

УДК 551.511.32, 551.513, 517.938

ВЗРЫВНОЙ РОСТ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПОТОКЕ С ВЕРТИКАЛЬНЫМ СДВИГОМ

© 2023 г. М. В. Калашник^{a, b, c, *}

^aИнститут физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, Пыжевский пер., 3, Москва, 109017 Россия

^bИнститут физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, ул. Большая Грузинская, 10, Москва, 123242 Россия

^cФГБУ “НПО “Тайфун”, ул. Победы, 4, Калужской обл., Обнинск, 249038 Россия

*e-mail: kalashnik-obn@mail.ru

Поступила в редакцию 05.06.2023 г.

После доработки 11.07.2023 г.

Принята к публикации 28.08.2023 г.

Классическая задача геофизической гидродинамики — задача о неустойчивости зонального геострофического течения с вертикальным сдвигом скорости. В настоящее время наиболее полно изучена неустойчивость относительно симметричных возмущений, не зависящих от координаты вдоль потока. Для возникновения симметричной неустойчивости двумерный волновой вектор возмущения должен лежать внутри определенного сектора в вертикальной плоскости волновых чисел. В настоящей работе исследована неустойчивость относительно несимметричных возмущений, ориентированных под углом к потоку. Обнаружены принципиально новые особенности временной динамики амплитуд таких возмущений. Основная особенность связана с существованием стадии экспоненциального взрывного роста конечной продолжительности. Дана кинематическая интерпретация этой стадии, связанная с прохождением проекции трехмерного волнового вектора на плоскость поперек потока через сектор симметричной неустойчивости.

Ключевые слова: бароклинная неустойчивость, вертикальный сдвиг скорости, волновой вектор, точки поворота

DOI: 10.31857/S0002351523060068, **EDN:** VQBXLY

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача о неустойчивости зонального геострофического течения с вертикальным сдвигом скорости — одна из центральных задач геофизической гидродинамики. К настоящему времени наиболее полно изучена задача о неустойчивости течения относительно симметричных возмущений, не зависящих от координаты вдоль потока. Решение этой задачи привело к созданию теории симметричной неустойчивости, излагаемой в литературе [Bennets., Hoskins, 1979; Шакина, 1990; Калашник, Свиркунов, 1995, 1996; Калашник и др., 2022; Курганский, 2023]. Установлено, что для возникновения неустойчивости двумерный волновой вектор симметричных возмущений должен лежать внутри определенного сектора — сектора симметричной неустойчивости на плоскости волновых чисел. С развитием симметричной неустойчивости связывают образование полосовых структур в пограничных слоях атмосферы и океана, результаты ряда лабораторных экспериментов по неустойчивости во вращающейся жидкости [Шакина, 1990].

Настоящая работа посвящена исследованию неустойчивости относительно пространственных несимметричных возмущений, ориентированных под углом к потоку. Для исследования неустойчивости использован так называемый немодальный подход, основанный на описании линейной динамики возмущений в полулагранжевой (движущейся вместе с потоком) системе координат [Chagelishvili et al., 1994, 1997; Kalashnik et al., 2006]. Волновое число пространственного немодального возмущения зависит от времени. При этом в определенный момент времени проекция волнового вектора на вертикальную плоскость попадает в сектор симметричной неустойчивости, а в определенный момент выходит из него. Между этими моментами изначально осциллирующее возмущение начинает экспоненциально расти. Таким образом, происходит резкий взрывной рост несимметричного возмущения. Подобное поведение со стадиями осцилляций и экспоненциального роста представляет собой новый малоизученный тип гидродинамической неустойчивости. В рамках дискретной двухуровневой модели этот тип исследовался в недавней ра-

боте автора [Калашник, 2023]. В настоящей работе рассмотрено сдвиговое течение в модели неограниченной непрерывно стратифицированной атмосфере.

2. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВОЗМУЩЕНИЙ И СИММЕТРИЧНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Динамика вращающейся непрерывно стратифицированной жидкости описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} d\mathbf{v}/dt + f[\mathbf{k}, \mathbf{v}] &= -\nabla P + \sigma\mathbf{k}, \\ d\sigma/dt &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{v}$ — вектор скорости с компонентами u, v, w соответственно вдоль осей x, y, z соответственно, плавучесть $\sigma = -g\rho/\rho_*$, где ρ — отклонение плотности от фонового значения ρ_* , P — возмущение давления, нормированное на фоновую плотность, g — ускорение свободного падения, f — параметр Кориолиса, $\mathbf{k}$ — вертикальный орт, $d/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{v}, \nabla)$ — оператор полной производной. Квадратными скобками отмечено векторное произведение. Рассматриваем (1) в неограниченном по трем координатам слое жидкости $-\infty < x, y, z < \infty$.

В рамках системы (1) исследуем поведение малых возмущений зонального (вдоль горизонтальной оси x) течения жидкости с распределением зональной компоненты скорости $u = U(z) = \Lambda z$ и плавучести $\sigma = \Sigma(y, z) = N^2 z - f\Lambda y$, где $\Lambda > 0$ — величина постоянного сдвига, N — частота плавучести. Данные распределения являются точными решениями уравнений (1) и связаны уравнением термического ветра $fU_z = -\sigma_y$, показывающим, что во вращающейся жидкости вертикальный сдвиг скорости поддерживается меридиональным (вдоль оси y) градиентом плавучести.

Линеаризация системы (1) на фоновом течении приводит к следующей системе

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} - fv + \frac{dU}{dz}w &= -\frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{Dv}{Dt} + fu = -\frac{\partial P}{\partial y}, \\ \frac{Dw}{Dt} - \sigma &= -\frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{D\sigma}{Dt} + \frac{d\Sigma}{dy}v + N^2w = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2)$$

где D/Dt — оператор полной производной. Важная особенность состоит в том, что из этой системы следует закон сохранения

$$\begin{aligned} Dq/Dt &= 0, \\ q &= N^2(v_x - u_y) - f\Lambda(u_z - w_x) + \Lambda\sigma_y + f\sigma_z. \end{aligned} \quad (3)$$

Этот закон представляет собой линеаризованную форму закона сохранения потенциальной завихренности для возмущений (см. Приложение 1).

Из системы (2) вытекает также уравнение баланса полной осредненной энергии возмущения (кинетической плюс потенциальной)

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \Lambda \langle wu \rangle - (f\Lambda/N^2) \langle v\sigma \rangle, \\ E &= K + \Pi = \left\langle \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{\sigma^2}{2N^2} \right\rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь угловые скобки означают пространственное осреднение. Согласно (4), источником энергии возмущений являются осредненные вертикальный поток импульса и меридиональный поток плавучести.

Число неизвестных в системе (2) можно уменьшить если исключить давление P и выразить трехмерное соленоидальное поле скорости через тороидальный ω и полоидальный Φ потенциалы [Джозеф, 1981]: $\mathbf{v} = \operatorname{rot}(\mathbf{k}\omega) + \operatorname{rot}^2(\mathbf{k}\Phi)$, где, как и ранее, $\mathbf{k}$ — вертикальный орт. В покомпонентной записи:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial x}, \\ w &= -\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right). \end{aligned}$$

С учетом этих соотношений система (2) сводится к системе

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \omega &= f\Phi_z + \Lambda\Phi_y, \quad \frac{D\Delta\Phi}{Dt} = -f\omega_z - \sigma, \\ \frac{D\sigma}{Dt} &= f\Lambda \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} \right) + N^2\Delta_2\Phi - f\Lambda \frac{\partial \omega}{\partial x}, \end{aligned} \quad (5)$$

где Δ, Δ_2 соответственно трехмерный и двумерный (по горизонтальным координатам) операторы Лапласа. Для получения второго уравнения (5) к уравнению для w в (2) следует применить оператор Лапласа и учесть соотношения $w = -\Delta_2\Phi$, $-\Delta P = f(u_y - v_x) + 2\Lambda w_x - \sigma_z$. Соотношение для давления P получается из системы (2) взятием оператора дивергенции.

Далее мы будем использовать безразмерную форму системы (5)

$$\begin{aligned} \frac{D\omega}{Dt} &= \sqrt{T} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + z \frac{\partial}{\partial x}, \\ \frac{D}{Dt} \Delta\Phi &= -\sqrt{T} \frac{\partial \omega}{\partial z} - \sigma, \\ \frac{D\sigma}{Dt} &= \sqrt{T} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} + \operatorname{Ri} \Delta_2\Phi - \sqrt{T} \frac{\partial \omega}{\partial x}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь в качестве масштаба координат принят масштаб L , в качестве масштаба времени Λ^{-1} , и в качестве масштабов переменных ω, Φ, σ приняты соответственно Lu_0, L^2u_0, Lu_0 где u_0, L — произвольные постоянные размерности скорости и длины (поскольку в задаче нет характерного пространственного масштаба, их можно выбрать произвольно).

В систему (6) входят два безразмерных параметра:

$$\text{Ri} \equiv \frac{N^2}{\Lambda^2}, \quad T \equiv \frac{f^2}{\Lambda^2}.$$

Это — число Ричардсона и его аналог T . Далее мы исследуем особенности динамики возмущений для различных значений этих параметров.

Рассмотрим вначале поведение симметричных (двумерных) возмущений, не зависящих от координаты x вдоль потока. Для таких возмущений $D/Dt = \partial/\partial t$ и система (6) сводится к одному уравнению для потенциала Φ :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right] + T \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + 2\sqrt{T} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} + \text{Ri} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \quad (7)$$

Отыскивая решения (7) в форме нормальной моды, периодически зависящей от координат, $\Phi = \exp(kt) \exp i(r \cos \varphi y + r \sin \varphi z)$, r — постоянный модуль волнового вектора, для инкремента нарастания k получим выражение

$$k^2 = -(T \sin^2 \varphi + 2\sqrt{T} \sin \varphi \cos \varphi + \text{Ri} \cos^2 \varphi). \quad (8)$$

Согласно (8) k зависит только от угла φ , образованного волновым вектором с горизонталью. Течение неустойчиво, если $k^2 > 0$. Положительное значение k при этом отвечает растущему возмущению (неустойчивости). Неравенство $k^2 > 0$ можно записать в виде $T \tan^2 \varphi + 2\sqrt{T} \tan \varphi + \text{Ri} < 0$, откуда

$$\frac{1}{\sqrt{T}}(-1 - \sqrt{1 - \text{Ri}}) < \tan \varphi < \frac{1}{\sqrt{T}}(-1 + \sqrt{1 - \text{Ri}}). \quad (9)$$

Из (9) следует, что симметричная неустойчивость имеет место, если число Ричардсона $\text{Ri} < 1$, причем на плоскости (l, m) волновой вектор неустойчивых возмущений лежит внутри сектора (угла), ограниченного прямыми $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$, (см. рис. 3), где

$$\tan \varphi_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{T}}(-1 \pm \sqrt{1 - \text{Ri}}). \quad (10)$$

Здесь мы получили (в других обозначениях) классические результаты работы [Bennets and Hoskins,

1979]. Отметим, что при $\text{Ri} = 0$ (отсутствие стратификации) и характерном значении $T = 10^{-2} \ll 1$ ($f = 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $U_z = 10^{-3} \text{ с}^{-1}$) возмущение с максимальной скоростью роста возрастает в e раз за время $(fU_z)^{-1/2} \sim 1$ час, линии равных фаз наклонены к горизонту под углом $\sim 45^\circ$.

3. ДИНАМИКА И ВЗРЫВНОЙ РОСТ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Исследуем теперь поведение несимметричные (пространственные) возмущения, ориентированные под углом потоку. Для описания динамики этих возмущений используем немодальный подход. Следуя основной схеме этого подхода, переходим в системе (6) из лабораторной в движущуюся с потоком систему координат. Координаты в движущейся системе связаны с обычными координатами соотношениями

$$t_* = t, \quad x_* = x - zt, \quad y_* = y, \quad z_* = z.$$

При этом

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_*} - z_* \frac{\partial}{\partial x_*}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_*}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y_*},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z_*} - t_* \frac{\partial}{\partial x_*}.$$

В новых координатах оператор полной производной преобразуется к виду $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + z \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t_*}$. В этом состоит смысл замены координат (безразмерная запись).

Перейдем в (6) к новым координатам (обозначаем их нижней звездой) и будем искать гармонические по пространству решения вида:

$$(\sigma, \Phi) = (\sigma(t_*), \Phi(t_*)) \sin(kx_* + ly_* + mz_*), \quad (11)$$

$$\omega = \omega(t_*) \cos(kx_* + ly_* + mz_*),$$

где k, l, m — компоненты волнового вектора возмущения вдоль осей x_*, y_*, z_* соответственно, $\sigma(t_*), \Phi(t_*), \omega(t_*)$ в правой части — соответствующие амплитуды, зависящие от времени (обозначаем их теми же символами).

В исходных физических переменных решение (11) примет вид немодальной волны

$$(\sigma, \Phi) = (\sigma(t), \Phi(t)) \sin(kx + ly + (m - kt)z), \quad (12)$$

$$\omega = \omega(t) \cos(kx + ly + (m - kt)z),$$

с вертикальным волновым числом $m - kt$, зависящим от времени.

Подставляя (11) в преобразованную форму (6), получим систему из трех обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= B(t)\Phi, \quad \frac{d}{dt}(A^2(t)\Phi) = \sigma - \sqrt{T}(m - kt)\omega, \\ \frac{d\sigma}{dt} &= \sqrt{T}k\omega - C(t)\Phi. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь временная переменная для удобства вновь обозначена через t , и определены параметры

$$\begin{aligned} B(t) &= \sqrt{T}(m - kt) + l, \quad A^2(t) = k^2 + l^2 + (m - kt)^2, \\ C(t) &= \sqrt{T}l(m - kt) + \text{Ri}(k^2 + l^2). \end{aligned}$$

Удобно ввести также параметр $D(t) = (\sqrt{T}(m - kt) + l)^2 + (\text{Ri} - 1)l^2 + \text{Ri}k^2$.

Важная особенность системы уравнений (13) для амплитуд состоит в том, что она имеет первый интеграл

$$B(t)\sigma + C(t)\omega + \sqrt{T}kA^2(t)\Phi = q = \text{const}, \quad (14)$$

отражающий закон сохранения потенциальной завихренности для возмущений. Используя этот интеграл, систему (13) можно свести к одному уравнению второго порядка для амплитуды тороидального потенциала $\omega(t)$: Определяя безразмерные волновые числа $t_1 = m/k$, $t_2 = l/k$, получим уравнение

$$\frac{d}{dt}\left(R^2(t)\frac{d\omega}{dt}\right) + \frac{D(t)}{B^2(t)}\omega = \frac{q}{B^2(t)}, \quad (15)$$

где $R^2(t) = \frac{A^2(t)}{B^2(t)} = \frac{1 + t_2^2 + (t_1 - t)^2}{\sqrt{T}(t_1 - t) + t_2^2}$, $\frac{D(t)}{B(t)} = \frac{(\sqrt{T}(t_1 - t) + t_2)^2 + (\text{Ri} - 1)t_2^2 + \text{Ri}}{\sqrt{T}(t_1 - t) + t_2^2}$. Уравнение (15)

получается умножением первого уравнения (13) на $A^2(t)/B^2(t)$, дифференцирования по времени и преобразованием правой части преобразованного уравнения с использованием закона сохранения потенциальной завихренности.

Общее решение (15) можно представить в виде $\omega(t) = \omega_w(t) + \omega_v(t)$, где $\omega_w(t)$ — общее решение однородного уравнения (волновой компонент, $q = 0$), $\omega_v(t)$ — частное решение неоднородного уравнения (вихревой компонент). В данной задаче физический смысл подобного разделения возмущений на два класса (волновые, вихревые) проявляется при рассмотрении поведения решений на больших временах. Нетрудно видеть, что при $t \rightarrow \infty$ в уравнении (15) $A^2(t)/B^2(t) \rightarrow 1/T$,

$D(t)/B^2(t) \rightarrow 1$. Уравнение (15) при этом сводится к уравнению $\frac{d^2\omega}{dt^2} + T\omega(t) = \frac{q}{k^2t}$, из которого следует, что при $t \rightarrow \infty$

$$\omega_w(t) \sim C_1 \cos(\sqrt{T}t) + C_2 \sin(\sqrt{T}t), \quad \omega_v(t) \sim \frac{q}{Tk^2t}.$$

Таким образом, на больших временах амплитуда волнового компонента осциллирует (с инерционной частотой f в размерных единицах), а вихревого — монотонно затухает как t^{-1} . Далее мы ограничимся рассмотрением волновых возмущений, считая $q = 0$.

Поскольку в однородном уравнении (15) $R^2(t) > 0$, $B^2(t) > 0$ поведение решений этого уравнения определяется знаком коэффициента

$$d(t) = D(t)/k^2 = (\sqrt{T}(t_1 - t) + t_2)^2 + (\text{Ri} - 1)t_2^2 + \text{Ri}.$$

Очевидно, при $\text{Ri} > 1$ коэффициент $d(t) > 0$, и все решения (15) осциллируют. Пусть теперь $\text{Ri} < 1$, и выполнено неравенство $(\text{Ri} - 1)t_2^2 + \text{Ri} < 0$ или

$$t_2^2 = \frac{l^2}{k^2} > \frac{\text{Ri}}{1 - \text{Ri}}.$$

В этом случае коэффициент $d(t)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} d(t) &= T(\mu_1 - t)(\mu_2 - t), \\ \mu_{1,2} &= t_1 + \frac{t_2 \mp \sqrt{(1 - \text{Ri})t_2^2 - \text{Ri}}}{\sqrt{T}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Для уравнения (15) точки μ_1, μ_2 являются точками поворота или возврата, т.е. точками, при переходе через которые меняется тип решения (осциллирующее или экспоненциальное). В случае $\mu_2 > \mu_1 > 0$ на промежутке интегрирования $0 < t < \infty$ имеются две точки поворота, соответственно на промежутках $(0, \mu_1)$, $(\mu_2, +\infty)$ решение осциллирует, а на промежутке (μ_1, μ_2) экспоненциально растет. В случае $\mu_1 < 0 < \mu_2$ имеется одна точка поворота μ_2 , при переходе через которую экспоненциальный рост сменяется осциллирующим поведением. Отметим, что при $t_2^2 \gg \text{Ri}/(\text{Ri} - 1)$ (это неравенство заведомо выполняется, если $k \rightarrow 0$) справедливы асимптотические выражения

$$\mu_{1,2} \sim v_{1,2} = t_1 + \frac{t_2}{\sqrt{T}}(1 \mp \sqrt{1 - \text{Ri}}).$$

Имеет место также точное представление $d(t) = T(v_1 - t)(v_2 - t) + \text{Ri}$. При $\text{Ri} = 0$ (отсутствие плотностной стратификации) для точек поворота имеем $\mu_1 = t_1$, $\mu_2 = t_1 + 2t_2/\sqrt{T}$.

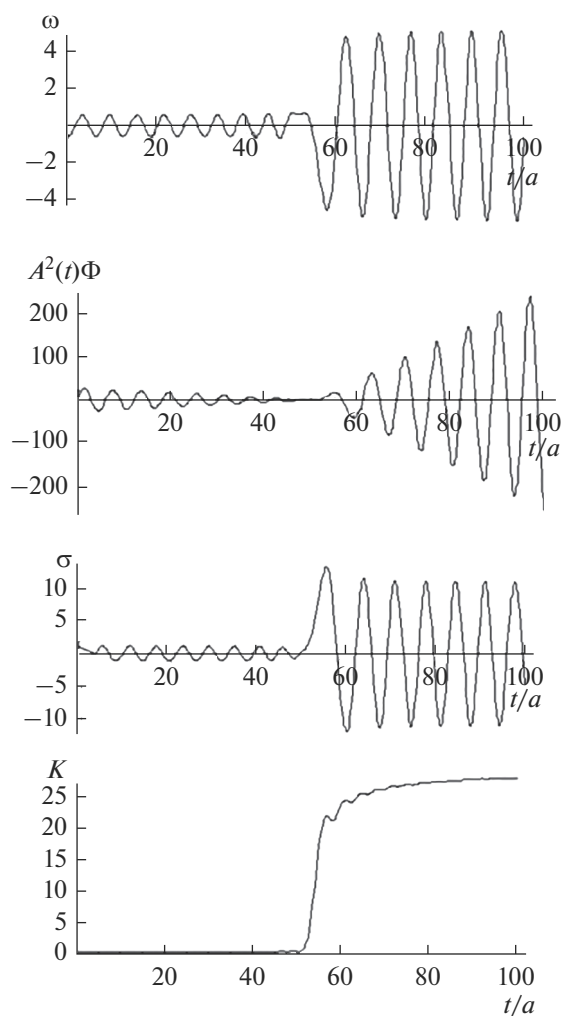


Рис. 1. Зависимость от времени амплитуд ω , $A^2(t)\Phi$, σ и кинетической энергии K (сверху вниз) при $Ri = 0$, $T = 1$. Точки поворота $\mu_1 = 50$, $\mu_2 = 53.6$. Для наглядности рисунка по горизонтальной оси отложено нормированное время $t/10$.

При наличии точек поворота, асимптотические решения однородного уравнения (15) можно представить в терминах функций Эйри $Ai(z)$, $Bi(z)$ [Найфэ, 1976]. Эти функции описывают переход от осциллирующего поведения к экспоненциальному и обратно. В настоящее время прибегать к этим функциям нет особой необходимости, решение дифференциального уравнения с точками поворота легко строится численно в системе Математика. На рис. 1, 2 приведены зависимости амплитуд от времени и соответствующие графики временного хода осредненной кинетической энергии K в ситуации с двумя точками поворота при $Ri = 0$ и $Ri = 3/4$. Отчетливо видно, как участки практически постоянного значения энергии на стадии осцилляций перемежаются

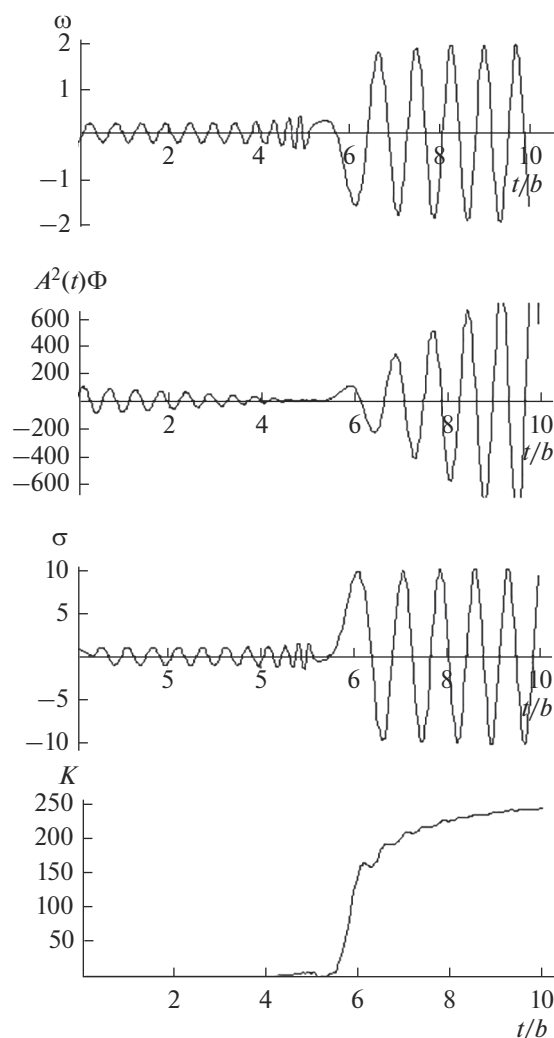


Рис. 2. То же, что и на рис. 1, но при $Ri = 0.75$, $T = 0.1$. Точки поворота $\mu_1 = 166$, $\mu_2 = 181.8$. По горизонтальной оси отложено нормированное время $t/31.6$.

участком взрывного экспоненциального роста конечно продолжительности. Отметим, что при переходе через точки поворота скачки переменных могут достигать нескольких порядков; поэтому в расчетах использовались специально подобранные значения параметров. По горизонтальной оси для наглядности рисунков отложено сжатое нормированное время $t/a, t/b$.

Эффект временного экспоненциального роста возмущений, связанный с наличием точек поворота, имеет простую кинематическую интерпретацию. Как отмечено ранее, вертикальное волновое число несимметричного возмущения зависит от времени: $m(t) = m - kt$. Отсюда следует, что проекция трехмерного волнового вектора $\mathbf{k} = (k, l, m - kt)$ на плоскость волновых чисел (l, m) вращается в этой плоскости, образуя в момент времени t с горизон-

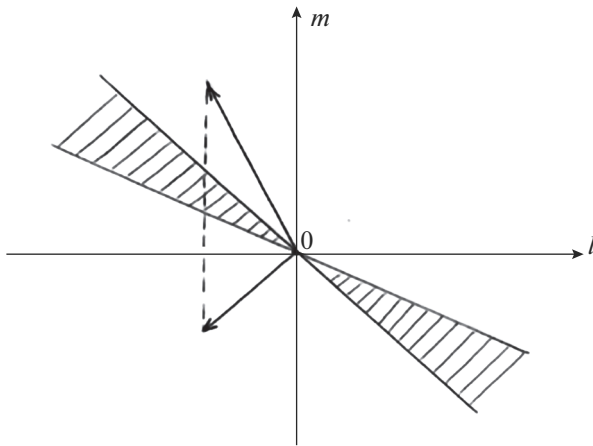


Рис. 3. Прохождение волнового вектора через сектор симметричной неустойчивости (заштрихован) на плоскости волновых чисел.

тальной осью l угол $\varphi(t)$, где $\operatorname{tg} \varphi(t) = (m - kt)/l$. Предположим, что в начальный момент времени эта проекция находится вне сектора симметричной неустойчивости, как это показано на рис. 3. Тогда при вращении в некоторый момент времени она попадет в этот сектор, а в некоторый момент выйдет из него. Можно показать, что для длинных волн эти моменты отвечают прохождению проекции волнового вектора через границы сектора симметричной неустойчивости. Находясь внутри этого сектора, возмущение экспоненциально растет, вне него — осциллирует. Случай одной точки поворота, очевидно, отвечает ситуации, когда в начальный момент времени проекция уже находится внутри сектора, и затем, с течением времени, выходит из него.

Эффект временного экспоненциального роста возмущений представляет собой новый тип гидродинамической неустойчивости. С этим типом могут быть связаны порывистые усиления возмущений в сдвиговых течениях, внезапные вспышки турбулентности в зональных тропосферных потоках.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение сформулируем основные результаты. Исследована линейная динамика возмущений в геострофическом потоке стратифицированной жидкости с постоянным вертикальным сдвигом. В отличие от предыдущих работ на эту тему, в рассмотрение включены пространственные (несимметричные) возмущения, ориентированные под углом к потоку. Проведено разделение несимметричных возмущений на два класса (волновые, вихревые) по значению потенциальной завихренности. Показано, что при числах Ричардсона

меньших единицы, участки осциллирующего поведения несимметричных волновых возмущений могут перемежаться участком взрывного экспоненциального роста конечной продолжительности. Дана кинематическая интерпретация этого эффекта, связанная с прохождением вращающегося волнового вектора возмущения через сектор симметричной неустойчивости.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-17-00273 “Вихревая и волновая динамика изменяющейся земной атмосферы”).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. СОХРАНЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАВИХРЕННОСТИ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Из полной нелинейной системы уравнений Буссинеска следует закон сохранения потенциальной завихренности [Педлоски, 1987]: $\partial q / \partial t + \mathbf{u} \nabla q = 0$, где

$$q = (\operatorname{rot} \mathbf{u} + f \mathbf{k}, \nabla \sigma) \quad (\text{A.1})$$

(круглыми скобками обозначено скалярное произведение). Потенциальная завихренность горизонтального течения с вертикальным сдвигом $\mathbf{U} = U(z) \mathbf{i} = \Lambda z \mathbf{i}$ и распределением плавучести $\bar{\sigma} = \Sigma(y, z) = N^2 z - f \Lambda y$

$$\bar{q} = (\operatorname{rot} \mathbf{U} + f \mathbf{k}, \nabla \bar{\sigma}) = f(N^2 - \Lambda^2) = \text{const}. \quad (\text{A.2})$$

Отсюда следует, что если $q = \bar{q} + q'$, то, в рамках линеаризованной системы уравнений, возмущение q' удовлетворяет закону сохранения $Dq'/dt = 0$ или $q'_t + \Lambda z q'_x = 0$. Полагая $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}'$, $\sigma = \bar{\sigma} + \sigma'$, для q' из (A.1) получим выражение

$$q' = (\operatorname{rot} \mathbf{U} + f \mathbf{k}, \nabla q') + (\operatorname{rot} \mathbf{u}', \nabla \bar{\sigma}), \quad (\text{A.3})$$

или, в подробной записи (штрихи у переменных опускаем)

$$q = N^2(v_x - u_y) - f \Lambda(u_z - w_x) + \Lambda \sigma_y + f \sigma_z. \quad (\text{A.4})$$

Этот закон есть закон сохранения (3). Отметим, что этот закон можно получить и непосредственно из линеаризованной системы (2), однако такой вывод представляет собой довольно утомительную процедуру. Представляет интерес получить закон сохранения непосредственно из первых принципов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981. 638 с.
Найфэ А. Методы возмущений. М.: Мир. 1976. 456 с.

- Калашник М.В., Свиркунов П.Н. О состояниях цикло-строфического и геострофического баланса // Докл. РАН. 1995. Т. 344. № 2. С. 233–236.
- Калашник М.В., Свиркунов П.Н. О симметричной устойчивости состояний циклострофического и геострофического баланса в стратифицированной среде // Докл. РАН. 1996. Т. 348. № 6. С. 811–813.
- Калашник М.В., Курганский М.В., Чхетиани О.Г. Бароклинная неустойчивость в геофизической гидродинамике // Успехи физических наук. 2022. Т. 192. № 10. С. 1110–1144.
- Калашник М. В. Неустойчивость сдвигового течения на конечном временном промежутке // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2023. Т. 59. № 2. С. 144–149.
- Курганский М.В. Симметричная неустойчивость вертикальных бароклинных вихрей с теплым ядром // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2023. Т. 59. № 3. С. 251–264.
- Шакина Н.П. Гидродинамическая неустойчивость в атмосфере. Л.: Гидрометеиздат, 1990. 309с.
- Bennets P.A., Hoskins B.J. Conditional symmetric instability – a possible explanation for frontal rainbands // Quart. J. Roy. Met. Soc. 1979. V. 105. P. 945–962.
- Chagelishvili G.D., Rogava A.D., Segal I., Hydrodynamic Stability of Compressible Plane Couette Flow // Physical Review E. 1994. V. 50. P. 4283–4289.
- Chagelishvili G.D., Tevzadze A.G., Bodo G., Moiseev S.S. Linear mechanism of wave emergence from vortices in smooth shear flows // Phys. Rev. Letters. 1997. V. 79. № 17. P. 3178–3181.
- Kalashnik M.V., Mamatsashvili G.R., Chagelishvili G.D., Lominadze J.G. Linear dynamics of non-symmetric perturbations in geostrophic flows with a constant horizontal shear // Quart. J. Roy. Met. Soc. 2006. V. 132. № 615. P. 505–518.
- Pedlosky J. Geophysical Fluid Dynamics. Berlin-New York.: Springer-Verlag, 1987. 710 p.

Explosive Growth of Asymmetric Disturbances in a Flow with Vertical Shear

M. V. Kalashnik^{1, 2, 3, *}

¹Obukhov Institute of Atmospheric Physics, RAS, Pyzhevsky per., 3, Moscow, 109017 Russia

²Schmidt Institute of Physics of the Earth, RAS, Bolshaya Gruzinskaya, 10, Moscow, 123242 Russia

³Research and Production Association Typhoon, ul. Pobedy, 4, Obninsk, Kaluga obl., 249038 Russia

*e-mail: kalashnik-obn@mail.ru

The classical problem of geophysical hydrodynamics is the problem of the instability of a zonal geostrophic flow with a vertical velocity shear. At present, the instability with respect to symmetric perturbations that do not depend on the coordinate along the flow has been most thoroughly studied. For a symmetric instability to arise, the two-dimensional perturbation wave vector must lie inside a certain sector in the vertical plane of the wave numbers. In this paper, we study the instability with respect to asymmetric perturbations oriented at an angle to the flow. Fundamentally new features of the temporal dynamics of the amplitudes of such perturbations are found. The main feature is associated with the existence of a stage of exponential explosive growth of finite duration. A kinematic interpretation of this stage is given, which is related to the passage of the vertical projection of the perturbation wave vector through the sector of symmetric instability.

Keywords: baroclinic instability, vertical velocity shear, wave vector, turning points