид модельного остаточного смещения дна, которое мы использовали в расчетах, представлен на рис. 1. Как это практически всегда реализуется в реальных очагах цунами, смещение дна состоит из области поднятия и области опускания. Смещение описывается кусочно-линейной функцией горизонтальной координаты. Параметрами функции являются координаты 4 точек (x_1, x_2, x_3, x_4) или три соответствующие длины ($a_1 = x_2 - x_1, a_2 = x_3 - x_2, a_3 = x_4 - x_3$), а также величины z^+ и z^- , определяющие амплитуды поднятия и опускания дна соответственно. Во всех случаях полага-

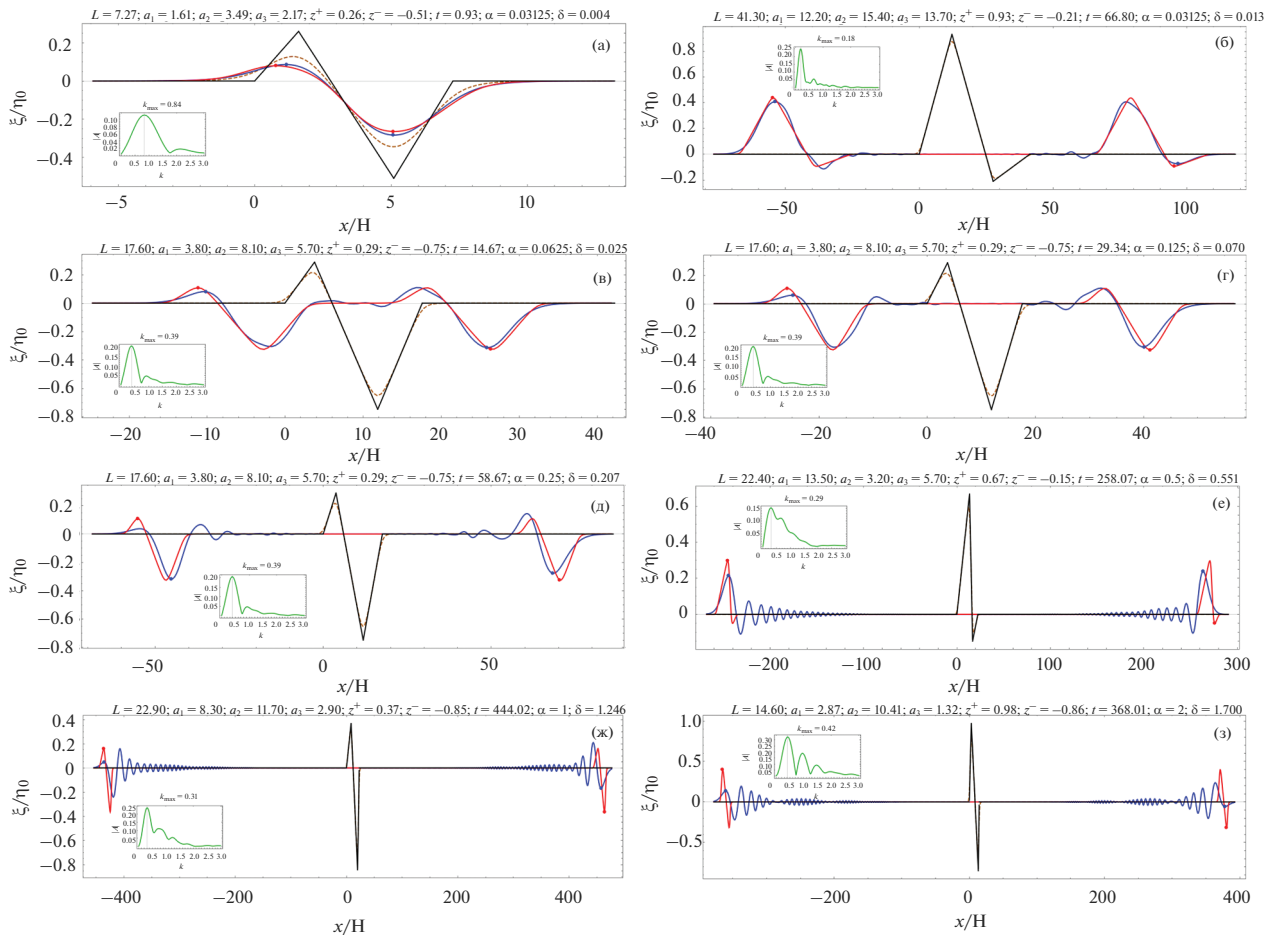


Рис. 2. Примеры волновых профилей, рассчитанные с учетом и без учета дисперсии (синяя и красная кривые соответственно). Во всех случаях расчет выполнен для момента времени, равного дистанции дисперсионного разрушения $t = \Delta$. Значения параметров источника ($L, a_1, a_2, a_3, z^+, z^-$), а также значения коэффициента α и параметра δ , характеризующего степень различия между диспергирующим и недиспергирующим волновыми возмущениями, указаны на рисунке. На врезках показаны амплитудные спектры функций $d\xi_0/dx$ и представлены величины $k_{\max}$, по которым проводился расчет дистанции дисперсионного разрушения.

лось $x_1 = 0$. Полная длина области смещения дна $L = x_4 = a_1 + a_2 + a_3$.

Интеграл в формуле (13) для кусочно-линейной функции, представленной на рис. 1, легко рассчитывается аналитически

$$B(k) = \frac{e^{ikx_1} z^+}{(x_1 - x_2)k^2} + \frac{e^{ikx_4} z^-}{(x_3 - x_4)k^2} + \frac{e^{ikx_2} [z^+(x_1 - x_3) + z^-(x_2 - x_1)]}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)k^2} + \frac{e^{ikx_3} [z^+(x_4 - x_3) + z^-(x_2 - x_4)]}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)k^2}. \quad (18)$$

Интеграл в формуле (14) рассчитывался численно. Примеры волновых профилей, рассчитанных с использованием полного (16) и прибли-

женного (17) дисперсионных соотношений, представлены на рис. 2. На их обсуждении мы остановимся в разделе 5.

3. ДИСТАНЦИЯ ДИСПЕРСИОННОГО РАЗРУШЕНИЯ

В реальности длины волн цунами могут составлять несколько сотен километров и более. Отставание волнового пакета от фронта на одну длину волны, рассматриваемое в критерии Куликова [Kulikov et al., 1996], фактически говорит о весьма существенной дисперсионной трансформации волнового пакета. Поэтому время и расстояние дисперсионного разрушения, определяемые формулами (8)–(10), заведомо не могут служить хорошим практическим критерием применимости теории длинных волн. Кроме того, практическое

использование формул (8)–(10) требует выработки методики определения доминирующей длины волны.

В развитие подхода Куликова мы предлагаем рассматривать отставание волнового пакета от фронта на долю длины волны: $\alpha\lambda$, где α – корректирующий коэффициент. Тогда, на основе формулы (10), можно ввести безразмерную характеристику, которую мы будем называть “дистанция дисперсионного разрушения”:

$$\Delta = \alpha \frac{\lambda_{\max}}{1 - C_{gr}(\lambda_{\max})}, \quad (19)$$

где $\lambda_{\max}$ – длина волны, на которую приходится максимум пространственного спектра функции $d\xi_0/dx$. Таким образом, расчет дистанции дисперсионного разрушения мы проводим по длине волны, доминирующей в спектре цунами. Для удобства вместо длины волны в формуле (19) мы будем оперировать соответствующим волновым числом: $k_{\max} = 2\pi/\lambda_{\max}$.

Использование для нахождения максимума спектра производной $d\xi_0/dx$, а не самой функции ξ_0 имеет простое физическое обоснование. Дело в том, что формирование гравитационных волн от начального возвышения связано с действием горизонтальной компоненты силы градиента давления, которая пропорциональна именно $d\xi_0/dx$. В случае $d\xi_0/dx = 0$ волны цунами вообще не возникают.

Применяя формулу (12), находим первую пространственную производную от начального возвышения

$$\frac{d\xi_0}{dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B(k)k}{\text{ch}(k)} e^{-ikx} dk. \quad (20)$$

Величина $k_{\max}$ определяется положением абсолютного максимума амплитудного спектра

$$S(k) = \frac{|B(k)|k}{\text{ch}(k)}. \quad (21)$$

Типичные формы амплитудных спектров (21) и примеры определения величины $k_{\max}$ представлены вместе с примерами волновых профилей на рис. 2.

4. КОЛИЧЕСТВЕННАЯ МЕРА РАЗЛИЧИЯ ВОЛНОВЫХ ПРОФИЛЕЙ

В качестве количественной меры различия между волновыми профилями, полученными с учетом и без учета дисперсии, будем рассматривать следующий безразмерный параметр:

$$\delta = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi_D - \xi_{LW})^2 dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \xi_{LW}^2 dx}, \quad (22)$$

где ξ_D – профиль волны, рассчитанный с учетом дисперсии (дисперсионное соотношение (16)), ξ_{LW} – профиль, рассчитанный по теории длинных волн (дисперсионное соотношение (17)). Профили волн рассчитывались в заданные моменты времени с фиксированным шагом по пространству. Поэтому при практических расчетах интегралы в формуле (22) заменялись суммами в соответствии с методом прямоугольников.

Теоретически величина параметра δ варьируется в следующих пределах: $0 \leq \delta \leq 2$. Минимальное значение параметра говорит о полном совпадении диспергирующего и недиспергирующего волновых профилей, а максимальное – о полном расхождении волновых профилей. Действительно, если из-за дисперсии профили ξ_D и ξ_{LW} вообще не пересекаются в пространстве, то $\xi_D \xi_{LW} = 0$, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi_D - \xi_{LW})^2 dx &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_D^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_{LW}^2 dx = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_{LW}^2 dx. \end{aligned} \quad (23)$$

В формуле (23) мы учли, что энергии бегущих диспергирующих и недиспергирующих волн ($E = \rho g \int \xi^2 dx$), вызванных одинаковым начальным возвышением, совпадают:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi_D^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_{LW}^2 dx. \quad (24)$$

Помимо параметра δ по волновым профилям определялись амплитуды лидирующих волн, распространяющихся в положительном и в отрицательном направлениях оси $0x$. Амплитуды лидирующих волн, рассчитываемые с учетом дисперсии, обозначались A_D , а без учета дисперсии – A_{LW} . Несмотря на то, что область поднятия дна всегда располагалась слева, а область опускания – справа, знак лидирующей волны не был однозначно связан с направлением распространения. Более того, знаки лидирующих волн, рассчитанных с учетом и без учета дисперсии, часто оказывались различными. В ряде случаев волны могли начинаться с очень слабой – визуально неразличимой – отрицательной фазы, за которой следовала положительная волна значительной амплитуды, и наоборот: за слабой положительной лидирующей волной могла следовать отрицательная волна большой амплитуды.

ды. В этой связи при выделении лидирующих волн мы рассматривали только значительные возмущения, которые по амплитуде превосходили 10% от размаха волнового возмущения ($\max(\xi_D) - \min(\xi_D)$) или $\max(\xi_{LW}) - \min(\xi_{LW})$). Колебания уровня меньшей амплитуды при выделении лидирующей волны игнорировались. Автоматически выделенные амплитуды лидирующих волн на рис. 2 отмечены на волновых профилях жирными точками.

5. МЕТОДИКА МОДЕЛИРОВАНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Моделирование проводилось методом Монте-Карло. Параметры кусочно-линейной функции, описывающей остаточное смещение дна (рис. 1), задавались следующим образом. Полная длина источника, а также амплитуды поднятия и опускания дна варьировались статистически равномерно в диапазонах: $5 < L < 50$, $0 < z^+ < 1$, $-1 < z^- < 0$. Координаты точек максимального поднятия и опускания дна (x_2 и x_3) случайным образом выбирались внутри области источника ($0 < x < L$) также статистически равномерно. При глубине океана 5 км выбранный диапазон варьирования безразмерной величины L соответствует горизонтальной протяженности источника от 25 до 250 км.

Расчет волнового возмущения свободной поверхности, вызванного мгновенной деформацией дна, проводился в соответствии с формулой (14) численно. Волновые формы рассчитывались с пространственным шагом $\Delta x = 0.5$. С учетом сглаживающего эффекта водного слоя такой шаг был достаточен для адекватного дискретного представления волнового возмущения свободной поверхности.

Волновые профили рассчитывались в фиксированные моменты времени t , которые приравнялись дистанции дисперсионного разрушения, определяемой по формуле (19): $t = \Delta$. Величины корректирующего коэффициента в формуле (19) устанавливались дискретно: $\alpha = 1/32, 1/16, 1/8, 1/4, 1/2, 1, 2$. Для каждого фиксированного значения параметра α были рассчитаны по 2000 волновых профилей.

При численных расчетах волновых профилей дистанция дисперсионного разрушения была ограничена максимальным значением $\Delta_{\max} = 2000$, что при глубине океана 5 км соответствует трансокеанскому распространению волн на расстояние 10 тыс. км.

Примеры волновых профилей представлены на рис. 2. Синим цветом показаны профили, рассчитанные с учетом дисперсии (дисперсионное соотношение (16)), красным цветом — без учета дисперсии (дисперсионное соотношение (17)). Черная ломанная линия соответствует остаточ-

ному смещению дна, коричневый пунктир — начальному возвышению водной поверхности. На врезках зелеными кривыми показаны амплитудные спектры функций $d\xi_0/dx$ и представлены величины $k_{\max}$, определенные по этим спектрам. Над каждым волновым профилем приведены величины параметров источника ($L, a_1, a_2, a_3, z^+, z^-$), а также значения коэффициента α и параметра δ , характеризующего степень различия между диспергирующим и недиспергирующим волновыми возмущениями.

Из рис. 2 видно, что профили волн, рассчитанные с применением различных дисперсионных соотношений, всегда отличаются друг от друга. В случае полной дисперсионной теории волновое возмущение представляет собой диспергирующий пучок волн, трансформирующийся по мере распространения. Теория длинных волн дает волну, форма которой эквивалентна форме начального возвышения и остается неизменной по мере распространения.

Пример, показанный рис. 2а, демонстрирует ситуацию, которая часто реализуется при малых значениях коэффициента α ($\alpha = 1/32$) и источниках незначительного размера L ($L = 7.27$). Видно, что в данном случае дистанция дисперсионного разрушения оказалась настолько малой ($\Delta = 0.93$), что волна за время $t = \Delta$ просто не успела выйти за пределы источника. Это означает, что теория длинных волн в данном случае не способна воспроизвести волну цунами за пределами источника.

На рис. 2б показан случай источника значительной горизонтальной протяженности ($L = 41.3$). Даже при малом значении коэффициента $\alpha = 1/32$ дистанция дисперсионного разрушения оказывается достаточной ($\Delta = 66.8$) для того, чтобы теория длинных волн смогла воспроизвести диспергирующую волну цунами вне источника с хорошей точностью. Из рисунка видно, что волновые профили, рассчитанные с использованием различных дисперсионных соотношений, оказываются весьма близкими ($\delta = 0.013$).

На рис. 2в, 2г, 2д показаны профили волн, которые были сформированы одним и тем же источником ($L = 17.6$), но рассчитаны при различных значениях коэффициента α ($1/16, 1/8, 1/4$). Хорошо заметно как с ростом величины α нарастают различия между профилями и увеличивается количественная мера этих различий — параметр δ (0.025, 0.070, 0.207). Следует также обратить внимание на то, что для волны, бегущей в отрицательном направлении оси $0x$ (рис. 2д), возникает особенность в определении знака лидирующей волны: положительная лидирующая фаза диспергирующей волны становится слишком слабой, и в качестве лидирующей волны опреде-

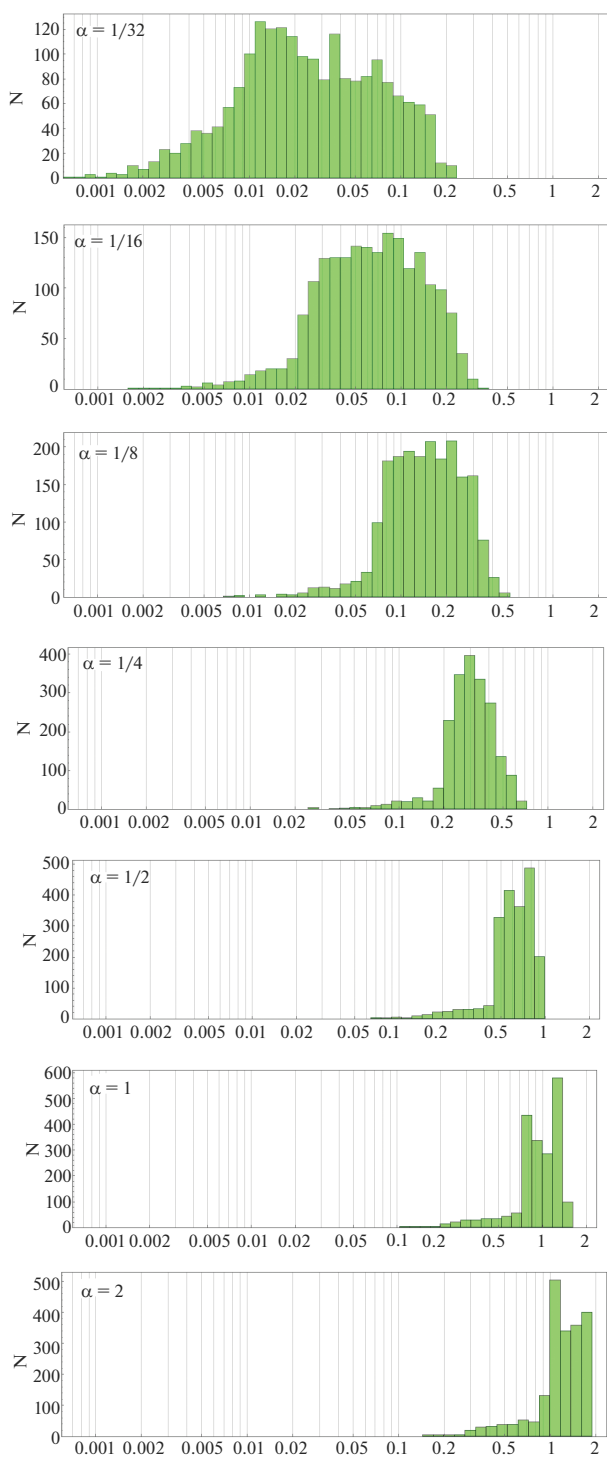


Рис. 3. Распределения величины δ , построенные при различных значениях коэффициента α (указаны на рисунке).

ляется возмущение с отрицательной фазой. При этом для волны без дисперсии лидирующая волна остается положительной.

Несоответствие в определении знаков лидирующих волн начинает чаще реализовываться при

больших значениях коэффициента α . Еще одна такая ситуация показана на рис. 2е. Здесь она реализуется для волны, бегущей в положительном направлении оси $0x$. Недиспергирующая волна начинается с отрицательной фазы, в то время как диспергирующая волна — с четко выраженной положительной фазы.

При больших значениях коэффициента α ($\alpha \geq 0.5$) различия между волновыми профилями становятся принципиальными (рис. 2е, 2ж, 2з). Диспергирующие волны всегда обладают протяженным осциллирующим “хвостом”, в котором сосредоточена заметная часть волновой энергии. Волны, рассчитанные без учета дисперсии, сжаты в пространстве и практически всегда обладают большей амплитудой.

Из примеров, представленных на рис. 2, можно сделать следующее предварительное заключение. При использовании теории длинных волн приемлимая точность воспроизведения диспергирующих волн обеспечивается при $\alpha \leq 0.25$ (рис. 2а–2д). Но в силу значительной изменчивости формы источника (даже в рамках выбранной нами простой модели) для установления количественных закономерностей целесообразно обратиться к анализу распределений величины δ и распределений отношения амплитуд лидирующих волн A_D/A_{LW} .

На рис. 3 представлены распределения величины δ , полученные при различных значениях коэффициента α . Из рис. 3 видно, что увеличение α приводит в среднем к росту значений δ и, одновременно, к заметному сужению распределений. Это ожидаемый результат: время распространения волны пропорционально параметру α , следовательно, рост этого параметра должен увеличивать различия между профилями диспергирующих и недиспергирующих волн, что, в свою очередь, сопровождается ростом величины δ . Уменьшение ширины распределений связано с тем, что величина δ имеет теоретический предел ($\delta < \delta_{\max} = 2$, см. раздел 4). Существование этого предела начинает заметно влиять на результат при $\alpha \geq 1/2$ — правый край распределения заметно укручивается.

На рис. 4 представлены распределения абсолютной величины отношения амплитуд лидирующих волн $|A_D/A_{LW}|$. Для совпадающих знаков лидирующих волн ($A_D/A_{LW} > 0$) распределения показаны красным цветом, для несовпадающих ($A_D/A_{LW} < 0$) — синим. При $\alpha = 1/32$, когда проявления дисперсии заведомо незначительны, отношение амплитуд A_D/A_{LW} , как правило, близко к 1, а доля случаев, когда теории длинных и диспергирующих волн дают различные знаки лидирующих волн составляет всего 4.5%. Примеча-

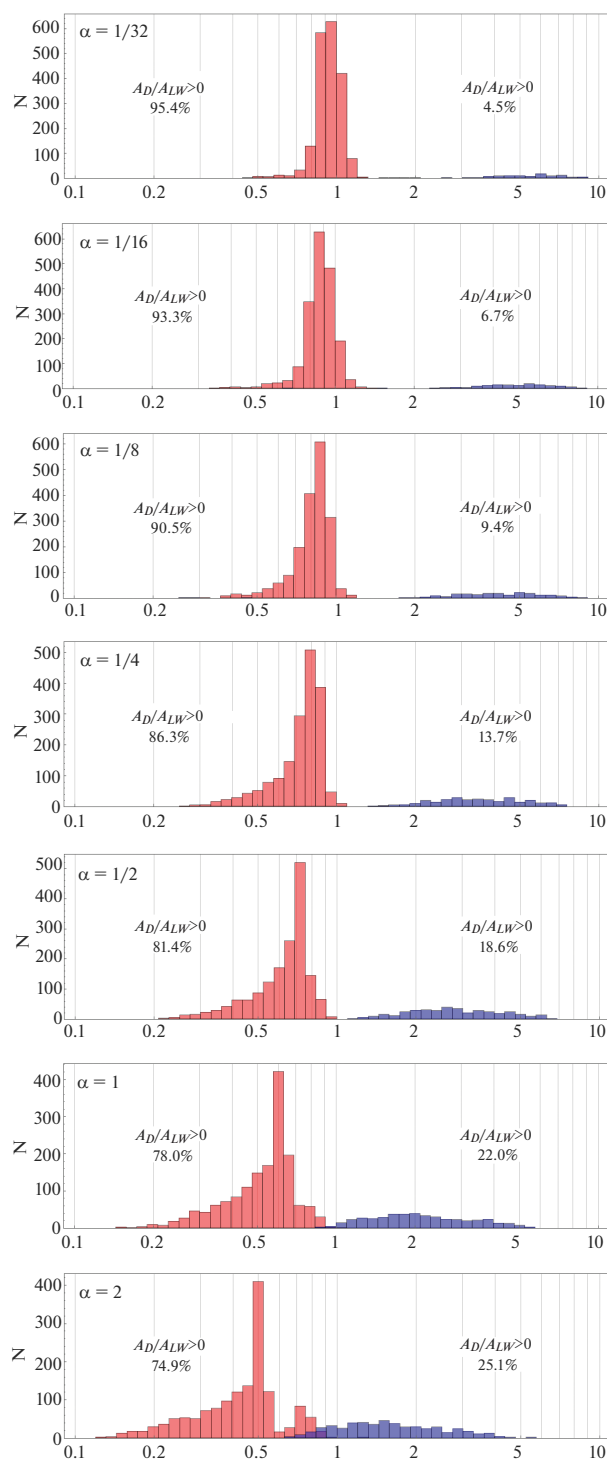


Рис. 4. Распределения абсолютной величины отношения амплитуд лидирующих волн $|A_D/A_{LW}|$, полученных для диспергирующих и недиспергирующих (длинных) волн. Красным цветом построены распределения для лидирующих волн одинаковой полярности ($A_D/A_{LW} > 0$), синим — для волн различающейся полярности ($A_D/A_{LW} < 0$). В процентах указана доля соответствующих случаев.

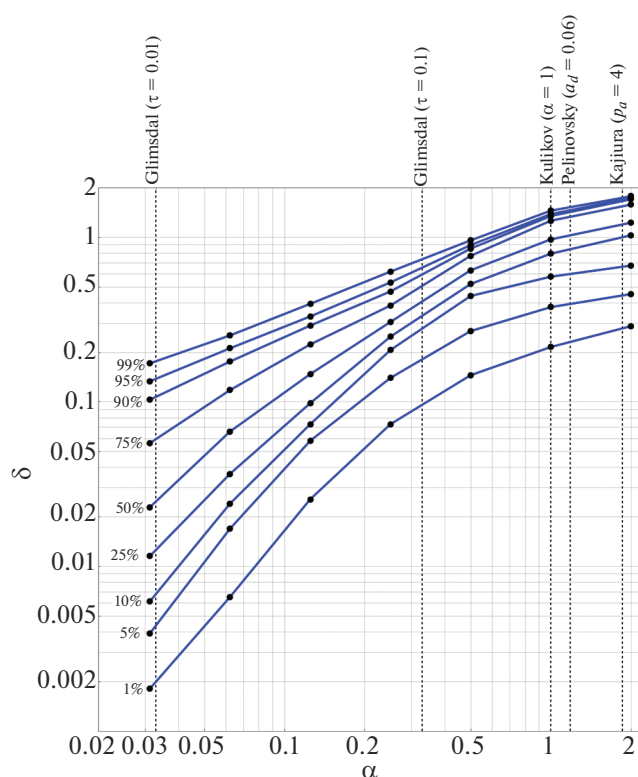


Рис. 5. Зависимость процентилей распределений величины δ от величины коэффициента α . Черным пунктиром указаны значения коэффициента α , соответствующие критериям, установленным ранее другими авторами.

тельно, что несовпадение знаков лидирующих волн в большинстве случаев сопровождается значительными различиями в абсолютной величине амплитуды. Рост величины α приводит к смещению распределений $|A_D/A_{LW}|$ влево, к уширению распределений и к росту доли ошибочных определений знака лидирующей волны. При $\alpha = 2$ пик распределения приходится на 0.5, что говорит о двукратной переоценке амплитуды лидирующей волны теорией длинных волн, при этом доля ошибочных определений знака лидирующей волны достигает 25.1%.

Детально проследить, как меняются распределения по мере увеличения коэффициента α , можно по рис. 5 и 6, на которых построены зависимости процентилей распределений в зависимости от величины α . На верхней горизонтальной оси графиков указаны значения коэффициента α , соответствующие критериям, которые были получены ранее другими авторами [Kajura, 1963; Mirchina and Pelinovsky, 1982; Glimsdal et al., 2013; Kulikov et al., 1996]. Соответствие величины α ранее полученным критериям устанавливалось по длинноволновому пределу, в рамках которого все критерии оценивают расстояние, на котором дисперсия становится значимой, единой формулой следую-

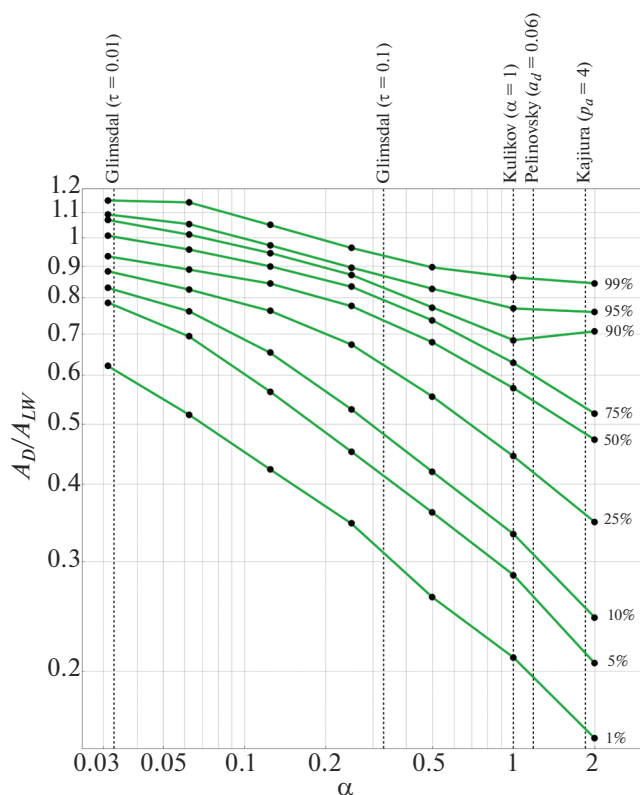


Рис. 6. Зависимость процентилей распределений величины A_D/A_{LW} (при $A_D/A_{LW} > 0$) от величины коэффициента α . Черным пунктиром указаны значения коэффициента α , соответствующие критериям, установленным ранее другими авторами.

щего вида: $C\lambda^3/H^2$, где C — безразмерная константа.

Предложенная нами в настоящей работе формула (19) после перехода к длинноволновому пределу ($kH \ll 1$) и к размерным переменным приобретает вид

$$\Delta \approx \frac{\alpha}{2\pi^2} \frac{\lambda_{\max}^3}{H^2}. \quad (25)$$

Определению расстояния дисперсионного разрушения Куликова [Kulikov et al., 1996] соответствует $\alpha = 1$.

В соответствии с критерием Каджауры [Kajura, 1963], если положить $\lambda_{\max} = a$, получаем

$$\alpha = \frac{12\pi^2}{p_a^3} \approx 1.85. \quad (26)$$

Критерий Пелиновского [Mirchina, Pelinovsky, 1982], определяемый формулой (2) при $a_d = 0.06$, соответствует следующему значению коэффициента:

$$\alpha = 2\pi^2 a_d \approx 1.18. \quad (27)$$

Соответствие величины α критерию Глимсдала [Glimsdal et al., 2013], определяемому формулой (4), дается выражением

$$\alpha = \frac{\pi^2}{3} \tau \approx \begin{cases} 0.329 & \text{при } \tau = 0.1, \\ 0.0329 & \text{при } \tau = 0.01. \end{cases} \quad (28)$$

Из рис. 5 и 6 хорошо видно, как ранжируются известные критерии по степени строгости. Наиболее мягким из всех оказался критерий Каджауры. По нашим оценкам этот критерий фактически оказывается неработоспособным: приемлимое совпадение профилей (например, $\delta < 0.3$) будет реализовываться менее чем в 1% случаев.

По мере возрастания жесткости за критерием Каджауры следуют близкие по численным значениям критерии Пелиновского и Куликова. Оба критерия не обеспечивают принципиального улучшения ситуации по сравнению с критерием Каджауры. И только критерий Глимсдала при $\tau = 0.1$ действительно способен обеспечить соответствие волновых профилей с точностью $\delta < 0.5$ в 75% случаев; при этом амплитуда лидирующей волны будет переоценена не более чем в 2 раза примерно в 90% случаев. Критерий Глимсдала при $\tau = 0.01$ обеспечивает точность $\delta < 0.1$ для 90% случаев; при этом ошибка в определении амплитуды лидирующей волны примерно в 90% случаев будет менее 20%.

Подчеркнем, что уменьшение величины α на практике не может быть беспредельным. Слишком малые значения коэффициента, которые гарантируют высокую степень совпадения волновых профилей, во многих случаях будут давать настолько малую дистанцию дисперсионного разрушения, что волна не успеет распространиться за пределы источника, — такой расчет в большинстве случаев не будет иметь практического смысла.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При моделировании цунами с использованием бездисперсионных длинноволновых моделей следует принимать во внимание, что волны на воде являются диспергирующими при любой длине, поэтому их воспроизведение длинноволновой моделью всегда происходит с некоторой ошибкой. Вопрос заключается только в том, какая ошибка допустима при решении конкретной практической задачи. В этой связи моделирование волн цунами, целесообразно сопровождать маркировкой расчетной области, которая будет показывать дистанцию дисперсионного разрушения Δ , соответствующую ожидаемой точности воспроизведения волн δ при заданной обеспечивающей вероятности.

Например, нас интересует точность $\delta < 0.4$ с вероятностью 90%. Тогда по зависимостям, пред-

ставленным на рис. 5, определяем требуемое значение корректирующего коэффициента: $\alpha = 0.2$. Далее исходную двумерную задачу на поверхности Земли следует свести к набору одномерных задач, например, вдоль набора дуг большого круга, проходящих через центр очага цунами с заданным шагом по азимутальному углу, или, что возможно является более перспективным, вдоль исходящих из центра волновых лучей, рассчитанных с учетом распределения глубин. Величина Δ определяется вдоль каждого направления (или луча) отдельно с учетом фактического профиля глубин. На детальной разработке соответствующей методики и ее проверке здесь мы останавливаться не будем, — это может являться предметом отдельного исследования.

В заключение заметим, что помимо рассмотренной в работе классической дисперсии гравитационных поверхностных волн на воде, а также упомянутых в разделе “Введение” “вторичных” дисперсионных эффектов, существует еще и “нестандартная” дисперсия, обязанный наличию мелкомасштабных нерегулярностей рельефа дна [Доброхотов и др., 2015; Dobrokhoto et al., 2016]. В проведенном исследовании такие эффекты никак не учитываются. Их описание, очевидно, должно включать пространственные производные от функции, описывающей рельеф дна, и вопрос о включении соответствующих поправок в дисперсионное соотношение пока остается открытым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е., Тироцци Б. О методе осреднения для дифференциальных операторов с осциллирующими коэффициентами // Докл. РАН. 2015. Т. 461. № 5. С. 516–520.
- Куликов Е.А., Медведев П.П., Лаппо С.С. Регистрация из космоса цунами 26 декабря 2004 г. в Индийском океане // Докл. РАН. 2005. Т. 401. № 4. С. 537–542.
- Носов М.А. Волны цунами сейсмического происхождения: современное состояние проблемы // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2014. Т. 50. № 5. С. 540–540.
- Носов М.А. Применимость длинноволнового приближения к описанию динамики цунами // Ученые записки физического факультета Московского университета. 2017. № 4. С. 1740503.
- Носов М.А., Колесов С.В. Комбинированная численная модель цунами // Математическое моделирование. 2019. Т. 31. № 1. С. 44–62.
- Носов М.А., Семенцов К.А. Расчет начального возвышения в очаге цунами с использованием аналитических решений // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2014. Т. 50. № 5. С. 612–612.
- Пелиновский Е.Н. Гидродинамика волн цунами. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1996. 276 с.
- Пелиновский Е.Н. Нелинейная динамика волн цунами. Горький: ИПФ АН СССР, 1982. 216 с.
- Behrens J., Dias F. New computational methods in tsunami science // Phil. Trans. R. Soc. 2015. V. 373. № 2053. P. 20140382.
- Dobrokhoto S. Yu., Grushin V. V., Sergeev S. A., Tirozzi B. Asymptotic theory of linear water waves in a domain with nonuniform bottom with rapidly oscillating sections // Russ. J. Math. Phys. 2016. V. 23. № 4. P. 454–473.
- Gisler G. R. Tsunami simulations // Annu. Rev. Fluid Mech. 2008. V. 40. P. 71–90.
- Glimsdal S., Pedersen G. K., Harbitz C. B. et al. Dispersion of tsunamis: does it really matter? // Nat. Hazard. Earth. Syst. Sci. 2013. V. 13. № 6. P. 1507–1526.
- Grimshaw R. H., Ostrovsky L. A., Shrira V. I., Stepanyants Y. A. Long nonlinear surface and internal gravity waves in a rotating ocean // Surveys in Geophysics. 1998. V. 19. № 4. P. 289–338.
- Kajiura K. The leading wave of a tsunami // Bull. Earthq. Res. Inst. 1963. V. 41. № 3. P. 535–571.
- Kajiura K. Tsunami source, energy and directivity of wave radiation // Bull. Earthq. Res. Inst. 1970. V. 48. № 5. P. 835–869.
- Korolev P. Yu., Korolev Yu. P., Loskutov A. V. Analysis of the main characteristics of tsunamis based on data from deep-ocean stations // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. 2019. V. 324. № 1. P. 012017.
- Kozelkov A., Efremov V., Kurkin A. et al. Three-dimensional numerical simulation of tsunami waves based on the Navier-Stokes equations // Sci. Tsunami Hazards. 2017. V. 36. № 4. P. 183–196.
- Kulikov E. A., Rabinovich A. B., Thomson R. E. et al. The landslide tsunami of November 3, 1994, Skagway harbor, Alaska // J. Geophys. Res.: Oceans. 1996. V. 101. № C3. P. 6609–6615.
- Levin B. W., Nosov M. A. Physics of Tsunamis, Second Edition. Cham-Heidelberg-New York-Dordrecht-London: Springer, 2016. 388 p.
- Madsen P. A., Murray R., Sorensen O. R. A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics // Coast. Eng. 1991. V. 15. № 4. P. 371–388.
- Mirchina N. R., Pelinovsky E. N. Nonlinear and dispersive effects for tsunami waves in the open ocean // Int. J. Tsunami Soc. 1982. V. 2. № 4. P. 1073–1081.
- Saito T. Tsunami generation and propagation. Tokyo: Springer Japan, 2019. 274 p.
- Saito T., Kubota T. Tsunami modeling for the deep sea and inside focal areas // Annu. Rev. Earth. Planet. Sci. 2020. V. 48. P. 121–145.
- Shijo R., Tsukuda Y., Sato T. et al. Tsunami Simulation by 3D Model Around a Power Station Due to the 2011 Tohoku Earthquake // Coast. Eng. J. 2016. V. 58. № 4. P. 1640014.
- Shuto N. Numerical simulation of tsunamis—Its present and near future // Natural Hazards. 1991. V. 4. № 2. P. 171–191.
- Titov V., Kanoğlu U., Synolakis C. Development of MOST for real-time tsunami forecasting // J. Waterw., Port, Coast., Ocean Eng. 2016. V. 142. № 6. P. 03116004.
- Watada S., Kusumoto S., Satake K. Traveltime delay and initial phase reversal of distant tsunamis coupled with the self-gravitating elastic Earth // J. Geophys. Res.: Solid Earth. 2014. V. 119. № 5. P. 4287–4310.

Criterion of Applicability of the Theory of Long Waves for Description of Dispersive Tsunami Waves

M. A. Nosov^{1, 2, *} and A. I. Zarubina^{1, **}

¹*Physics Faculty, Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, 1, bil. 2, Moscow, 119991 Russia*

²*Institute of Marine Geology and Geophysics, Far Eastern Branch of Russian Academy of Science,
Nauki str., 1B, Yuzhno-Sakhalinsk, 693022 Russia*

**e-mail: m.a.nosov@mail.ru,*

***e-mail: zarubina.ai17@physics.msu.ru*

Conditions for the applicability of the dispersionless theory of long waves for reproducing dispersive tsunami waves are analyzed. As a quantitative criterion, the dispersive destruction distance is proposed for use, which is a value that is uniquely determined by the wavelength that dominates in the spectrum of the initial elevation of the water surface in the tsunami source, and the correction factor α . The physical meaning of the α value is the fraction of the wavelength by which the dispersive wave packet lags behind the long wave front when propagating over a distance equal to the dispersive destruction distance. Using the model residual displacement of the bottom surface, the geometrical parameters of which vary randomly, under the assumption of instantaneous generation of waves and taking into account the smoothing effect of the water layer, the Monte Carlo method establishes a relationship between the accuracy of wave reproduction by the dispersionless model and the quantity α . Using the “ α coefficient scale”, the ranking of the criteria that were previously proposed by other authors was performed.

Keywords: tsunami propagation, phase dispersion, long waves