ФИЗМАТ, 2023, том 1, № 2, с. 75–87

УДК 530.145

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ МАССИВНОГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ ШВАРЦШИЛЬДА

И. П. Волобуев[1], С. И. Кейзеров[1], Э. Р. Рахметов[1,*]

[1]Научно-исследовательский институт ядерной физики имени Д.В. Скобельцына Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия

**e-mail: rahmetov@theory.sinp.msu.ru*

Поступила в редакцию 31.07.2023 г.
После доработки 14.11.2023 г.
Принята к публикации 11.12.2023 г.

Рассмотрена задача нахождения решений уравнения Клейна–Гордона для свободного массивного вещественного скалярного поля в пространстве-времени Шварцшильда. Показано, что радиальную часть этого уравнения можно привести к виду конфлюэнтного уравнения Гойна, а соответствующие решения выразить через конфлюэнтные функции Гойна. Для этого сначала найдены решения в виде бесконечных степенных рядов в окрестности особых точек уравнения, а затем показано, что эти решения связаны аналитическим продолжением. При изучении асимптотики решений на бесконечности выделены физически адекватные решения, отвечающие квантовым состояниям как финитного, так и инфинитного движения массивных скалярных частиц в гравитационном поле черной дыры Шварцшильда. Показано, что энергетический спектр состояний обоих видов непрерывен, и их можно нормировать на дельта-функцию от энергии. Кратко обсуждается возможное дальнейшее применение результатов.

DOI: 10.56304/S2949609823020053, **EDN:** WSVDLF

ВВЕДЕНИЕ

Квантование полей в гравитационном поле черных дыр активно изучается с начала семидесятых годов прошлого века [1, 2]. Актуальность данной темы в последнее время возросла, в частности, потому, что в качестве перспективных кандидатов на роль темной материи [3, 4] стали рассматриваться так называемые первичные черные дыры, возникшие во времена Большого Взрыва. В настоящее время из-за потери массы за счет излучения Хокинга первичные черные дыры с массами порядка 10^{15} граммов должны заканчивать свое существование в виде гамма-всплесков, обладающих характерным спектром. Таким образом, именно в нашу эпоху можно было бы по результатам астрономических наблюдений оценить плотность первичных черных дыр, обладающих характерными массами 10^{15}–10^{16} граммов, и понять, какую долю темной материи они составляют. Современные ограничения на плотность первичных черных дыр приведены в обзоре [5]. Однако, ситуация осложняется тем, что спектр излучения черной дыры в последние мгновения ее жизни скорее всего будет сильно отличаться от предсказанного Хокингом [6, с. 283]. Поскольку излучение Хокинга – это фактически рождение гравитационным полем черной дыры квантов всевозможных полей вблизи горизонта событий, то вопросы последовательного квантования полей в окрестности черной дыры становятся крайне важны для корректного описания ее спектра, в особенности в последние мгновения существования.

В отсутствие последовательной квантовой теории гравитации основным инструментом для изучения таких объектов остается квантовая теория поля в искривленном пространстве-времени [6–12]. Однако, несмотря на более чем полувековую историю ее существования, многие фундаментальные вопросы остаются открытыми для обсуждения даже в простейшем случае скалярного поля. Например, в одной из классических работ [1], посвященной каноническому квантованию скалярного поля, не проведена проверка выполнения коммутационных соотношений, что является необходимым шагом при проведении процедуры квантования. Также для проведения корректной процедуры канонического квантования необходимо знать свойства решений уравнений движения соответствующих полей и, в частности, иметь полную систему собственных функций, отвечающих различным квантовым состояниям, по которым будет проводиться разложение поля. Все эти вопросы, включая наличие полного набора собственных функций, детально не обсуждались ни в работе [1], ни в последующих работах на эту тему. Более того, в научной литературе встречаются противоречивые выводы о спектре состояний в рамках релятивистской квантовой механики даже в простейшем случае скалярного поля в гравитационном поле черной дыры Шварцшильда. Например, в известной статье [13] утверждается, что при энергиях меньших, чем масса поля, спектр физических состояний является дискретным (хотя при этом каждое состояние имеет бесконечную норму, что приводит к явному противоречию).

Что касается полной системы собственных функций, по которым можно разложить решения для скалярного поля в окрестности черной дыры Шварцшильда, то до недавнего времени как в журнальных статьях [1], так и в классических монографиях по данной тематике [6, 7, 9, 10] всегда утверждалось, что соответствующие радиальные функции не выражаются через известные специальные функции. Однако в работе [14] было показано, что для массивного скалярного поля в метрике Шварцшильда спектр оказывается непрерывным, а решения для радиальных функций могут быть выражены через функции Гойна, но явные формулы для физических решений, выраженных через эти функции, не приводились. Насколько нам известно, свойства спектра радиального уравнения правильно описаны с физической точки зрения только в работах [15, 16]. В представленном ниже изложении наших результатов мы будем опираться на выводы этих работ.

Настоящая статья организована следующим образом. В первом разделе мы покажем, как уравнение для радиальных функций свободного массивного скалярного поля в метрике Шварцшильда сводится к конфлюэнтному уравнению Гойна и выпишем его формальное общее решение, выраженное через конфлюэнтные функции Гойна. Во втором разделе мы получим решения данного уравнения в виде бесконечных рядов. В третьем разделе мы изучим асимптотическое поведение построенных решений на бесконечности и определим линейную комбинацию, которая не будет расходиться в бесконечно удаленной точке — так называемое физическое решение, выраженное через конфлюэнтные функции Гойна.

1. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ РАДИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ СВОБОДНОГО ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ В МЕТРИКЕ ШВАРЦШИЛЬДА

Как известно, динамическое уравнение, которому подчиняется действительное скалярное поле φ с массой m, есть уравнение Клейна—Гордона:

$$\left[\Box + m^2\right]\phi = 0. \tag{1}$$

Выпишем в явном виде, как будет выглядеть данное уравнение в метрике Шварцшильда. Черная дыра Шварцшильда и ее метрика полностью характеризуются радиусом горизонта событий, или так называемым радиусом Шварцшильда, который обычно обозначают r_0. Другими словами, рассматриваемая физическая система имеет характерный размерный параметр, и поэтому при ее описании удобно перейти к безразмерным переменным, умножив все размерные величины на радиус Шварцшильда в соответствующей степени. Метрика Шварцшильда в новых безразмерных переменных r, t принимает вид

$$ds^2 = f_S dt^2 - f_S^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \tag{2}$$

где f_S — зависящая только от безразмерной переменной r функция

$$f_S \equiv 1 - 1/r = (r-1)/r, \tag{3}$$

а $d\Omega^2$ — метрика на двумерной сфере единичного радиуса

$$d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2. \tag{4}$$

Уравнение Клейна—Гордона в метрике Шварцшильда в новых безразмерных переменных запишется как

$$\left[\Box + \mu^2\right]\phi = 0, \tag{5}$$

где безразмерный параметр $\mu = mr_0$, а даламбертиан в метрике Шварцшильда (2) имеет следующий вид:

$$\Box = \frac{1}{f_S}\partial_t^2 - \frac{1}{r^2}\partial_r r^2 f_S \partial_r - \frac{1}{r^2}\Delta_\Omega, \tag{6}$$

где Δ_Ω – лапласиан на двумерной сфере единичного радиуса:

$$\Delta_\Omega \equiv \partial_\theta^2 + \operatorname{ctg}\theta\,\partial_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2. \tag{7}$$

Оператор Даламбера (6) является эрмитовым на пространстве функций, отвечающих нормируемым квантовым состояниям скалярных частиц в гравитационном поле черной дыры Шварцшильда [16].

Уравнение Клейна–Гордона (5) с даламбертианом вида (6) допускает разделение переменных

$$\phi = e^{-i\omega t} R(r)\, Y_{lm}(\theta,\varphi), \tag{8}$$

где Y_{lm} – сферические функции, являющиеся собственными функциями оператора Лапласа Δ_Ω с собственными значениями $-l(l+1)$

$$\Delta_\Omega Y_{lm} = -l(l+1)Y_{lm}, \quad l = 0,1,2\ldots, \tag{9}$$

а $R(r)$ – радиальная функция, подчиняющаяся уравнению

$$\left[-\frac{\omega^2}{f_S} - \frac{1}{r^2}\partial_r r^2 f_S \partial_r + \frac{l(l+1)}{r^2} + \mu^2\right]R = 0. \tag{10}$$

Умножив (10) на $-(r-1)r^2$ и, учитывая (2), получим уравнение второго порядка с полиномиальными коэффициентами:

$$[P_0(r)\partial_r^2 + P_1(r)\partial_r + P_2(r)]R = 0, \tag{11}$$

где

$$P_0 \equiv (r-1)^2 r, \tag{12}$$

$$P_1 \equiv (r-1)(2r-1), \tag{13}$$

$$P_2 \equiv \omega^2 r^3 - \mu^2(r-1)r^2 - l(l+1)(r-1). \tag{14}$$

Здесь и далее мы существенно используем классификацию дифференциальных уравнений на основе характера их особенностей, предложенную в классической монографии [17]. Наши обозначения и терминология также следуют этой работе. Уравнение (11) с коэффициентами (12)–(14) имеет три особые точки: $r_1 = 0$, $r_2 = 1$, $r_3 = \infty$. Согласно [17] для классификации уравнений рассматриваемого вида необходимо изучить поведение функций $P(r)$ и $Q(r)$ в окрестности особых точек, где

$$P \equiv \frac{P_1}{P_0} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r-1}, \tag{15}$$

$$Q \equiv \frac{P_2}{P_0} = \frac{\omega^2}{(r-1)^2} + \frac{2\omega^2 - \mu^2 - l(l+1)}{r-1} + \frac{l(l+1)}{r} + \omega^2 - \mu^2. \tag{16}$$

Как видно из формул (15)–(16), для рассматриваемого радиального уравнения (11) функция P имеет в точках r_1 и r_2 особенности первого порядка, а функция Q – особенности второго порядка при $\omega > 0$ и первого порядка при $\omega = 0$. Тривиальный случай $\omega = \mu = l = 0$, когда уравнение (11) вырождается и имеет общее решение вида $R(r) = C_0 + C_1 \ln(1 - 1/r)$, выражающееся в элементарных функциях, будет кратко рассмотрен в разделе 4. В окрестности бесконечно удаленной точки r_3 функция P ведет себя как $O(r^{-1})$, а Q стремится к конечному ненулевому значению $\omega^2 - m^2$ при $\omega \neq m$, либо стремится к нулю как $O(r^{-1})$ при $\omega = m$. Таким образом, точки r_1 и r_2 являются фуксовыми особыми точками при $\omega > 0$ и нефуксовыми при $\omega = 0$, а точка r_3 является нефуксовой в обоих случаях. (Напомним, что конечная особая точка r_* называется фуксовой, если функция P в этой точке имеет полюс не выше первого, а функция Q – не выше второго порядка.

Если r_* – бесконечно удаленная точка, то она является фуксовой, если $P\big|_{r\to\infty} = O(r^{-1})$ и $Q\big|_{r\to\infty} = O(r^{-2})$. Для уравнений рассматриваемого типа особая точка считается регулярной тогда и только тогда, когда она является фуксовой [17].)

Для функций $1/P$ и $1/Q$ рассмотрим в особых точках r_1 и r_2 кратности нулей $K_P(r_{1,2})$ и $K_Q(r_{1,2})$ соответственно, для которых получим

$$K_P(r_{1,2}) = 1, \quad K_Q(r_{1,2}) = \begin{cases} 2 & \text{при} \quad \omega > 0 \\ 1 & \phantom{\text{при}} \quad \omega = 0 \end{cases} \tag{17}$$

Для кратностей же нулей данных функций в бесконечно удаленной точке r_3 имеем

$$K_P\left(r_3\right) = n_1 - n_0 + 2 = 1, \quad K_Q\left(r_3\right) = n_2 - n_0 + 4 = 4, \tag{18}$$

где n_j – степени полиномов P_j.

Далее, согласно [17], s-ранги особых точек определяются как

$$Rank(r_j) = \max\left\{K_P(r_j), K_Q(r_j)/2\right\}. \tag{19}$$

Таким образом, для особых точек исследуемого уравнения (11) с коэффициентами (12)–(14) мы получаем следующие значения s-рангов

$$Rank\left(r_1\right) = 1, \quad Rank\left(r_2\right) = 1, \quad Rank\left(r_3\right) = 2. \tag{20}$$

Согласно [17], особая точка называется ветвящейся, если ее ранг является полуцелым. Учитывая (20), приходим к заключению, что в исследуемом радиальном уравнении (11) все точки являются неветвящимися. Также согласно [17], уравнение с полиномиальными коэффициентами называется фуксовым, если все его особые точки являются фуксовыми. В противном случае уравнение называется нефуксовым. Если все точки нефуксового уравнения являются неветвящимися, оно называется конфлюэнтным. С учетом данного определения и формулы (20) мы можем заключить, что исследуемое уравнение (11) относится к классу конфлюэнтных уравнений.

Набор s-рангов особых точек уравнения называется s-мультисимволом нефуксового дифференциального уравнения. Введем также понятие неприводимого дифференциального уравнения. Это дифференциальное уравнение с неустранимыми особыми точками. Найденные выше s-ранги особых точек исследуемого уравнения (11) крайне важны для его классификации и поиска возможных решений, поскольку неприводимые дифференциальные уравнения, у которых совпадают s-мультисимволы, принадлежат к одному типу – существуют преобразования, переводящие их друг в друга. Именно поэтому s-мультисимвол удобно использовать для классификации типов нефуксовых уравнений. В частности, из (20) следует, что изучаемое нами радиальное уравнение (11) относится к конфлюэнтным уравнениям с s-мультисимволом {1, 1, 2}. В соответствии с классификацией, приведенной в [17], такое уравнение является конфлюэнтным уравнением Гойна и с помощью некоторых преобразований может быть приведено к одной из стандартных форм конфлюэнтного уравнения Гойна [17, с. 132]. Для этого сделаем в уравнении (11) подстановку следующего вида

$$R(r) = (r-1)^{i\omega} e^{ikr} F(r), \tag{21}$$

где $k \equiv \pm\sqrt{\omega^2 - \mu^2}$. Уравнение, которому удовлетворяет функция $F(r)$, есть стандартная форма конфлюэнтного уравнения Гойна:

$$[r(r-1)\partial_r^2 + (-br(r-1) + c(r-1) + dr)\partial_r + (-abr + \lambda)]F = 0, \tag{22}$$

где соответствующие параметры a, b, c, d, λ для исследуемого радиального уравнения (11) равны

$$a \equiv 1 - i(\omega - k)^2/2k, \tag{23}$$

$$b \equiv -i2k, \tag{24}$$

$$c \equiv 1, \tag{25}$$

$$d \equiv 1 + i2\omega, \tag{26}$$

$$\lambda \equiv i(\omega - k) - l(l+1). \tag{27}$$

Согласно [17, 18] общее решение конфлюэнтного уравнения Гойна (22) может быть записано в виде линейной комбинации, содержащей конфлюэнтные функции Гойна, для обозначения которых мы используем форму записи, принятую в известной системе компьютерной алгебры "Mathematica" [19].

$$\begin{gathered} F(r) = C_1 HeunC(-\lambda, -ab, c, d, -b; r) + \\ + C_2 r^{1-c} HeunC((1-c)(-b-d) - \lambda, -ab - b(1-c), 2-c, d, -b; r). \end{gathered} \tag{28}$$

Однако для рассматриваемого уравнения (11) с конкретными значениями параметров (23)–(27) данная формальная запись общего решения оказывается практически бесполезной, как минимум по двум причинам. Во-первых, согласно (25), для рассматриваемого уравнения (11) параметр $c = 1$, однако легко видеть, что при таком значении параметра первое и второе слагаемое в (28) с точностью до констант совпадают друг с другом, и таким образом выписанное решение (28) перестает быть суммой двух линейно независимых решений, как это должно было бы быть для общего решения дифференциального уравнения второго порядка. Во-вторых, функция $HeunC(-\lambda, -ab, c, d, -b; r)$ имеет разрез на луче $[1, \infty)$, в то время как для построения квантовой теории скалярного поля в области над горизонтом черной дыры представляет интерес как раз поведение решения при $r \geq 1$. Таким образом, необходимо осуществить аналитическое продолжение полученного результата на интересующую нас область $r \geq 1$. Обе вышеуказанные проблемы можно решить, построив решение в форме бесконечных рядов, чему будет посвящен следующий раздел настоящей работы.

2. РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ РАДИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ В ВИДЕ БЕСКОНЕЧНЫХ РЯДОВ

Запишем решение конфлюэнтного уравнения Гойна вблизи особых точек r_j в виде степенных рядов от переменной $(z - r_j)$. Здесь и далее z – комплексная переменная, вещественная часть которой совпадает с r, то есть $\mathrm{Re}(z) \equiv r$.

Сначала рассмотрим решение в окрестности горизонта черной дыры Шварцшильда, то есть в окрестности особой точки $r_2 = 1$. Поскольку r_2 – регулярная особая точка, то по крайней мере одно решение в ее окрестности может быть записано в форме так называемого решения Фробениуса

$$F^{(1)}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j^{(1)} (z-1)^{j+\rho}, \tag{29}$$

где показатель степени ρ зависит от конкретной задачи и требует определения в каждом индивидуальном случае [17, с. 23; 20, с. 37]. Таким образом, для построения решения в форме (29) нам необходимо получить выражение для показателя степени ρ. Для этого подставим формальное решение (29) в уравнение (22), получим рекуррентное соотношение для коэффициентов $F_j^{(1)}$ ряда (29)

$$\begin{gathered} (j+\rho+1)(j+\rho+d) F_{j+1}^{(1)} + \\ + [\lambda + (j+\rho)(j+\rho+d) - b(j+\rho+a)] F_j^{(1)} - b(j+\rho-1+a) F_{j-1}^{(1)} = 0. \end{gathered} \tag{30}$$

Поскольку суммирование в (29) производится только по неотрицательным j, это эквивалентно утверждению, что $F_j^{(1)} \equiv 0$ для всех $j < 0$. Отсюда следует, что для $j < -1$ выражение (30) тривиально (то есть сводится к тождеству вида $0 = 0$), а при $j = -1$ и $j = 0$ принимает вид

$$\rho(\rho + d - 1) F_0^{(1)} = 0, \tag{31}$$

$$(\rho+1)(\rho+d) F_1^{(1)} + [\lambda + \rho(\rho+d) - b(\rho+a)] F_0^{(1)} = 0. \tag{32}$$

Формула (32) позволяет выразить коэффициент $F_1^{(1)}$ через $F_0^{(1)}$, в результате чего все члены ряда (29) оказываются пропорциональными $F_0^{(1)}$. Формула (31) позволяет определить допустимые значения показателя ρ:

$$\rho_1 = 0, \quad \rho_2 = 1 - d = -i2\omega. \tag{33}$$

Два возможных значения ρ в (33) соответствуют двум линейно независимым решениям дифференциального уравнения второго порядка. Ниже мы рассмотрим оба решения и их свойства.

Используя формулы (29)–(33), запишем первое решение в окрестности горизонта черной дыры ($r = 1$) с показателем степени $\rho_1 = 0$ в следующем виде

$$F^{(1)}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j^{(1)} (z-1)^j, \tag{34}$$

$$d \cdot F_1^{(1)} + (\lambda - ab) \cdot F_0^{(1)} = 0, \tag{35}$$

$$(j+1)(j+d) F_{j+1}^{(1)} + [j(j+d-b) + \lambda - ab] F_j^{(1)} - b(j-1+a) F_{j-1}^{(1)} = 0. \tag{36}$$

Можно показать, что степенной ряд (34) с коэффициентами, подчиняющимися рекуррентным соотношениям (35) и (36) сходится в круге $|z-1| < 1$, или с учетом того, что $\mathrm{Re}(z) \equiv r$, на интервале $r \in (0,2)$. Теперь заметим, что при $z \to 1$ все члены ряда, кроме первого, стремятся к нулю, поэтому $F^{(1)}(1) = F_0^{(1)}$. Отсюда следует, что предел, взятый по любому пути на комплексной плоскости, заканчивающемся в точке 1, равен $F_0^{(1)}$, а следовательно, не зависит от самого пути, а значит, решение регулярно на горизонте.

Теперь, снова используя формулы (29)–(33), запишем второе решение в окрестности горизонта черной дыры с показателем степени $\rho_2 = 1 - d = -i2\omega$ в следующем виде

$$\tilde{F}^{(1)}(z) = (z-1)^{-i2\omega} \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{F}_j^{(1)} (z-1)^j, \tag{37}$$

$$(2-d)\tilde{F}_1^{(1)} + [\lambda + 1 - d - t(1 + a - d)] \tilde{F}_0^{(1)} = 0, \tag{38}$$

$$\begin{gathered}(j+2-d)(j+1)\tilde{F}_{j+1}^{(1)} + \\ + [\lambda + (j+1-d)(j+1) - t(j+1+a-d)] \tilde{F}_j^{(1)} - t(j+a-d)\tilde{F}_{j-1}^{(1)} = 0.\end{gathered} \tag{39}$$

Так же, как и в случае ранее построенного в окрестности горизонта первого решения, можно показать, что ряд (37) с рекуррентными соотношениями (38), (39) сходится в круге $|z-1| < 1$. Однако, в отличие от первого решения $F^{(1)}(z)$, из-за присутствия осциллирующего множителя вида $(z-1)^{-i2\omega}$ второе решение $\tilde{F}^{(1)}(z)$ на горизонте является бесконечно быстро осциллирующим, хотя при этом и ограниченным.

Вспоминая из (21), как связаны радиальная функция $R(r)$ и решения уравнения (22) $F(r)$, мы можем сделать вывод, что оба решения $R(r)$ уравнения (11) не являются регулярными на горизонте, поскольку ведут себя как $(r-1)^{\pm i\omega} e^{ikr}$, то есть являются ограниченными, но при этом бесконечно быстро осциллирующими.

Теперь рассмотрим решения в форме бесконечных рядов в бесконечно удаленной точке $r_3 = \infty$. Поскольку бесконечно удаленная точка r_3 не является регулярной, то решение в ее окрестности нужно искать в форме так называемого решения Томе, являющегося обобщением решения Фробениуса на случай нерегулярных особых точек [17, 21]

$$F^{(\infty)}(z) = \exp\left[\sum_{n=1}^{Rank(r_3)-1} \alpha_k z^k\right] \sum_{j=0}^{\infty} F_j z^{-j-\rho} = e^{\alpha z} \sum_{j=0}^{\infty} F_j z^{-j-\rho}. \tag{40}$$

Заметим, что в общем случае решение Томе часто оказывается формальным, поскольку полученные с его помощью ряды не являются сходящимися [17, 20, 21]. Однако, мы покажем, что в изучаемом случае в интересующей нас области значений (на вещественном луче) радиус сходимости полученного ряда отличен от нуля.

Подставим решение в форме (40) в дифференциальное уравнение (22), получим рекуррентные соотношения для членов ряда (40):

$$\begin{aligned}\alpha(\alpha-b)F_{j+2}+\left[(j+\rho+1)(b-2\alpha)-ab+(d+1+b-\alpha)\alpha\right]F_{j+1}+\\ +\left[(j+\rho)(j+\rho-d-b+2\alpha)+\lambda-\alpha\right]F_j-(j+\rho-1)^2F_{j-1}=0.\end{aligned}\tag{41}$$

В частности, при $j=-2$ из (41) имеем

$$\alpha(\alpha-b)F_0=0.\tag{42}$$

Из чего мы заключаем, что α может принимать два значения: либо $\alpha=0$, либо $\alpha=b$. Из последнего утверждения в свою очередь следует, что первое слагаемое в (41) равно нулю. Далее, при $j=-1$ из (41) получаем

$$\left[\rho(b-2\alpha)-ab+(d+1+b-\alpha)\alpha\right]F_0=0.\tag{43}$$

Теперь из выражения (43) легко получить значения показателя степени ρ для двух возможных значений параметра α

$$\rho=a\quad\text{при}\quad\alpha=0,\tag{44}$$

$$\rho=1-a+d\quad\text{при}\quad\alpha=b.\tag{45}$$

Таким образом, получив два явных выражения для показателя степени ρ, мы фактически построили два решения Томе в форме (40). Рассмотрим теперь вопрос об их области сходимости.

Первое решение Томе в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид

$$F^{(\infty)}(z)=z^{-a}\sum_{j=0}^{\infty}F_jz^{-j},\tag{46}$$

со следующими рекуррентными соотношениями для коэффициентов F_j:

$$b(j+1)F_{j+1}+\left[(j+a)(j+a-d-b)+\lambda\right]F_j-(j+a-1)^2F_{j-1}=0,\tag{47}$$

$$bF_1+\left[a(a-d-b)+\lambda\right]F_0=0.\tag{48}$$

Поскольку первый член в формуле (47) имеет первый порядок по j, а второй и третий члены – второй порядок по j, то на первый взгляд может показаться, что j-й член ряда растет как $j!$. Однако, так как множитель j^2 входит во второе и третье слагаемые в (47) с противоположным знаком, возможна ситуация, когда расходимости по j^2 во втором и третьем слагаемом компенсируют друг друга. Покажем, что на самом деле коэффициент F_j с ростом j стремится к некоторой постоянной. Для этого перепишем (47) в виде

$$F_{j+1}=\mu_jF_j+\nu_jF_{j-1},\tag{49}$$

где

$$\mu_j\equiv-\frac{(j+a)(j+a-d-b)+\lambda}{b(j+1)},\quad\nu_j\equiv\frac{(j+a-1)^2}{b(j+1)}.\tag{50}$$

Определим отношение

$$\xi_j\equiv F_{j+1}/F_j.\tag{51}$$

Тогда из (49) следует, что

$$\xi_j=\mu_j+\nu_j\xi_{j-1}^{-1}.\tag{52}$$

Далее, поскольку ξ_j растет не быстрее чем j, имеем $\xi_j/\xi_{j-1}=1+O(j^{-1})$. Подставляя данную оценку в (52), получаем приближенное квадратное уравнение для ξ_j:

$$\xi_j^2=\mu_j\xi_j+\nu_j+O(j^{-1})\tag{53}$$

с решениями вида $\xi_j=(\mu_j\pm\sqrt{\mu_j^2+4\nu_j})/2+O(j^{-1})$, которые, согласно формулам (50) с ростом j ведут себя как

$$jb^{-1}(-1\pm\sqrt{1+4b/j})/2.\tag{54}$$

Таким образом, в зависимости от выбора знака перед радикалом решения уравнения (53) при больших j либо остаются константой, либо растут как j/b. Выбор знака в (54) может быть осуществлен из следующих соображений. При больших j, таких что $j \gg |b|$, из (47) следует, что выражение $\xi_{j-1} = \nu_j/\mu_j + O(b/j)$ стремится к единице, а выполнение этого условия возможно только в том случае, если перед радикалом в выражении (54) выбран знак “плюс” и ξ_j ведет себя при больших j как константа.

Таким образом, мы получили, что асимптотически коэффициенты ряда (46) стремятся к постоянному значению. Следовательно, асимптотически при $j \to \infty$ члены полученного ряда (46) стремятся к членам разложения функции $(1 - z^{-1})^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} z^{-j}$, а значит имеют такой же радиус сходимости

$$|z^{-1}| < 1. \tag{55}$$

Учитывая, что по определению $\mathrm{Re}(z) \equiv r$, получим, что ряд сходится для всех $r > 1$.

Второе решение Томе в бесконечно удаленной точке строится аналогично первому

$$\tilde{F}^{(\infty)}(z) = e^{bz} z^{a-d-1} \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{F}_j z^{-j}, \tag{56}$$

где для коэффициентов $\tilde{F}_j$ выполняются рекуррентные соотношения вида

$$-b(j+1)\tilde{F}_{j+1} + [(j+d-a+1)(j+b-a+1) + \lambda - b]\tilde{F}_j - (j+d-a)^2 \tilde{F}_{j-1} = 0, \tag{57}$$

$$b\tilde{F}_1 = [(d-a+1)(b-a+1) + \lambda - b]\tilde{F}_0. \tag{58}$$

Аналогично первому решению, ряд (56) также имеет радиус сходимости вида (55), то есть $r > 1$.

Построенные выше в окрестности горизонта r_2 решения Фробениуса и решения Томе в окрестности бесконечно удаленной точки r_3 сходятся на интервалах (0, 2) и $(1, \infty)$ соответственно. Таким образом, они имеют общую область сходимости (1, 2), в которой являются голоморфными. А поскольку все точки в данной области регулярны, то в ней существует ровно два линейно независимых регулярных решения [22], поэтому каждое из решений в окрестности точки r_2 должно выражаться через некоторую линейную комбинацию решений в окрестности точки r_3. Следовательно, эти линейные комбинации можно рассматривать как аналитические продолжения [23, 24] решений из окрестности точки r_2 на область $[2, \infty)$, и таким образом аналитически продолженное решение определено на объединенном интервале $(0, \infty)$, включающем интересующую нас при квантовании скалярного поля область $[1, \infty)$.

Область под горизонтом, содержащую особую точку $r_1 = 0$, мы не рассматриваем, поскольку она оказывается причинно не связанной с областью, в которой находится наблюдатель.

3. ПОСТРОЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ, ВЫРАЖЕННЫХ ЧЕРЕЗ КОНФЛЮЭНТНЫЕ ФУНКЦИИ ГОЙНА

Нашей следующей задачей будет выразить полученные во втором разделе в виде бесконечных рядов решения через конфлюэнтные функции Гойна. Однако проблема состоит в том, что функция Гойна вида $HeunC(-\lambda, -ab, c, d, -b; r)$ с аргументом r имеет разрез на луче $(1, \infty)$ и не является регулярной в точке 1, тогда как построенные во втором разделе решения в виде бесконечных рядов регулярны в точке 1. Очевидным решением является линейная замена переменной вида $r = 1 - \rho$, при которой уравнение не меняет свою форму

$$[\rho(\rho-1)\partial_\rho^2 + (b\rho(\rho-1) + c\rho + d(\rho-1))\partial_\rho + (ab\rho + \lambda - ab)]F = 0, \tag{59}$$

но при этом по определению имеет решение вида $HeunC(ab - \lambda, ab, d, c, b; 1 - r)$, регулярное в особой точке 1 и нормированное следующим образом: $HeunC(\ldots; 0) = 1$.

Теперь можно утверждать, что ряд (34), описывающий первое решение в окрестности горизонта черной дыры с показателем степени $\rho_1 = 0$ и с рекуррентными соотношениями (35)–(36), с точностью до общего множителя $F_0^{(1)}$ представляет собой разложение в ряд функции $HeunC(ab - \lambda, ab, d, c, b; 1 - r)$. Действительно, в точке $r = 1$ построенное решение $F^{(1)}(z)$ является регулярным и равно первому члену разложения в ряд, т.е. $F_0^{(1)}$. Любое другое независимое решение является комбинацией $F^{(1)}$ и $\tilde{F}^{(1)}$, то есть нерегулярным. С другой стороны, $HeunC(ab - \lambda, ab, d, c, b; 1 - r)$ по определению является единственным регулярным решением уравнения (59), нормированным таким образом, чтобы было $HeunC(\ldots;0) = 1$, а следовательно $F^{(1)}(r) = F_0^{(1)} HeunC(\ldots; 1 - r)$. Что касается второго решения $\tilde{F}^{(1)}$ в окрестности точки $r = 1$, то определяющие его рекуррентные соотношения (38)–(39) можно получить из рекуррентных соотношений (35)–(36), определяющих первое решение $F^{(1)}$, с помощью замены параметров вида $ab - \lambda \to ab + (b - c)(1 - d) - \lambda$, $ab \to ab + b(1 - d)$ и $d \to 2 - d$. А следовательно, с точностью до фактора $(z-1)^{1-d}\tilde{F}_0^{(1)}$ эта функция совпадает с $HeunC(ab + (b - c)(1 - d) - \lambda, b(1 + a - d), 2 - d, c, b; 1 - r)$.

Таким образом, мы пришли к выводу, что общее регулярное на горизонте решение можно записать в виде

$$\begin{gathered} F(r) = C_1 HeunC(ab - \lambda, ab, d, c, b; 1 - r) + \\ + C_2 (1 - r)^{1-d}\, HeunC(ab + (b - c)(1 - d) - \lambda, b(1 + a - d), 2 - d, c, b; 1 - r) \end{gathered} \tag{60}$$

Выбор констант C_1 и C_2 в этом выражении определяется тем, что радиальная функция $R(r)$, описывающая реальную физическую ситуацию, должна быть нормируемой в области от горизонта до бесконечности: либо квадратично интегрируемой в случае наличия дискретного спектра, либо нормированной на дельта-функцию, если спектр непрерывный. Ниже мы определим, чему равно их отношение.

Рассмотрим поведение $R(r)$ на бесконечности. Поскольку при формальном разложении в ряд функции $HeunC(\ldots;1 - r)$ в точке $r = 1$ радиус сходимости полученного ряда равен единице, то для исследования асимптотического поведения выражения (60) на бесконечности удобнее использовать построенные во втором разделе решения Томе в форме (46) и (56), являющиеся аналитическим продолжением на интересующую нас область. Оставляя только первый член ряда в каждом из степенных разложений (46) и (56), получим

$$R(r)\big|_{r\to\infty} \sim (r - 1)^{i\omega} e^{ikr}\{C_3 r^{-a} + C_4 e^{br} r^{a-d-1}\}, \tag{61}$$

а с учетом явного вида параметров уравнения, имеем

$$R(r)\big|_{r\to\infty} \sim (1 - r^{-1})^{i\omega} r^{-1}\left(C_3 e^{i\left(kr + \frac{2\omega^2-\mu^2}{2k}\ln r\right)} + C_4 e^{-i\left(kr + \frac{2\omega^2-\mu^2}{2k}\ln r\right)}\right). \tag{62}$$

При вещественных $k = \pm\sqrt{\omega^2 - \mu^2}$, то есть при $\omega > \mu$ функция $R(r)$ на бесконечности убывает как r^{-1}, при этом асимптотическое условие (62) не накладывает никаких ограничений на k, а следовательно оба решения на бесконечности могут быть нормированы на дельта-функцию независимо от выбора коэффициентов C_3 и C_4. Поскольку коэффициенты C_3 и C_4 с точностью до нормировочного множителя совпадают с константами C_1 и C_2 в выражении (60), то последние также в этом случае могут быть выбраны произвольным образом. В рассматриваемом случае действительного скалярного поля, они должны быть выбраны так, чтобы решение для функции поля (21) было действительным. Очевидно, что это можно сделать двумя различными способами, то есть при $\omega > \mu$ существует два линейно независимых решения. Такое удвоение числа решений по сравнению со скалярным полем в пространстве Минковского было отмечено также в работах [16, 25].

В случае, когда $k = \pm i\sqrt{\mu^2 - \omega^2}$ является чисто мнимым, то есть, когда энергия частицы меньше ее массы ($\omega < \mu$), что фактически соответствует связанному состоянию, выражение в фигурных скобках в (61) приобретает вид

$$C_3 e^{\mp\sqrt{\mu^2-\omega^2}\,r \pm \frac{2\omega^2-\mu^2}{2\sqrt{\mu^2-\omega^2}}\ln r} + C_4 e^{\pm\sqrt{\mu^2-\omega^2}\,r \mp \frac{2\omega^2-\mu^2}{2\sqrt{\mu^2-\omega^2}}\ln r}. \tag{63}$$

Как видим, при $k = i\sqrt{\mu^2 - \omega^2}$ первое слагаемое в (63) экспоненциально убывает, а второе экспоненциально растет. И наоборот, при $k = -i\sqrt{\mu^2 - \omega^2}$, первое слагаемое в (63) растет, а второе экспоненциально убывает. Поэтому в первом случае мы должны положить $C_4 = 0$, а во втором $C_3 = 0$, что в обоих случаях приводит к выражению

$$C_0 e^{-\sqrt{\mu^2-\omega^2}r+\frac{2\omega^2-\mu^2}{2\sqrt{\mu^2-\omega^2}}\ln r}, \tag{64}$$

где $C_0 = C_3 = C_4$ — константа нормировки.

Теперь для установления связи между коэффициентами C_1 и C_2 необходимо выяснить, как функция $HeunC$ связана с $F^{(\infty)}(r)$ и $\tilde{F}^{(\infty)}(r)$.

Ряды (34) и (37), описывающие два решения Фробениуса в окрестности горизонта черной дыры, сходятся при $|1 - r| < 1$, а ряды и (56), описывающие два решения Томе в бесконечно удаленной точке, сходятся при $|r^{-1}| < 1$. Таким образом, пересечение областей их сходимости не является пустым множеством, а представляет собой интервал вида $1 < r < 2$. Для всех точек в этой области функция $HeunC$ должна совпадать с некоторой линейной комбинацией из функций $F^{(\infty)}(r)$ и $\tilde{F}^{(\infty)}(r)$. Аналогичное утверждение имеет место и для второго решения в (60). Комбинация же, фигурирующая в (60), должна выражаться только через одну из них — ту, которая убывает при заданном параметре k:

$$\begin{aligned} &C_1 HeunC(ab - \lambda, ab, d, c, b; 1 - r) + \\ &+ C_2 HeunC(ab + (b - c)(1 - d) - \lambda, b(1 + a - d), 2 - d, c, b; 1 - r) = \\ &= C_0[\theta(-ik)F^{(\infty)}(r) + \theta(ik)\tilde{F}^{(\infty)}(r)]. \end{aligned} \tag{65}$$

В частности, должны совпадать значения левых и правых частей выражения (65), а также их первых производных в точке $r = 3/2$. В результате получаем систему из двух уравнений

$$\sum_{j=1}^{2} A_{ij} C_j = C_0 B_j, \tag{66}$$

где введены следующие обозначения

$$A_{11} \equiv HeunC(ab - \lambda, ab, d, c, b; -1/2), \tag{67}$$

$$A_{12} \equiv (-1/2)^{-i2\omega} HeunC(ab + (b - c)(1 - d) - \lambda, b(1 + a - d), 2 - d, c, b; -1/2), \tag{68}$$

$$A_{21} \equiv HeunC'(ab - \lambda, ab, d, c, b; -1/2), \tag{69}$$

$$\begin{aligned} A_{22} \equiv\ & i2\omega(1 - r)^{-1-i2\omega} HeunC(ab + (b - c)(1 - d) - \lambda, b(1 + a - d), 2 - d, c, b; -1/2) + \\ &+ (1 - r)^{-i2\omega} HeunC'(ab + (b - c)(1 - d) - \lambda, b(1 + a - d), 2 - d, c, b; -1/2), \end{aligned} \tag{70}$$

$$B_1 \equiv \theta(-ik) F^{(\infty)}(3/2) + \theta(ik) \tilde{F}^{(\infty)}(3/2), \tag{71}$$

$$B_2 \equiv \theta(-ik) F^{(\infty)}{}'(3/2) + \theta(ik) \tilde{F}^{(\infty)}{}'(3/2). \tag{72}$$

Штрих в формулах (69) и (72) обозначает производную по переменной r.

Решение системы (66) имеет простой вид:

$$C_1 = C_0 \frac{A_{22}B_1 - A_{21}B_2}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}, \quad C_2 = C_0 \frac{-A_{12}B_1 + A_{11}B_2}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}. \tag{73}$$

А значит соотношение между C_1 и C_2 должно быть следующим

$$C_2 = \frac{-A_{12}B_1 + A_{11}B_2}{A_{22}B_1 - A_{21}B_2} C_1. \tag{74}$$

Таким образом, определив соотношения между константами C_1 и C_2, мы построили для состояний финитного движения с $\omega < \mu$ физические решения, исчезающие на бесконечности и выраженные через конфлюэнтные функции Гойна. Заметим, что соотношение (74) не накладывает никаких дополнительных ограничений на ω, поэтому спектр состояний финитного движения остается непрерывным (!), что подтверждает результаты работ [15, 16], в которых это свойство спектра было найдено путем качественного исследования уравнения (10) в черепашьих координатах. Полученные решения, также как и состояния, соответствующие инфинитному движению, могут быть нормированы на дельта-функцию, и вместе с последними образуют полную систему решений уравнения (10).

4. СТАТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Согласно формуле (8) статическими решениями будут решения с нулевой энергией, то есть решения с $\omega = 0$. В этом случае анализ особых точек радиального уравнения показывает, что несмотря на то, что при $\omega = 0$ уравнение несколько упрощается, оно имеет тот же самый s-мультисимвол $\{1,1,2\}$, что и исходное радиальное уравнение (11), а следовательно, по-прежнему является конфлюэнтным уравнением Гойна (хотя и с другими параметрами). Следовательно, мы можем использовать для уравнения с $\omega = 0$ тот же самый формализм, что и для уравнения (22) и построить его общее решение в окрестности особых точек в виде бесконечных рядов, а именно: методом Фробениуса на горизонте и методом Томе на бесконечности, и таким образом получить асимптотическое поведение общего решения на горизонте:

$$R(r) \sim e^{\mp\mu r}\left\{A_1(1+D) + A_2\ln(r-1)\right\} \sim \left\{A_1(1+D) + A_2\ln(1-1/r)\right\}, \tag{75}$$

и на бесконечности

$$R(r) \sim \frac{1}{r}\left\{B_1 e^{\mp\mu\left(r+\frac{1}{2}\ln r\right)} + B_2 e^{\pm\mu\left(r+\frac{1}{2}\ln r\right)}\right\}, \tag{76}$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные константы, а D — константа, точное значение которой определяется свойствами общего решения и неважно в обсуждаемом контексте.

Для того чтобы получить регулярное решение на бесконечности, мы должны положить $B_2 = 0$ при выборе решения с верхним знаком в показателе экспоненты, а при выборе решения с нижним знаком положить $B_1 = 0$.

Теперь заметим, что решения на горизонте и на бесконечности связаны аналитическим продолжением, и поэтому константы A_2, B_1, B_2 не являются независимыми, а связаны линейным соотношением вида $A_2 = B_1C_2 + B_2\tilde{C}_2$, где коэффициенты $C_2, \tilde{C}_2$ неравны нулю. Таким образом, при любом выборе регулярного на бесконечности решения константа A_2 в формуле (75) оказывается неравной нулю. А следовательно, решение на горизонте оказывается нерегулярным. Отсюда мы можем заключить, что решение с $\omega = 0$ не является физическим, поскольку не может быть сделано регулярным одновременно на горизонте и на бесконечности.

Отсутствие стационарных решений легко продемонстрировать явно в другом частном случае, когда $\omega = \mu = l = 0$. Тогда уравнение (11) вырождается и имеет общее решение, выражающееся в элементарных функциях: $R(r) = C_0 + C_1\ln(1-1/r)$. Из последней формулы очевидно, что регулярным на горизонте решением может быть только константа C_0. Таким образом, мы приходим к выводу, сделанному в работе [26] Бекенштейном: если статическое решение регулярно на горизонте, то оно равно константе, которая физически ненаблюдаема, а следовательно, для скалярного поля в метрике Шварцшильда отсутствуют статические решения.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрено свободное массивное действительное скалярное поле в метрике Шварцшильда и показано, что радиальные функции данного поля удовлетворяют конфлюэнтному уравнению Гойна и могут быть точно выражены через известные специальные функции — конфлюэнтные функции Гойна. Также построены решения данного уравнения в форме бесконечных рядов и изучено асимптотическое поведение этих решений на бесконечности. Из общего решения выделены физические решения с асимптотиками на бесконечности, отвечающие одночастичным квантовым состояниям финитного и инфинитного движения частиц в поле черной дыры Шварцшильда. Показано, что спектр энергий состояний финитного движения является непрерывным (!), а соответствующие состояния могут быть нормированы на дельта-функцию. При этом решения, отвечающие состояниям финитного и инфинитного движения, вследствие эрмитовости оператора в уравнении (10) вместе образуют полную систему решений этого уравнения [16].

Заметим, что рассмотренный в настоящей работе аналитический подход является более общим, чем подход работ [15, 16], основанный на численном анализе поведения решений уравнения (10) в черепашьих координатах. Он позволяет в дальнейшем получить условия нормировки для найденных точных решений, а также обобщить полученные результаты на другие сферически симметричные метрики, обладающие сходной структурой особенностей, например, на метрику Рейснера—Нордстрема, и возможно будет полезен для анализа аксиально-симметричных метрик как в случае скалярного поля, так и для полей других спинов.

Кроме того, данный подход, по-видимому, способен дать строгое решение задачи о существовании квазистационарных состояний, найденных на основе численного анализа уравнения (10) в работе [15]. Однако для анализа таких решений с энергией, принимающей значения в нижней комплексной полуплоскости, требуется фактически заново изучить их аналитические свойства в окрестностях особых точек, что представляет собой очень сложную задачу, которая выходит за рамки настоящей работы.

Исследование выполнено в рамках научной программы Национального центра физики и математики, направление № 5 “Физика частиц и космология”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Boulware D.G.* Phys. Rev. D. 1975. V. 11. P. 1404—1424. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.11.1404
2. *Hartle J.B., Hawking S.W.* Phys. Rev. D. 1976. V. 13. P. 2188—2203. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.13.2188
3. *Бейидо Х.Г., Клесс С.* В мире науки. 8/9, 130—137, (2017).
4. *Gaggero D. et al.* Phys. Rev. Lett. 2017. V. 118. № 24. P. 241101. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.241101
5. *Carr B., Kühnel F.* Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 2020. V. 70. P. 355—394. https://doi.org/10.1146/annurev-nucl-050520-125911
6. *Биррелл Н., Девис П.* Квантованные поля в искривленном пространстве-времени. М.: Мир, 1984. 356 с.
7. *Гальцов Д.В.* Частицы и поля в окрестности черных дыр. МГУ, 1986. 288 с.
8. *Новиков И.Д., Фролов В.П.* Физика черных дыр. М.: Наука, 1986. 328 с.
9. *Wald R.M.* Quantum field theory in curved spacetime and black hole thermodynamics. University of Chicago Press, 1994. 220 c.
10. *Parker L.E., Toms D.J.* Quantum Field Theory in Curved Spacetime. Cambridge University Press, 2009. 472 c.
11. *DeWitt B.S.* Phys. Rep. 1975. V. 19. № 6. P. 295—357. https://doi.org/10.1016/0370-1573(75)90051-4
12. *ДеВитт Б.С.* Динамическая теория групп и полей. М.: Наука, 1987. 288 с.
13. *Deruelle N., Ruffini R.* Phys. Lett. B. 1974. V. 52. P. 437—441. https://doi.org/10.1016/0370-2693(74)90119-1
14. *Zecca A.* Nuovo Cim. B. 2009. V. 124. P. 1251—1258. https://doi.org/10.1393/ncb/i2010-10830-6
15. *Barranco J. et al.* Phys. Rev. D. 2011. V. 84. P. 083006. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.89.083006
16. *Egorov V., Smolyakov M., Volobuev I.* Phys. Rev. D. 2023. V. 107. № 2. P. 025001. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.107.025001
17. *Славянов С., Лай В.* Специальные функции: Единая теория, основанная на анализе особенностей. СПб.: Невский диалект, 2002. 312 с.
18. *Ronveaux A. et al.* Heun’s Differential Equations. Clarendon Press, 1995. 384 c.
19. https://reference.wolfram.com/legacy/language/v13/ref/HeunC.html
20. *Латышева К.Я., Терещенко Н.И., Орел Г.С.* Нормально-регулярные решения и их приложения. Киев: Вища школа, 1974. 135 с.
21. *Федорюк М.В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.
22. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974. 331 с.

23. *Евграфов М.А.* Аналитические функции. М.: Наука, 1991. 472 с.
24. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. М.: Наука, 1968. 648 с.
25. *Smolyakov M.N.* // arXiv:2309.06249 [gr-qc].
26. *Bekenstein J. D.* Phys. Rev. D. 1972. V. 5. P. 1239. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.5.1239

EXACT SOLUTIONS FOR A MASSIVE SCALAR FIELD IN THE GRAVITATIONAL FIELD OF A SCHWARZSCHILD BLACK HOLE

I. P. Volobuev[a], S. I. Keyzerov[a], and E. R. Rakhmetov[a]

[a]*Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

We consider the problem of finding solutions to the Klein-Gordon equation for a free massive real scalar field in Schwarzschild spacetime. It is shown that the radial part of this equation can be reduced to the form of the confluent Heun equation and the corresponding solutions can be expressed in terms of confluent Heun functions. To achieve this, solutions are first found in the form of infinite power series in the vicinity of the singular points of the equation and then it is shown that these solutions are connected by analytic continuation. When studying the asymptotic behavior of the solutions at infinity, physically adequate solutions are identified, which correspond to the quantum states of both finite and infinite motion of massive scalar particles in the gravitational field of a Schwarzschild black hole. It is shown that the energy spectrum of both types of states is continuous, and they can be normalized to the energy delta function. Possible further applications of the results are briefly discussed.