

ТЕОРИЯ МЕТАЛЛОВ

УДК 537.611.3

ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ ДОМЕННОЙ СТРУКТУРЫ ФЕРРОМАГНЕТИКА

© 2019 г. В. В. Киселев^{a, b, *}, А. А. Расковалов^{a, b}, С. В. Баталов^{a, b}

^aИнститут физики металлов УрО РАН, 620108 Россия, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 18

^bФизико-технологический институт УрФУ, 620002 Россия, Екатеринбург, ул. Мира, 19

*e-mail: kiseliev@imp.uran.ru

Поступила в редакцию 27.12.2017 г.

После доработки 17.09.2018 г.

В данной работе на примере ферромагнетика с анизотропией типа “легкая ось” исследованы особенности солитонов, неотделимых от доменной структуры. Показано, что такие солитоны являются переносчиками макроскопических сдвигов структуры. При определенных условиях они служат зародышами перемагничивания материала. Вблизи границ области своего существования они вызывают перемагничивание доменной структуры, а также смещение ее отдельных доменных стенок и вращение намагниченности в доменах.

Ключевые слова: уединенные домены, доменные границы, солитоны, уравнение Ландау–Лифшица, задача Римана

DOI: 10.1134/S0015323019020098

ВВЕДЕНИЕ

Основное состояние ферромагнитных материалов (массивных образцов и пленок) обычно представляет собой пространственно периодическую структуру. Простейшей оказывается плоскопараллельная структура – квазиодномерная решетка из доменных стенок, разделяющих домены с противоположными направлениями намагниченности. Даже простейшая доменная структура сама по себе сильно нелинейна. Поэтому теоретическое описание коллективных возбуждений на ее фоне возможно только в рамках упрощенных моделей с привлечением специальных методов интегрирования. Одной из базовых моделей теории магнетизма является уравнение Ландау–Лифшица для ферромагнетика с анизотропией типа “легкая ось” [1–4]. Для квазиодномерных возбуждений такая модель интегрируема. Благодаря этому подробно изучены нелинейные волны и солитоны на фоне однородного основного состояния легкоосного ферромагнетика [5–7]. В то же время, анализ солитонов в полосовых доменных структурах сталкивается с большими трудностями из-за значительной нелинейности и неоднородности фонового состояния среды.

Некоторые результаты в этом направлении получены с помощью алгебраических методов конечнозонного интегрирования [8–10]. Однако, такой подход не дает эффективного решения указанного класса задач, т.к. приводит к малоизученным многомерным тэта-функциям и сложным

трансцендентным уравнениям на параметры солитонов.

В [11] задача о волнах сдвига в полосовой доменной структуре сведена к анализу решений континуальной модели Буссинеска. Переход к приближению сплошной среды оправдан, когда характерная длина возбуждений много больше ширины отдельного домена структуры. В рамках такого подхода установлена возможность существования в полосовой доменной структуре бегущих локализованных волн сгущений или разрежений доменных стенок, которые подобны солитонам в ангармонической цепочке атомов.

В данной работе для исследования солитонов в легкоосном ферромагнетике с полосовой доменной структурой мы привлекаем метод интегрирования нелинейной модели с помощью задачи Римана теории функций комплексной переменной. Наличие полосовой структуры проявляется в том, что задача Римана формулируется не в комплексной плоскости спектрального параметра, как это было в случае однородного основного состояния среды, а на римановой поверхности, топологически эквивалентной тору. Эффективность подобной процедуры ранее была продемонстрирована на примере изучения нелинейной динамики спиральных магнитных структур в рамках модели sine-Gordon [7, 12–14].

В данной работе мы покажем, что образование и движение солитонов в доменной структуре всегда приводит к трансляциям доменов. Установим

связь макроскопических сдвигов полосовой доменной структуры с параметрами, определяющими строение и скорость солитонов.

Найденные солитоны неотделимы от доменной структуры ферромагнетика: движение и пульсации ядра каждого солитона вызывают деформации и колебания соседних доменных стенок структуры. Анализ строения солитонов и особенностей их взаимодействия друг с другом и с доменными границами позволит указать метод возбуждения солитонов в доменной структуре, подкрепленный аналитическим расчетом.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Плотность энергии ферромагнетика с анизотропией типа “легкая ось” имеет вид

$$w = \frac{\alpha}{2} (\partial_i \mathbf{M} \cdot \partial_i \mathbf{M}) - \frac{K_a}{2} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{M})^2,$$

где $\alpha > 0$, $K_a > 0$ – постоянные обменного взаимодействия и магнитной анизотропии вдоль выделенной оси $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$.

Намагниченность среды $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ определяется уравнением Ландау–Лифшица:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{M} &= -\gamma [\mathbf{M} \times (\alpha \Delta \mathbf{M} + K_a (\mathbf{n} \cdot \mathbf{M}) \mathbf{n})], \\ \mathbf{M}^2 &= M_0^2 = \text{const}, \end{aligned} \quad (1)$$

где γ – магнитомеханическое отношение, t – время.

Далее рассматриваются одномерные возбуждения ферромагнетика с полосовой доменной структурой вдоль оси Ox , поэтому $\mathbf{M} = \mathbf{M}(x, t)$, где x – пространственная координата.

С помощью масштабных преобразований:

$$\begin{aligned} x' &= x \sqrt{K_a / \alpha}, \quad t' = \gamma M_0 K_a t, \\ \mathbf{M} &= -M_0 \mathbf{S} \end{aligned}$$

приведем уравнение (1) к виду, удобному для дальнейшего анализа:

$$\begin{aligned} \partial_{t'} \mathbf{S} &= [\mathbf{S} \times \partial_x^2 \mathbf{S}] + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}) [\mathbf{S} \times \mathbf{n}], \\ \mathbf{S}^2 &= 1. \end{aligned} \quad (2)$$

“Штрихи” над новыми переменными далее опускаем.

В параметризации

$$\mathbf{S} = (\sin \Theta \cos \Phi, \sin \Theta \sin \Phi, \cos \Theta)$$

полосовой структуре отвечает следующее решение уравнения (2) [3, 15]:

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_0 = \text{const}, \quad \Theta(\chi) = \theta_0 = \pi/2 - \text{am}(\chi, k); \\ \chi &= x/k; \quad \sin \theta_0 = \text{cn}(\chi, k), \quad \cos \theta_0 = \\ &= \text{sn}(\chi, k), \quad k \partial_x \theta_0 = \partial_\chi \theta_0 = -\text{dn}(\chi, k). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\text{am}(\chi, k)$ – эллиптическая амплитуда Якоби, $\text{sn}(\chi, k)$, $\text{cn}(\chi, k)$, $\text{dn}(\chi, k)$ – эллиптические функ-

ции Якоби с модулем $0 \leq k \leq 1$ [16, 17]. Величина k задает период $4Kk$ доменной структуры; $K = K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода.

Функция $\partial_x \theta_0$ допускает разложение [18]:

$$\partial_x \theta_0 = -l_0^{-1} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \text{sech}[l_0^{-1}(x - L_0 p)],$$

где p – целое, $l_0 = 2Kk/\pi$, $L_0 = 2Kk$, $k' = \sqrt{1 - k^2}$ – дополнительный модуль, $K' = K(k')$. Отсюда следует, что (3) описывает последовательность доменов шириной L_0 , в которых распределение намагниченности $\mathbf{S}^{(0)}$ почти не меняется: $\Phi_0 = \text{const}$, $\theta_0 \approx \pi l$, где l – целое. Домены разделены переходными слоями – доменными границами толщиной l_0 . В переходных слоях вектор $\mathbf{S}^{(0)}$ поворачивается так, чтобы соседние домены имели альтернативные равновесные значения намагниченности $(0, 0, \pm 1)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{(0)} &\approx \left(\frac{\cos \Phi_0}{\text{ch} \xi}, \frac{\sin \Phi_0}{\text{ch} \xi}, \text{th} \xi \right), \\ \xi &= l_0^{-1}(x - L_0 p). \end{aligned}$$

Угол Φ_0 задает геометрию поворота. В стенках блоховского ($\Phi_0 = \pm \pi/2$) и неелевского ($\Phi_0 = 0, \pi$) типов она становится особенно простой. В этих случаях вектор $\mathbf{S}^{(0)}$ при повороте остается параллельным плоскости Oyz или Oxy соответственно. Доменные границы блоховского типа не создают магнитостатических полей (в них $\text{div} \mathbf{S}^{(0)} = 0$). Поскольку в модели (2) магнитостатика не учитывается, она лучше описывает структуры с блоховским типом распределения намагниченности.

В массивных образцах отношение $L_0/l_0 \propto 10^2$. Это значение сильно меняется в зависимости от формы и размеров образца. В пленках возможны случаи, когда $L_0/l_0 \propto 1$ [3, 4]. В рассматриваемой модели величину отношения конкретизирует модуль k эллиптических интегралов:

$$\frac{L_0}{l_0} = \frac{\pi K(k)}{K'}, \quad K' = K(k'). \quad (4)$$

Модель (2) учитывает основные взаимодействия, приводящие к образованию доменных стенок в ферромагнетиках. С ее помощью удалось теоретически описать процессы перематричивания в массивных образцах с полосовой доменной структурой [15]. В то же время, в модели (2) оказываются неустойчивыми линейные моды доменной структуры. Остановимся на этом подробнее.

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ
ЛИНЕЙНЫХ МОД

Найдем спектр малых колебаний намагниченности около равновесных положений $\mathbf{S}^{(0)}$ в доменной структуре:

$$\mathbf{S}^{(0)}(x) = (\sin \theta_0 \cos \varphi_0, \sin \theta_0 \sin \varphi_0, \cos \theta_0).$$

Представим векторное поле $\mathbf{S}(x, t)$ в виде:

$$\mathbf{S}(x, t) = D(x)\mathbf{m}(x, t), \quad \mathbf{m}^2 = 1,$$

где ортогональная матрица $D(x)$ равна:

$$D = FT, \quad F = \begin{pmatrix} \sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 & 0 \\ -\cos \varphi_0 & \sin \varphi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_0 & \sin \theta_0 \\ 0 & -\sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix}.$$

В такой записи полосовой доменной структуре соответствует вектор $\mathbf{m}_0 = (0, 0, 1)$: $\mathbf{S}^{(0)} = D(x)\mathbf{m}_0$. Значения $\mathbf{m}(x, t) \neq \mathbf{m}_0$ описывают колебания вектора \mathbf{S} около равновесных положений в доменной структуре.

В терминах векторного поля $\mathbf{m}(x, t)$ уравнение Ландау–Лифшица (2) примет вид

$$\partial_t \mathbf{m} = [\mathbf{m} \times \mathbf{H}_{\text{ef}}], \quad \mathbf{H}_{\text{ef}} = -\frac{\delta w_{\text{ef}}}{\delta \mathbf{m}}, \quad (5)$$

где

$$w_{\text{ef}} = \frac{1}{2} \int dx [(\partial_x \mathbf{m})^2 + (\partial_x \theta_0)^2 (m_2^2 + m_3^2) + 2\partial_x \theta_0 (m_3 \partial_x m_2 - m_2 \partial_x m_3) - (m_2 \sin \theta_0 - m_3 \cos \theta_0)^2]. \quad (6)$$

Линеаризуем уравнение (5) вблизи основного состояния \mathbf{m}_0 : $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + \tilde{\mathbf{m}}$ ($|\tilde{\mathbf{m}}| \ll 1$). Малые компоненты вектора $\tilde{\mathbf{m}}$ выразим через комплексное поле Ψ :

$$\Psi = \tilde{m}_1 + i\tilde{m}_2, \quad \tilde{m}_3 \approx -\frac{|\Psi|^2}{2}.$$

Оно удовлетворяет уравнению:

$$i\partial_t \Psi + \left[k^{-2} \partial_x^2 - 2\text{sn}^2 \chi + \frac{1}{2}(1 + k^{-2}) \right] \Psi + \frac{k^2}{2k^2} \Psi = 0. \quad (7)$$

Покажем, что $\Psi(x, t)$ выражается через решения уравнения Ламе [16, 19]

$$\left[k^{-2} \partial_x^2 - 2\text{sn}^2 \chi + \frac{1}{2}(1 + k^{-2}) \right] \Lambda = -\left(\frac{k^2}{2k^2} + \text{cn}^2 u \right) \Lambda, \quad (8)$$

где u – спектральный параметр. Уравнение (8) имеет два линейно независимых решения $\Lambda(\pm u, \chi)$ [19]. Для дальнейшего анализа удобно представить $\Lambda(u, \chi)$ в виде разложения по сигма-функциям Вейерштрасса с периодами $[4K, 2iK']$:

$$\Lambda(\pm u, \chi) \propto \frac{\sigma(\chi + u)\sigma(\chi + u + 2K)}{\sigma(\chi + iK)\sigma(\chi + iK + 2K)} e^{\gamma(u, \chi)},$$

$$\gamma(u, \chi) = -Z(u, k)\chi + 2\eta_3 \chi - \frac{\eta_1 u \chi}{K}.$$

Здесь $Z(u, k)$ – дзета-функция Якоби, параметры η_1, η_3 характеризуют трансформационные свойства функций Вейерштрасса [16, 17, 19]. Непрерывному спектру уравнения Ламе отвечают множества:

$$\Gamma_1 = \{u = iv, -K' \leq v \leq K'\},$$

$$\Gamma_2 = \{u = iv - K, -K' \leq v \leq K'\}, \quad (9)$$

$$\text{mod}(2K, 2iK').$$

Решение уравнения (7) представим в виде разложения по функциям непрерывного спектра уравнения Ламе

$$\Psi(x, t) = \int_{-K'}^K dv \sum_{s=1}^2 [c_+(u_s) \alpha(u_s, \chi, t) + c_-^*(u_s) \alpha^*(u_s, \chi, t)].$$

Здесь $\alpha(u_s, \chi, t) = \tilde{\alpha}(u_s) \Lambda(u_s, \chi) e^{-i\omega(u_s)t}$, $c_{\pm}(u_s) \equiv \text{dn} u_s \pm k \text{cn} u_s$; $u_1 = iv$, $u_2 = iv - K$; $\omega(u) = k^{-1} \text{cn} u \text{dn} u$, модуль функций Якоби равен k , $\tilde{\alpha}(u_s)$ – произвольные спектральные плотности ($|\tilde{\alpha}| \ll 1$).

Частота одной из мод спектра вещественна:

$$\frac{1}{k} \leq \omega(u_1) = \frac{\text{dn}(v, k')}{k \text{cn}^2(v, k')} < \infty.$$

Частота второй моды является чисто мнимой:

$$\omega(u_2) = \frac{ik'^2 \text{sn}(v, k') \text{cn}(v, k')}{k \text{dn}^2(v, k')}.$$

Это свидетельствует о неустойчивости доменной структуры (3) по линейному приближению. Однако, линеаризация не дает полного представления о волновых процессах в доменной структуре. По мере развития неустойчивости линейное приближение нарушается. Становятся важны эффекты взаимодействия разных мод. Нелинейные взаимодействия могут приводить к локализации воз-

мущений и стабилизации доменной структуры. Поэтому необходимо учитывать нелинейные процессы в доменной структуре ферромагнетика. В данной работе с этой целью развит специальный вариант метода “одевания” на торе.

Приведем численные оценки инкремента $|\omega(u_2)| = \gamma$ линейных мод. Он обращается в нуль при $v = 0, \pm K$ и достигает максимального значения $\gamma_{\max} = (1 - k)/k^{3/2}$, когда $v = \pm K/2$.

В образцах с доменной структурой отношение $L_0/l_0 \gg 1$. Согласно (4), это возможно только если $k' \ll 1$. При таких k' справедливо приближение: $L_0/l_0 \approx 2 \ln(4/k')$. В массивных образцах $L_0/l_0 \approx 10^2$. Отсюда следует, что инкремент γ пренебрежимо мал:

$$\gamma_{\max} = O(k'^2), \quad k' \approx 4 \exp(-0.5 \times 10^2) \approx 10^{-21}.$$

В данной работе все численные расчеты выполнены при условии: $L_0/l_0 \approx 9.5$ ($K \approx 4.75$, $K' \approx \pi/2$). Тогда доменные стенки структуры интенсивно взаимодействуют между собой. Однако, даже в этом случае $k = 0.9994$, и $\gamma_{\max} = 6 \times 10^{-4} \ll 1$.

В настоящей работе мы покажем, что нелинейные взаимодействия приводят к образованию в доменной структуре пространственно локализованных структурно устойчивых солитонов. В ядре каждого солитона намагниченность совершает прецессию с частотой ω_{sol} . Ее значения лежат в энергетической щели спектра линейных мод и почти всегда удовлетворяют неравенству: $|\omega(u_i)| \geq |\omega_s| \gg \gamma_{\max}$.

Внутренняя прецессия стабилизирует солитоны. Вне ядер солитонов намагниченность среды совершает лишь малые колебания относительно равновесных положений полосовой доменной структуры (3).

Мы также исследуем волновые процессы, которые сопровождают изменения солитонов, когда их параметры приближаются к множествам $\Gamma_{1,2}$ непрерывного спектра линейных мод.

РЕШЕНИЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ НАЛИЧИИ ДОМЕННОЙ СТРУКТУРЫ

Наша цель состоит в построении и анализе решений модели (2), описывающих солитоны в полосовой доменной структуре. Основой метода интегрирования модели (2) служит вспомогательная линейная система (U - V -пара) [20]:

$$\begin{aligned} \partial_x \Psi &= -\frac{i}{2} [w_1(S_1 \sigma_1 + S_2 \sigma_2) + w_3 S_3 \sigma_3] \Psi \equiv U \Psi, \\ \partial_t \Psi &= -\frac{i}{2} \left[w_1 ([S \times \partial_x S]_1 \sigma_1 + [S \times \partial_x S]_2 \sigma_2) + \right. \\ &\quad \left. + w_3 [S \times \partial_x S]_3 \sigma_3 - w_1^2 S_3 \sigma_3 - w_1 w_3 (S_1 \sigma_1 + S_2 \sigma_2) \right] \Psi \equiv V \Psi, \end{aligned} \quad (10)$$

условие совместности которой равносильно уравнению (2). Здесь σ_i – матрицы Паули ($i = 1, 2, 3$), коэффициенты $w_{1,3}$ подчинены ограничению:

$$w_1^2 - w_3^2 = 1. \quad (11)$$

Связь (11) будет согласована со свойствами периодической структуры (3), если использовать униформизацию: $w_1 = \text{sn}(u, k)$, $w_3 = \text{isn}(u, k)$. Здесь и далее $\text{sn}u$, cnu , dnu – эллиптические функции Якоби с модулем k .

Решению $S^{(0)}$ (3) нелинейного уравнения Ландау–Лифшица (2) соответствует решение линейной системы (10):

$$\begin{aligned} \Psi_0(u, \chi, t) &= \exp\left(-\frac{i\Phi_0}{2} \sigma_3\right) \tilde{M}(u, \chi) \exp(A(u, \chi, t) \sigma_3); \quad \det \Psi_0 = 1; \\ A(u, \chi, t) &= ip(u)\chi + \frac{it}{2k} \text{cn}(u, k) \text{dn}(u, k), \\ p(u) &= \frac{1}{2i} \left(\zeta(u + iK') + \zeta(u - iK' - 2K) - \frac{\eta_1(u - K)}{K} \right) = \frac{Z(u, k)}{2i}; \\ \tilde{M}(u, \chi) &= M(u, \chi) \text{diag}([\sigma(-u + K + iK')]^{-1}, [\sigma(u + K + iK')]^{-1}); \\ M(u, \chi) &= \begin{pmatrix} \sigma(\chi - u + K + iK') & \sigma(\chi + u - K + iK') e^{\eta_1(\chi + iK' + u)} \\ \sigma(\chi - u - K + iK') e^{\eta_1(\chi + iK' - u)} & \sigma(\chi + u + K + iK') \end{pmatrix} \times \\ &\times m(\chi) \exp\left[\frac{\eta_1 u \chi}{2K} \sigma_3\right]; \quad m(\chi) = \left[\frac{\sigma(iK') \sigma(iK' + 2K)}{2\sigma(\chi + iK') \sigma(\chi + iK' + 2K)} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $\sigma(u)$ и $\zeta(u)$ – сигма- и дзета-функции Вейерштрасса с периодами $[4K, 2iK]$ [16, 17, 19]. Ветвь квадратного корня в определении $m(\chi)$ выбирается так, чтобы выполнялось условие:

$$m(\chi \pm 4K) = -m(\chi) \exp[\mp 2\eta_1(\chi + iK' + K \pm 2K)].$$

Тогда функция $M(u, \chi)$ будет периодической по χ с периодом $4K$, а для функции $\Psi_0(u, \chi)$ величина $p(u)$ будет играть роль блоховского квазиимпульса:

$$\Psi_0(u, \chi \pm 4K, t) = \Psi_0(u, \chi, t) \exp[\pm 4Kip(u)\sigma_3].$$

Множеству

$$\Gamma = \{u : \text{Im}p(u) = 0\} = \{ \text{Re}u = 0, K; |\text{Im}u| \leq 2K \}, \text{mod}(2K, 4iK) \quad (13)$$

соответствует непрерывный спектр рассматриваемой далее задачи (10), (15) (ср. (9) и (13)).

В параметризации (3) угол $\varphi_0 = \text{const}$ задает топологические свойства стенок полосовой доменной структуры. Анализ показывает, что в модели (2) на больших расстояниях от солитонов (при $x \rightarrow \pm\infty$) угол φ_0 принимает одинаковые значения. В то же время, образование солитонов всегда сопровождается макроскопическими трансляциями полосовой доменной структуры.

Поэтому решения модели (2) будем искать при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(x, t) &\rightarrow \mathbf{S}_2^{(0)} = (\sin \theta_2 \cos \varphi_0, \sin \theta_2 \sin \varphi_0, \cos \theta_2), \chi \rightarrow +\infty, \\ \mathbf{S}(x, t) &\rightarrow \mathbf{S}_1^{(0)} = (\sin \theta_1 \cos \varphi_0, \sin \theta_1 \sin \varphi_0, \cos \theta_1), \chi \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\theta_j = \pi/2 - \text{am}(\chi + \Delta_j, k)$; $j = 1, 2$; $\Delta_1 = \Delta$, $\Delta_2 = 0$. В ходе вычислений мы свяжем сдвиг структуры Δ с параметрами солитонов.

Краевым условиям (14) соответствуют фундаментальные решения вспомогательной линейной системы (10) с асимптотическими условиями:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &\rightarrow \Psi_1^{(0)} = \Psi_\Delta^{(0)} \quad \text{при} \quad \chi \rightarrow -\infty; \\ \Psi_2 &\rightarrow \Psi_2^{(0)} = \Psi_0 \quad \text{при} \quad \chi \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_\Delta^{(0)}(u, \chi, t) &= \exp\left[-\frac{i\varphi_0}{2} \sigma_3\right] \tilde{M}(u, \chi + \Delta) \times \\ &\times \exp\left[A(u, \chi, t)\sigma_3 - \frac{\eta_1 u \Delta}{2K} \sigma_3\right]. \end{aligned} \quad (16)$$

При значениях $u \in \Gamma$ фундаментальные решения $\Psi_{1,2}$ связаны между собой матрицей перехода

$$\Psi_1(u) = \Psi_2(u)T(u), \quad u \in \Gamma. \quad (17)$$

Матрица перехода $T(u)$ зависит только от спектрального параметра u и обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} T(u) &= \begin{pmatrix} a(u) & -\bar{b}(u) \\ b(u) & \bar{a}(u) \end{pmatrix}, \quad \bar{a}(u) = a^*(-u^*), \\ \bar{b}(u) &= b^*(-u^*), \quad a(u)\bar{a}(u) + b(u)\bar{b}(u) = 1; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} T(u \pm 2iK) &= \sigma_3 T(u) \sigma_3 e^{\mp 2\eta_3 \Delta \sigma_3}, \\ T^*[(u \pm 2K)^*] &= Q^{-1}(u) T(u) Q(u) e^{\mp \eta_1 \Delta \sigma_3}, \end{aligned}$$

где $Q(u) = \text{diag}(q(u), q^{-1}(u))$; “diag” означает диагональную матрицу,

$$\begin{aligned} q(u) &= \frac{1 \sigma(u - K + iK')}{i \sigma(u + K + iK')} e^{\eta_1(u+iK')} = \\ &= \frac{\text{dn}(u, k)}{1 + k \text{sn}(u, k)} = \frac{1 - k \text{sn}(u, k)}{\text{dn}(u, k)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Проблема интегрирования вспомогательной системы (10) сводится к задаче Римана, которая формулируется следующим образом. Нужно найти аналитические в областях

$$\begin{aligned} D_+ &= \{u : \text{Im}p(u) > 0\} = \\ &= \{-K < \text{Re}u < 0, |\text{Im}u| \leq 2K\}, \text{mod}(2K, 4iK'), \\ D_- &= \{u : \text{Im}p(u) < 0\} = \\ &= \{0 < \text{Re}u < K, |\text{Im}u| \leq 2K\}, \text{mod}(2K, 4iK') \end{aligned}$$

функции $\Psi_+(u) = (\Psi_2^{(1)}(u), \Psi_1^{(2)}(u))$ и $\Psi_-(u) = (\Psi_1^{(1)}(u), \Psi_2^{(2)}(u))$, удовлетворяющие условию сопряжения на контуре Γ :

$$\Psi_-(u) = \frac{\Psi_+(u)}{\bar{a}(u)} \begin{pmatrix} 1 & \bar{b}(u) \\ b(u) & 1 \end{pmatrix}, \quad u \in \Gamma, \quad (20)$$

редукциям:

$$\begin{aligned} \Psi_+(u \pm 2iK) &= \sigma_3 \Psi_+(u) \sigma_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\pm 2\eta_3 \Delta} \end{pmatrix}, \\ \Psi_-(u \pm 2iK) &= \sigma_3 \Psi_-(u) \sigma_3 \begin{pmatrix} e^{\mp 2\eta_3 \Delta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ \Psi_+^*[(u \pm 2K)^*] &= -i\sigma_1 \Psi_+(u) Q(u) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\pm \eta_1 \Delta} \end{pmatrix}, \\ \Psi_-^*[(u \pm 2K)^*] &= -i\sigma_1 \Psi_-(u) Q(u) \begin{pmatrix} e^{\mp \eta_1 \Delta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

и ограничению:

$$\Psi_+(u) = \sigma_2 \Psi_-^*(-u^*) \sigma_2, \quad u \in \Gamma.$$

Здесь введено обозначение $\Psi_{1,2}^{(i)}$ для i -ого столбца матриц $\Psi_{1,2}$ ($i = 1, 2$). Условие (20) является иной формой записи связи (17). Наличие полосовой структуры приводит к тому, что функции Ψ_\pm оказываются квазипериодическими по параметру u с

периодами $[4K, 4iK']$. Потому в данном случае мы имеем дело с задачей Римана на торе.

Подчеркнем принципиальное отличие уравнения (2) от тех, что были проинтегрированы первыми с привлечением задачи Римана на торе [21–23]. В работах [21–23] изучались солитоны на фоне однородного основного состояния среды в моделях с U – V -параметрами, изначально включающими зависимость от спектрального параметра через двоякопериодические функции. Указанная особенность и приводила к задачам Римана на торе. В нашем случае задача Римана имеет иное происхождение: оно связано с учетом периодичности структуры. Из-за наличия доменной структуры матричные функции $\Psi_{\pm}(u, \chi, t)$ приобретают дополнительные множители при сдвигах на периоды по спектральному параметру u и/или по пространственной координате. Это осложняет процедуры их построения. В работах [7, 12, 13, 24] методы, предложенные в [21–23], распространены на решение такого класса задач.

Если решение задачи Римана $\Psi_{+}(u) = \Psi(u)\Psi_{\Delta/2}^{(0)}(u)$ найдено, то с его помощью точное решение исходной существенно нелинейной модели (2) восстанавливается по формуле [25]:

$$S_k \sigma_k = \Psi(u)(S_{\Delta/2}^{(0)})_k \sigma_k \Psi^{+}(-u^*)|_{u=-iK}, \quad (21)$$

где

$$S_{\Delta/2}^{(0)} = (\sin \theta_{\Delta/2}^{(0)} \cos \varphi_0, \sin \theta_{\Delta/2}^{(0)} \sin \varphi_0, \cos \theta_{\Delta/2}^{(0)}), \\ \theta_{\Delta/2}^{(0)} = \pi/2 - \text{am}(\chi + \Delta/2, k),$$

$u = -iK$ – особая точка системы (10), верхний индекс “+” означает эрмитово сопряжение.

Солитонным состояниям на фоне полосовой доменной структуры соответствуют решения задачи Римана (20) с нулями коэффициентов $a(u)$ и $\bar{a}(u)$, аналитических в областях D_{+} и D_{-} , когда $b = \bar{b} \equiv 0$. Солитонные решения находятся в результате алгебраических вычислений. Они выражаются через хорошо изученные эллиптические функции и допускают подробный анализ.

ПРЕЦЕССИОННЫЙ СОЛИТОН В ДОМЕННОЙ СТРУКТУРЕ

Обсуждение математических вопросов, связанных с решением задачи Римана (20), выходит за рамки данной статьи. Опуская детали вычислений, приведем решение модели Ландау–Лифши-

ца (2), описывающее солитон, встроенный в полосовую доменную структуру [25]:

$$S_3 = \frac{(|\alpha|^2 - |\beta|^2) \tilde{s} + (\alpha^* \beta + \beta^* \alpha) \tilde{c}}{|\alpha|^2 + |\beta|^2}, \quad (22) \\ S_1 - iS_2 = \frac{(\alpha^2 - \beta^2) \tilde{c} - 2\alpha\beta\tilde{s}}{|\alpha|^2 + |\beta|^2} e^{-i\varphi_0},$$

где

$$\alpha = c_{\mu} |m_2|^2 + c_{\mu}^* |m_1|^2, \quad \beta = -im_{\mu} m_2^* (s_{\mu} + s_{\mu}^*), \\ m_1 = a_{-} e^{y+i\gamma} + b_{+} e^{-y-i\gamma}, \quad m_2 = b_{-} e^{y+i\gamma} + a_{+} e^{-y-i\gamma}, \\ a_{\pm} = m(\tilde{\chi}) \frac{\sigma(\tilde{\chi} + K + iK' \pm \mu)}{\sigma(K + iK' \pm \mu)} \exp \left[\mp \frac{\eta_{\mu} \mu \tilde{\chi}}{2K} \right], \\ b_{\pm} = m(\tilde{\chi}) \frac{\sigma(\tilde{\chi} - K + iK' \pm \mu)}{\sigma(K + iK' \pm \mu)} \times \\ \times \exp \left[\mp \frac{\eta_{\mu} \mu \tilde{\chi}}{2K} + \eta_{\mu} (\tilde{\chi} + iK' \pm \mu) \right], \\ y = \text{Re} \left[A(\mu, \chi, t) - \frac{\eta_{\mu} \mu \Delta}{4K} \right] + y_0, \\ \gamma = \text{Im} \left[A(\mu, \chi, t) - \frac{\eta_{\mu} \mu \Delta}{4K} \right] + \gamma_0.$$

Здесь и далее используются обозначения: $s_{\mu} = \text{sn} \mu$, $c_{\mu} = \text{cn} \mu$, $d_{\mu} = \text{dn} \mu$, $\tilde{s} = \text{sn} \tilde{\chi}$, $\tilde{c} = \text{cn} \tilde{\chi}$, $\tilde{d} = \text{dn} \tilde{\chi}$; $\tilde{\chi} = \chi + \Delta/2$, $\Delta = -4 \text{Re} \mu$; y_0, γ_0 – произвольные вещественные постоянные.

Солитон (22) параметризуется комплексным числом $\mu = -\rho + i\theta$, где $0 < \rho < K$, $-K' \leq \theta \leq K'$; μ – это нуль коэффициента $\bar{a}(u)$. Величина $\Delta = 4\rho$ определяет сдвиг доменной структуры, сопутствующий образованию солитона. Для коэффициентов a_{\pm}, b_{\pm} справедливы тождества:

$$a_{+} b_{-} - a_{-} b_{+} = \frac{ik\tilde{c}s_{\mu}}{d_{\mu}}, \quad a_{+} b_{-} + a_{-} b_{+} = \frac{i\tilde{d}}{d_{\mu}}, \\ a_{-} a_{+} + b_{+} b_{-} = \frac{k\tilde{c}c_{\mu}}{d_{\mu}}, \quad a_{-} a_{+} - b_{+} b_{-} = 1; \quad (23)$$

$$\frac{b_{\pm}}{a_{\pm}} = \frac{idn(\tilde{\chi} \pm \mu)}{1 + ksn(\tilde{\chi} \pm \mu)} = \frac{i(d_{\mu} - k\tilde{c}c_{\mu})}{\tilde{d} \pm k\tilde{c}s_{\mu}} = \frac{i(\tilde{d} \mp k\tilde{c}s_{\mu})}{d_{\mu} + k\tilde{c}c_{\mu}}.$$

Функция $A(\mu, \chi, t)$ линейна по x, t :

$$A = [-l^{-1}(x - Vt) - i(\eta x - \omega t)]/2, \\ l = -k[\text{Re}Z(\mu)]^{-1} > 0, \quad \eta = -k^{-1}\text{Im}Z(\mu), \quad (24) \\ V = -lk^{-1}\text{Im}(cn\mu \, dn\mu), \\ \omega_{\text{sol}} \equiv \omega = k^{-1}\text{Re}(cn\mu \, dn\mu).$$

Здесь η и ω – волновое число и частота прецессии намагниченности в ядре солитона, V – скорость движения солитона как целого. Направление скорости (24) задается знаком $\text{sign} V = -\text{sign} \theta$. Величина l определяет характерную длину, в преде-

лах которой происходят наиболее значительные изменения намагниченности в солитоне. Эта величина может меняться в широких пределах.

Реальные частота, размер и скорость солитона получаются из безразмерных значений этих величин умножением на множители $\gamma M_0 K_a$, $\sqrt{\alpha/K_a}$, $\gamma M_0 \sqrt{\alpha K_a}$ соответственно. Параметры магнитных материалов могут меняться в широких пределах. Полагая $M_0 \approx 10^3$ Гс, $\gamma \approx 10^7$ Гц/Гс, $K_a \approx 10-100$, $\alpha \approx 10^3-10^4 a^2$, где $a \approx 10^{-8}$ см – постоянная решетки, находим:

$$\begin{aligned} \gamma M_0 K_a &\approx 10^{11}-10^{12} \text{ Гц}, \\ \sqrt{\alpha/K_a} &\approx 10-100a \approx 10^{-7}-10^{-6} \text{ см}, \\ \gamma M_0 \sqrt{\alpha K_a} &\approx 10^2-10^3 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

В указанных диапазонах лежат значения соответствующих параметров для железа и кобальта [3, 4].

Для упрощения анализа, выделим из выражения (22) поворот на угол φ_0 в плоскости Oxy :

$$(S_1 - iS_2) \exp\left(i\left[\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right]\right) \equiv \tilde{S}_1 - i\tilde{S}_2.$$

Для полосовой структуры блоховского типа ($\varphi_0 = \pm\pi/2$) вектор намагниченности \mathbf{S} в новых обозначениях будет иметь компоненты: $\mathbf{S} = (\pm\tilde{S}_1, \pm\tilde{S}_2, S_3)$.

Наиболее просты и удобны для наблюдения неподвижные солитоны. Солитон (22) неподвижен в двух случаях: $\theta = 0$ и $\theta = \pm K'$. Случаю $\theta = 0$ ($\mu = -\rho$) отвечает решение:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1 &= -\frac{2g_0}{A_0} \cos(2\gamma), \\ \tilde{S}_2 &= \tilde{c} + \frac{2g_0}{A_0} [f_0 \tilde{s} - g_0 \tilde{c}] + \frac{2h_0 g_0}{A_0} \tilde{s} \sin(2\gamma), \\ S_3 &= -\tilde{s} + \frac{2g_0}{A_0} [f_0 \tilde{c} + g_0 \tilde{s}] + \frac{2h_0 g_0}{A_0} \tilde{c} \sin(2\gamma), \\ A_0 &= [h_0 \sin(2\gamma) + f_0]^2 + \cos^2(2\gamma) + g_0^2, \\ g_0 &= \frac{d_p}{s_p} \left[\frac{s_3 a^2 e^{2y}}{1 + ks_3} + \frac{s_1 a^2 e^{-2y}}{1 + ks_1} \right], \quad h_0 = \frac{kc_p}{d_p}, \\ f_0 &= \frac{1}{s_p} \left[\frac{c_3 a^2 e^{2y}}{1 + ks_3} + \frac{c_1 a^2 e^{-2y}}{1 + ks_1} \right]; \quad 2y = \chi Z(\rho, k) + 2y_0, \\ 2\gamma &= \omega(\rho)t + 2\gamma_0; \quad s_1 = \text{sn}(\chi + \rho), \quad s_3 = \text{sn}(\chi + 3\rho); \\ c_1 &= \text{cn}(\chi + \rho), \quad c_3 = \text{cn}(\chi + 3\rho); \quad s_p = \text{sn}\rho, \\ c_p &= \text{cn}\rho, \quad d_p = \text{dn}\rho. \end{aligned} \quad (25)$$

При выводе (25) использованы соотношения (23) и тождества:

$$\begin{aligned} c_p \tilde{s} \pm \tilde{c} s_p \text{dn}(\tilde{\chi} \pm \rho) &= d_p \text{sn}(\tilde{\chi} \pm \rho), \\ c_p \tilde{c} \mp \tilde{s} s_p \text{dn}(\tilde{\chi} \pm \rho) &= \text{cn}(\tilde{\chi} \pm \rho); \end{aligned}$$

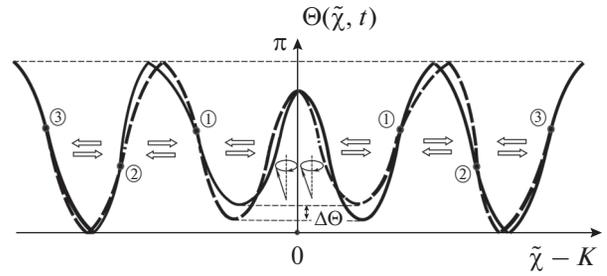


Рис. 1. Характер колебаний доменной структуры около ядра прецессионного солитона (25).

коэффициенты a_{\pm} – вещественны, b_{\pm} – чисто мнимые.

На рис. 1 центр солитона помещен в середину одного из доменов структуры. В этом случае значение $2y_0$ в формуле (22) определяется условием:

$$e^{4y}|_{\tilde{\chi}=K} = (1 + ks_p)/(1 - ks_p).$$

Как и для аналогичного солитона на однородном фоне [5, 7], начальная фаза прецессии $2\gamma_0$ вектора \mathbf{S} вокруг оси Oz неизменна в области ядра солитона (25) (см. конусы прецессии на рис. 1). При k близких к единице (в пределе широких доменов) частота прецессии $\omega(\rho) = k^{-1} c_p d_p \approx \text{ch}^{-2} \rho$ конечна, а размер ядра всегда удовлетворяет континуальному приближению.

В выражении (25) коэффициент $h_0 \approx 1$. С учетом этого, намагниченность представляется в виде:

$$\mathbf{S}(\chi, t) \approx \frac{1}{A_0(\chi, t)} [\mathbf{N}_0(\chi) + \mathbf{P}_0(\chi, t)],$$

$$A_0(\chi, t) \approx 1 + f_0^2 + g_0^2 + 2f_0 \sin(2\gamma).$$

Вектор $A_0 \mathbf{S}$ представляется в виде суммы независимого от времени вектора:

$$\mathbf{N}_0(\chi) = (1 + f_0^2 - g_0^2) \mathbf{n}_1(\chi) + 2f_0 g_0 \mathbf{n}_2(\chi)$$

и вектора

$$\mathbf{P}_0(\chi, t) = 2(f_0 \mathbf{n}_1 + g_0 \mathbf{n}_2) \sin(2\gamma) + 2g_0 \mathbf{n}_3 \cos(2\gamma).$$

Векторы $\mathbf{n}_1 = c_0 \tilde{\mathbf{i}} + s_0 \tilde{\mathbf{j}} - \tilde{s} \mathbf{k}$, $\mathbf{n}_2 = c_0 \tilde{\mathbf{i}} + s_0 \tilde{\mathbf{j}} + \tilde{c} \mathbf{k}$, $\mathbf{n}_3 = -s_0 \tilde{\mathbf{i}} + c_0 \tilde{\mathbf{j}}$ ортонормированы $c_0 = \cos \varphi_0$, $s_0 = \sin \varphi_0$. В плоскости, задаваемой векторами \mathbf{n}_3 и $f_0 \mathbf{n}_1 + g_0 \mathbf{n}_2$, конец вектора \mathbf{P}_0 движется по эллипсу с полуосями: $2\sqrt{f_0^2 + g_0^2}$ и $2g_0$. Соответственно, вектор $A_0 \mathbf{S}$ движется по конусу, ось которого совпадает с направлением \mathbf{N}_0 . Вектор \mathbf{S} сонаправлен вектору $\mathbf{N}_0 + \mathbf{P}_0$ и отличается от него множителем $A_0 > 0$. Потому переход от вектора $\mathbf{N}_0 + \mathbf{P}_0$ к вектору \mathbf{S} соответствует масштабному преобразованию, проектирующему допустимые значения вектора $\mathbf{N}_0 + \mathbf{P}_0$ на поверхность сферы $\mathbf{S}^2 = 1$.

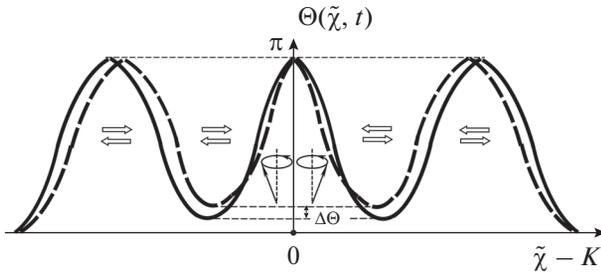


Рис. 2. Прецессионный солитон (27). Обозначения на рис. 2 аналогичны таковым на рис. 1.

Эллиптичность и неоднородность прецессии намагниченности в ядре солитона (25) приводит к продольным колебаниям доменной структуры. Вдали от центра солитона (при $|y| \gg 1$) они имеют узловые точки:

$$\begin{aligned} \chi_n &= -2Kn - 3\rho, \quad n = 1, 2, 3, \dots \text{ при } x \ll -1; \\ \chi_m &= 2Km - \rho, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \text{ при } x \gg 1. \end{aligned}$$

На рис. 1 узлы обозначены жирными точками и пронумерованы цифрами в кружочках. Ядро солитона расположено между узлами с номером 1. В узлах солитон (22) “прикреплен” к структуре и его намагниченность

$$\mathbf{S} = (c_0\tilde{c}, s_0\tilde{c}, -\tilde{s}) \quad (26)$$

при любых t совпадает с равновесными состояниями доменной структуры $\mathbf{S}_{1,2}^{(0)}$ в тех же точках. Соседние узлы отстоят друг от друга на $2K$ – полпериода по переменной $\chi = x/k$. При переходе от узла к узлу направление вектора \mathbf{S} (26) меняется на противоположное. Колебания намагниченности сосредоточены в промежутках между узлами. Части доменов, расположенные между узлами $2j - 1$ и $2j$ ($2j$ и $2j + 1$), $j = 1, 2, 3, \dots$, правее и левее центра солитона периодически смещаются вдоль структуры синфазно по отношению друг к другу и в противофазе (в фазе) с ядром бризера (см. рис. 1).

Проекция намагниченности S_3 в центре солитона ($\tilde{\chi} = K$) меняется в пределах:

$$1 - 2s_p^2 \leq S_3(\tilde{\chi} = K) \leq 1 - 2k^2s_p^2,$$

принимая каждое из граничных значений дважды за период. Сплошная и штриховая линии на рис. 1 соответствуют углу $\Theta = \arccos S_3$ в моменты времени $t = 0$ и $t = T/2$, когда $S_3(\tilde{\chi} = K)$ достигает максимума (T – период колебаний).

Напомним, что параметр ρ задает макроскопический сдвиг $\Delta = 4\rho$ доменной структуры при образовании в ней солитона. В зависимости от ρ строение ядра солитона меняется. При малых значениях $0 < \rho < 0.1K$ солитон (25) представляет собой “обрезанную” малоамплитудную стоячую

волну прецессии с нулевым квазиимпульсом на фоне доменной структуры. Ее протяженность $\propto \rho^{-1}$. При $0.1K \leq \rho \leq 0.5K$ ядро солитона локализовано в пределах одного домена структуры, где компонента S_3 пульсирует: $\Delta\Theta \propto 0.1 - 0.15\pi$ при $0.1K \leq \rho \leq 0.3K$ и $\Delta\Theta \propto 0.05\pi$ при $0.4K \leq \rho \leq 0.5K$ (см. рис. 1).

С ростом ρ в интервале $0.4K \leq \rho \leq 0.6K$ в центре солитона $S_3(\tilde{\chi} = K) \approx -1$. Частота прецессии мала: $0.01 < |\omega| < 0.1$. Ядро солитона (25) представляет собой зародыш перемагничивания шириной $d \propto 2\rho \propto K$. Зародыш ограничен доменными стенками толщиной $l \ll d$. Слева и справа к ним примыкают области малоамплитудной прецессии протяженностью порядка ширины домена структуры. Некруговая прецессия в области локализации солитона вызывает периодические синфазные смещения доменов вдоль структуры на величину $\Delta\chi \propto 0.1 - 0.4K$. На рис. 1 взаимные направления смещений указаны стрелками. Вне ядра солитона они экспоненциально затухают.

С дальнейшим ростом ρ (при $0.6K < \rho < 0.8K$) ширина примыкающих к ядру солитона областей малоамплитудной прецессии быстро растет. При $\rho \approx 0.8K$ их протяженность $\propto 4K - 4.5K$ превышает период структуры.

Случай второго неподвижного солитона ($\mu = -\rho \pm iK$) следует считать выделенным. Его особенность состоит в том, что в центре солитона намагниченность постоянна.

На рис. 2 центр солитона помещен в середину одного из доменов структуры. Тогда, как и для солитона на однородном фоне [5, 7], фазы вращения намагниченности вокруг оси Oz правее и левее центра солитона различаются на π . Распределение намагниченности имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1 &= -\frac{2g}{A} \sin(2\tilde{\gamma}), \quad \tilde{S}_2 = -\tilde{c} + \frac{2g}{A} [g\tilde{c} - f\tilde{s}] - \\ &- \frac{2hg}{A} \tilde{s} \cos(2\tilde{\gamma}), \quad S_3 = -\tilde{s} + \frac{2g}{A} [f\tilde{c} + g\tilde{s}] + \\ &+ \frac{2hg}{A} \tilde{c} \cos(2\tilde{\gamma}), \\ A &= [h \cos(2\tilde{\gamma}) + f]^2 + \sin^2(2\tilde{\gamma}) + g^2; \\ g &= c_p \left[\frac{\tilde{a}_-^2 e^{-2y}}{1 + s_3} - \frac{\tilde{a}_+^2 e^{-2y}}{1 + s_1} \right], \quad h_0 = \frac{d_p}{c_p}; \\ f &= s_p \left[\frac{d_3 \tilde{a}_-^2 e^{-2y}}{1 + s_3} + \frac{d_1 \tilde{a}_+^2 e^{-2y}}{1 + s_1} \right], \\ 2y &= \chi \operatorname{Re}[Z(iK' - \rho)] + 2y_0; \\ s_1 &= \operatorname{sn}(\chi + \rho), \quad s_3 = \operatorname{sn}(\chi + 3\rho); \\ d_1 &= \operatorname{dn}(\chi + \rho), \quad d_3 = \operatorname{dn}(\chi + 3\rho). \end{aligned} \quad (27)$$

Коэффициенты $\tilde{a}_\pm, \tilde{b}_\pm$ вещественны. Они отличаются от a_\pm, b_\pm множителями:

$$\frac{a_\pm}{\tilde{a}_\pm} = \frac{b_\pm}{\tilde{b}_\pm} = \exp\left[\mp \frac{\pi i(\chi + 2\rho)}{4K}\right];$$

$$\frac{\tilde{b}_\pm}{\tilde{a}_\pm} = \frac{c_1}{1 + s_1}, \quad \frac{\tilde{b}_\mp}{\tilde{a}_\mp} = -\frac{c_3}{1 + s_3}.$$

В ядре солитона прецессия однородна: $2\tilde{\gamma} = \omega(\rho)t + 2\tilde{\gamma}_0$, где $\omega(\rho) = -d_\rho c_\rho / (ks_\rho)^2$, $\tilde{\gamma}_0 = \text{const}$. При выводе (27) учтены соотношения (23) и тождества:

$$d_\rho \text{sn}(\tilde{\chi} \pm \rho) \tilde{s} + \text{cn}(\tilde{\chi} \pm \rho) \tilde{c} = c_\rho,$$

$$\tilde{s} \text{cn}(\tilde{\chi} \pm \rho) - \tilde{c} d_\rho \text{sn}(\tilde{\chi} \pm \rho) = \mp s_\rho \text{dn}(\tilde{\chi} \pm \rho).$$

В выражении (27) коэффициент $h \approx 1$. С учетом этого, намагниченность представляется в виде:

$$\mathbf{S}(\chi, t) \approx \frac{1}{A(\chi, t)} [\mathbf{N}(\chi) + \mathbf{P}(\chi, t)],$$

$$A(\chi, t) \approx 1 + f^2 + g^2 + 2f \cos(2\tilde{\gamma}).$$

Вектор \mathbf{AS} представляется в виде суммы независимого от времени вектора:

$$\mathbf{N}(\chi) = (1 + f^2 - g^2) \mathbf{m}_1(\chi) + 2fg \mathbf{m}_2(\chi)$$

и вектора

$$\mathbf{P}(\chi, t) = 2(f\mathbf{m}_1 + g\mathbf{m}_2) \cos(2\tilde{\gamma}) + 2g\mathbf{m}_3 \sin(2\tilde{\gamma}).$$

Векторы $\mathbf{m}_1 = -c_0 \tilde{\mathbf{i}} - s_0 \tilde{\mathbf{j}} - \tilde{s} \mathbf{k}$, $\mathbf{m}_2 = -c_0 \tilde{\mathbf{s}}\mathbf{i} - s_0 \tilde{\mathbf{j}} + \tilde{c} \mathbf{k}$, $\mathbf{m}_3 = -s_0 \mathbf{i} + c_0 \mathbf{j}$ ортонормированы. Конец вектора \mathbf{P} движется по эллипсу (всюду, за исключением центра солитона $y = 0$). Соответственно, вектор \mathbf{AS} движется по конусу, ось которого совпадает с направлением \mathbf{N} , а величина $A > 0$ задает масштабное преобразование, проецирующее вектор \mathbf{AS} на поверхность сферы $S^2 = 1$.

Как и ранее, вследствие некруговой прецессии ядро солитона периодически меняет свой размер. Однако, ограничивающие его доменные стенки теперь колеблются в противофазе. Их колебания передаются соседним доменам, вызывая малые продольные смещения их доменных стенок. Колебания намагниченности в доменах слева (справа) от ядра солитона синфазны (см. рис. 2). В остальном, поведение намагниченности качественно такое же, как и для солитона первого типа. Так при $0.4K < \rho < 0.6K$ ядро солитона представляет собой зародыш перемангничивания с малой прецессией: $0.01 < |\omega| < 0.1$. Заметим, что при $\rho \ll 1$ частота прецессии возбуждения (27) становится большой: $\omega(\rho) \approx -\text{sh}^{-2} \rho = O(\rho^{-2})$, а область резкого изменения намагниченности – малой: $l \propto \rho$. Поэтому может нарушиться условие приме-

нимости длинноволнового приближения. Значения ρ следует ограничить условием

$$l \propto \left[\frac{ks_\rho}{c_\rho d_\rho + Z(\rho) s_\rho} \right] \sqrt{\frac{K_a}{\alpha}} \gg a, \quad (28)$$

где a – постоянная кристаллической решетки. В формуле (28) мы перешли к размерным переменным.

Когда движущийся солитон находится в центре одного из доменов структуры, его ядро напоминает солитон с почти круговой прецессией вектора \mathbf{S} на фоне однородного распределения намагниченности. Проекция S_3 в пределах ядра меняется от его краев, где $S_3 = S_a \approx 1$ или $S_3 = S_a \approx -1$, к центру, где $S_3 = S_c$ ($|S_c| < 1$). Под шириной d ядра солитона будем понимать расстояние между точками, в которых $S_3 = (S_a + S_c)/2$. В ядре солитона происходит перемангничивание материала на величину $A = |S_a - S_c|$ ($0 < A \leq 2$).

При прохождении солитона через каждую доменную стенку структуры проекция поля S_3 в его центре меняет знак на противоположный. Солитон как бы “опрокидывается”, не меняя своей формы.

В общем случае вдали от центра солитона (при $|y| \gg 1$) решение (22) описывает малоамплитудную прецессию намагниченности вокруг ее равновесных положений в доменной структуре

$$\mathbf{S} = S_R \mathbf{e}_1(\chi) + S_I \mathbf{e}_2 + \left[1 + O(e^{-4|y|}) \right] \mathbf{e}_3(\chi). \quad (29)$$

Векторы \mathbf{e}_i образуют ортонормированный репер ($i = 1, 2, 3$). При $x \ll -1$ имеем:

$$\mathbf{e}_1(\chi) = c_0 s_4 \mathbf{i} + s_0 s_4 \mathbf{j} - c_4 \mathbf{k}, \quad \mathbf{e}_2 = -s_0 \mathbf{i} + c_0 \mathbf{j},$$

$$\mathbf{e}_3(\chi) = \mathbf{S}_2^{(0)}; \quad S_R \approx -\text{Re}[aX_-], \quad S_I \approx -\text{Im}[X_-];$$

$$X_- = \frac{2s_\rho}{c_\theta d_\theta} \left(\frac{c_3 s_\theta d_\theta + c_\theta s_3 d_3}{1 - k^2 s_3^2 s_\rho^2} \right) \frac{d_\mu}{a_- b_-} e^{-2y - 2i\gamma} \propto \quad (30)$$

$$\propto \Lambda(\chi + \Delta, \mu) e^{-i\omega(\mu)t};$$

а при $x \gg 1$:

$$\mathbf{e}_1(\chi) = c_0 s_\chi \mathbf{i} + s_0 s_\chi \mathbf{j} - c_\chi \mathbf{k}, \quad \mathbf{e}_2 = -s_0 \mathbf{i} + c_0 \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_3(\chi) = \mathbf{S}_1^{(0)};$$

$$S_R \approx -\text{Re}[aX_+], \quad S_I \approx -\text{Im}[X_+]; \quad X_+ = \frac{2s_\rho}{c_\theta d_\theta} \times \quad (31)$$

$$\times \left(\frac{c_1 s_\theta d_\theta - c_\theta s_1 d_1}{1 - k^2 s_1^2 s_\rho^2} \right) \frac{d_\mu}{a_+ b_+} e^{2y + 2i\gamma} \propto \Lambda^*(\chi, -\mu^*) e^{i\omega^*(-\mu^*)t}.$$

Здесь коэффициент $a = kc_\mu / d_\mu$, $c_\mu = \text{cn} \mu$, $d_\mu = \text{dn} \mu$, $s_\chi = \text{sn} \chi$, $c_\chi = \text{cn} \chi$; $s_4 = \text{sn}(\chi + 4\rho)$, $s_1 = \text{sn}(\chi + \rho)$, $c_4 = \text{cn}(\chi + 4\rho)$, $c_1 = \text{cn}(\chi + \rho)$, $c_3 = \text{cn}(\chi + 3\rho)$, $s_3 = \text{sn}(\chi + 3\rho)$, $d_3 = \text{dn}(\chi + 3\rho)$,

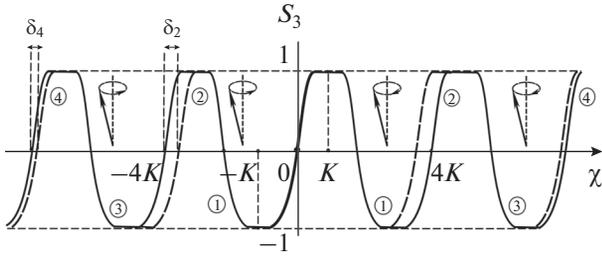


Рис. 3. Аperiodическое смещение доменной структуры в возбуждении (32), локализованном на неподвижной доменной стенке в точке $\chi = 0$.

$s_\theta = \text{sn}(i\theta)$, $c_\theta = \text{cn}(i\theta)$, $d_\theta = \text{dn}(i\theta)$, $c_0 = \cos\varphi_0$, $s_0 = \sin\varphi_0$, $s_p = \text{snp}$, $\omega(u) = k^{-1}\text{cn}u\text{dn}u$.

При $k = 0.9994$ коэффициент $a \approx 1$. Потому конец вектора \mathbf{S} в плоскости Oe_1e_2 движется по эллипсу, близкому к окружности малого радиуса $|X_\pm|$.

Подобно дислокации в кристалле [26], движущиеся солитоны служат переносчиками макроскопического сдвига Δ доменной структуры. Домены слева и справа от их ядер претерпевают относительный сдвиг на величину $\Delta = 4\rho$. Но в отличие от случая дислокации в кристалле, сдвиг Δ зависит только от строения ядра солитона, но не от периода $4K(k)k$ доменной структуры (параметры ρ и k независимы). Упругие парные столкновения солитонов сопровождаются локальными сдвигами доменной структуры [25].

Поведение солитонов вблизи границ области их существования

Особый интерес представляет поведение решений в областях неустойчивости структуры по линейному приближению (при $\mu = -K + \varepsilon + i\theta$, $0 < \varepsilon \ll 1$). Неустойчивость приводит к протяженным модуляциям доменной структуры, которые, в общем случае, движутся с большой скоростью. Система как бы стремится избавиться от модуляций. Лучше поддаются наблюдению случаи $\mu = -K + 0$ и $\mu = -K + iK + 0$, когда модуляции структуры неподвижны. При таких значениях μ солитон сдвигает доменную структуру на период. Потому при $\chi \rightarrow +\infty$ и $\chi \rightarrow -\infty$ решение (22) имеет одно и то же асимптотическое поведение: $\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}_2^{(0)}$ (см. (14)).

В пределе $\mu = -K + 0$ из (25) получаем аperiodическое слабо локализованное эллиптически полиномиальное возбуждение:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1 &= -\frac{2\bar{t}}{A_0}C(\chi), \quad \tilde{S}_2 = -\text{cn}\chi + \frac{2}{A_0}C(\chi)(k\text{sn}\chi + \bar{x}), \\ S_3 &= \text{sn}\chi - \frac{2}{A_0}C(\chi)B(\chi), \end{aligned} \tag{32}$$

где $\bar{t} = tk^2/k$,

$$\begin{aligned} \bar{A}_0 &= \bar{t}^2 + (k\text{sn}\chi + \bar{x})^2 + B^2(\chi), \\ B(\chi) &\equiv \text{dn}\chi - k\text{cn}\chi, \quad C(\chi) \equiv \bar{x}\text{cn}\chi + \text{sn}\chi\text{dn}\chi, \\ \bar{x} &= -k^2 \int \text{cn}^2\chi d\chi = -(\chi - \chi_0) \left[k^2 - \frac{1+k^2}{6} \right] - \\ &\quad - \zeta(\chi + 2K - iK') - \zeta(\chi + iK') + \eta_1. \end{aligned}$$

Положение его центра определяется константой интегрирования χ_0 . На рис. 3 центр возбуждения совпадает с серединой одной из доменных стенок структуры ($\chi_0 = 0$). Тогда в содержащей ее области $|\chi| < K$ все три компоненты намагниченности (32) почти не меняются со временем: $\mathbf{S} \approx \mathbf{S}_2^{(0)}$. В центре доменной стенки намагниченность $\mathbf{S}(\chi = 0) = (-c_0, -s_0, 0)$ не зависит от времени.

Обсудим смещения доменной структуры в области $|\chi| > K$. При $\chi > K$ ($\chi < -K$) с ростом t намагниченность разворачивается на 360 градусов по (против) часовой стрелки. Разворот происходит преимущественно вокруг оси Oz . На рис. 3 сплошной линией изображена проекция $S_3^{(0)} = \text{sn}\chi$, соответствующая фоновой структуре $\mathbf{S}_2^{(0)}$, штриховой — значения S_3 (32) при $t = 0$. Конусы прецессии указывают направление разворота намагниченности в проекции на плоскость Oxy ; цифры в кружочках нумеруют доменные стенки. Интересно, что вдоль структуры смещаются только стенки с четными номерами. При $-\infty < t < 0$ с ростом t доменные стенки с центрами в точках $\chi_{2m} = 4Km$, где m — целое, сдвигаются по направлению к началу координат $\chi = 0$ на величину δ_{2m} , а затем (при $0 < t < \infty$) возвращаются в исходные положения. Максимальное смещение доменных стенок (по переменной χ) $\delta_2 \approx 0.42K$ составляет величину порядка 0.1 от периода $4K$ структуры. Сдвиги δ_{2m} экспоненциально убывают по мере удаления от центра; $\delta_4 \approx 0.12K$.

Рассмотрим второй случай неподвижных модуляций структуры вблизи границ существования солитона. В пределе $\mu = -K + iK' + 0$ получаем точное решение:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1 &= -\frac{2s_\varphi K}{r^2 + 1}, \quad \tilde{S}_2 = -\text{cn}\chi + \frac{2c_\varphi K}{r^2 + 1}, \\ S_3 &= \text{sn}\chi - \frac{2rK}{r^2 + 1}, \end{aligned} \tag{33}$$

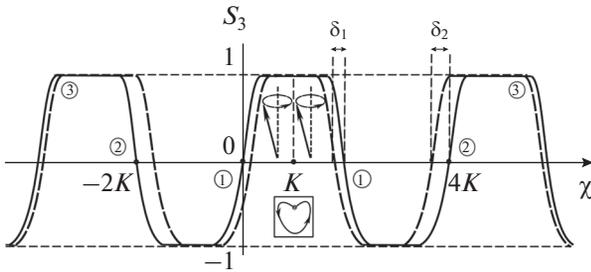


Рис. 4. Аперриодическое смещение доменной структуры в возбуждении (33) с центром в середине домена. Обозначения на рис. 4 аналогичны таковым на рис. 3.

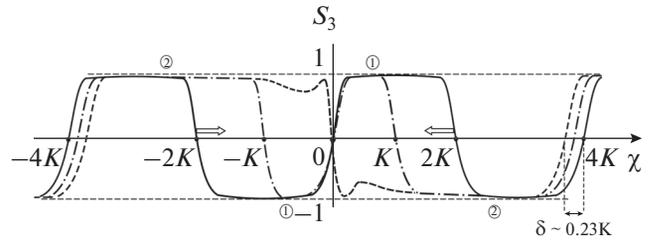


Рис. 5. Процесс перемагничивания доменной структуры в области локализации возбуждения (33) при $\chi_0 = 0$.

где $\kappa \equiv r \operatorname{sn} \chi + c_\varphi \operatorname{cn} \chi$, $s_\varphi \equiv \sin \varphi$, $c_\varphi \equiv \cos \varphi$,

$$\varphi = \arg[(2g_2 + i\bar{t})/(2g_1 + i\bar{t})] + \arg[\operatorname{sn} \chi],$$

$$\bar{t} = tk^2/k^2, \quad r(\chi, t) = \frac{k'}{2} \left(\frac{m_2}{m_1} - \frac{m_1}{m_2} \right),$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{k' \operatorname{sn} \chi}{\operatorname{dn} \chi + \operatorname{cn} \chi} \left[\frac{2g_1 + i\bar{t}}{2g_2 + i\bar{t}} \right],$$

$$g_1(\chi) = \zeta(\chi) - \frac{\eta_1 \chi}{2K} + \frac{E}{2K} (\chi - \chi_0),$$

$$g_2(\chi) = \zeta(\chi + 2K) - \frac{\eta_1}{2K} (\chi + 2K) + \frac{E}{2K} (\chi - \chi_0),$$

где E — полный эллиптический интеграл второго рода с модулем k .

В отличие от предыдущего случая, характер решения (33) качественно меняется в зависимости от положения центра возбуждения. Пусть центр возбуждения расположен в середине домена ($\chi_0 = K$) (см. рис. 4). Тогда намагниченность в центре домена всегда совпадает с равновесной: $S(\chi = K) = (0, 0, 1)$.

Изменения компоненты S_3 намагниченности локализованы на доменных стенках структуры. В отличие от предыдущего случая, теперь вдоль структуры смещаются все доменные стенки. Амплитуда смещений доменных стенок, ограничивающих центральный домен, определяется уравнением: $\operatorname{am} \delta_1 = \operatorname{arctg}[4k^2/(4 - k^4)]$. Отсюда находим: $\delta_1 \approx 0.23K$ (порядка 0.125 от ширины домена). В пределах центрального домена ($0 < \chi < 2K$) смещения проекции S_3 вдоль оси структуры сопровождаются разворотом намагниченности вокруг Oz на 360 градусов против часовой стрелки. Заметим, что в этой области траектория движения конца вектора S по поверхности сферы $S^2 = 1$ имеет сердцевидную форму с выколотой угловой точкой; ей соответствуют моменты времени $t = \pm\infty$ (см. вставку на рис. 4). Крайние стенки доменов, ближайших к центральному, испытывают наибольшие смещения: $\delta_2 \approx 0.34K > \delta_1$. Величина смеще-

ний последующих доменных стенок по мере удаления от центра возбуждения быстро падает.

При $\chi_0 = 0$ решение (33) описывает сложный процесс перемагничивания доменной структуры, происходящий в два этапа (рис. 5). Вначале доменные стенки с центрами в точках $\chi = \pm 2K$ с ростом t движутся по направлению к неподвижной доменной стенке в точке $\chi = 0$. Домены, прилегающие к этой доменной стенке (домены 1), укорачиваются, а следующие за ними (домены 2) — удлиняются. На рис. 5 сплошной линией изображена проекция $S_3^{(0)} = \operatorname{sn} \chi$, соответствующая фоновой структуре $S_2^{(0)}$; направления движения доменных стенок указаны стрелками. За время $-\infty < t < -t_0$ ($t_0 = k^2/k' \approx 27.4$) движущиеся доменные стенки достигают точек $\chi = \pm K$, занимая положения, отмеченные на рис. 5 штрих-пунктиром. На втором этапе (при $-t_0 < t < 0$) в узких доменах 1 намагниченность разворачивается, принимая значения, соответствующие однородным состояниям в соседних более широких доменах 2. В результате при $t = 0$ узкие домены 1 полностью исчезают, а два широких домена 2 занимают области $|\chi| < 4K$, разделенные доменной стенкой с центром в точке $\chi = 0$ (штриховая линия на рис. 5). Ширина новой доменной стенки почти в два раза меньше ширины доменных стенок структуры. Остальные части структуры незначительно смещаются по направлению к центральной доменной стенке. Наибольшие смещения $\delta \approx 0.23K$ испытывают доменные стенки вблизи точек $\chi = \pm 4K$. При $0 < t < +\infty$ указанный процесс перемагничивания происходит в обратной последовательности.

В малых окрестностях точек $\mu = -K$ и $\mu = -K + iK'$ аперриодический характер рассмотренных возбуждений меняется на повторение с течением времени продольных колебаний, смещений и перемагничиваний доменной структуры.

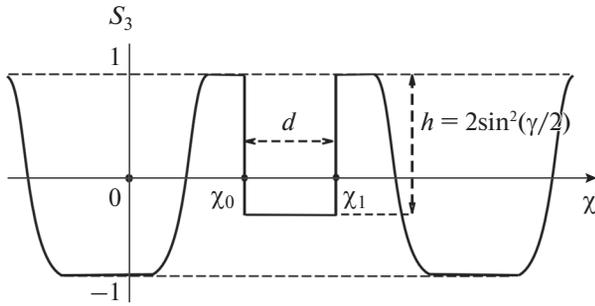


Рис. 6. Начальный импульс (34).

**ВОЗБУЖДЕНИЕ СОЛИТОНОВ
В ДОМЕННОЙ СТРУКТУРЕ**

Неподвижные солитоны легче наблюдать и диагностировать, чем движущиеся. Как и в спиральной структуре [14], каждый неподвижный солитон отодвигает от себя соседние доменные границы полосовой доменной структуры. Особый интерес представляет случай, когда ядро солитона совершает колебания внутри одного протяженного домена. Для возбуждения такого солитона нужно удлинить и возмутить один из доменов структуры так, чтобы он стал резонатором для ядра солитона. Это можно сделать, прилагая локальное магнитное поле вдоль направления

$$\mathbf{n} = (\sin \gamma \cos \varphi_0, \sin \gamma \sin \varphi_0, \cos \gamma),$$

где параметр $\gamma = \text{const}$ задает компоненту S_3 намагниченности, а угол φ_0 — ориентацию проекции вектора \mathbf{S} в плоскости Oxy .

Для возбуждения солитонов продольной деформации в цепочке полосовых доменов также предлагалось применить пространственно неоднородное магнитное поле [11]. В данной работе мы подкрепим приведенное утверждение расчетом. Пусть начальное распределение намагниченности имеет вид ступенчатого импульса длиной d по переменной χ в полосовой доменной структуре:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(x, t = 0) &= \mathbf{S}_2^{(0)}(x + kd) \equiv \mathbf{S}_1^{(0)}(x) \quad \text{при } \chi < \chi_0; \\ \mathbf{S}(x, t = 0) &= \mathbf{n} \quad \text{при } \chi_0 < \chi < \chi_1; \\ \mathbf{S}(x, t = 0) &= \mathbf{S}_2^{(0)}(x) \quad \text{при } \chi > \chi_1, \end{aligned} \quad (34)$$

где $\chi_1 - \chi_0 = d$, $d = \Delta$. Пусть для определенности $\chi_1 = K$, $\chi_0 = K - d$, тогда: $\mathbf{S}_1^{(0)}(\chi = \chi_0) = \mathbf{S}_2^{(0)}(\chi = \chi_1) = (0, 0, 1)$ (см. рис. 6).

Начальное возмущение (34) распадается на солитоны, если элемент $\bar{a}(u)$ матрицы перехода (18) имеет нули в области своей аналитичности. Решение первого уравнения вспомогательной си-

стемы (10), соответствующее распределению намагниченности (34), имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi_1(\chi, t = 0) &= \Psi_1^{(0)}(\chi, t = 0) \quad \text{при } \chi < \chi_0; \\ \Psi_1(\chi, t = 0) &= U \exp\left(\frac{\xi}{2} k \chi \sigma_3\right) C_1 \quad \text{при } \chi_0 < \chi < \chi_1; \\ \Psi_1(\chi, t = 0) &= \Psi_2^{(0)}(\chi, t = 0) C_2 \quad \text{при } \chi > \chi_1, \end{aligned}$$

где

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\text{sn} u \cos \gamma}{2\xi} & \frac{\text{icnu} \sin \gamma}{\xi + \text{sn} u \cos \gamma} e^{-i\varphi_0} \\ -\frac{i}{2\xi} \text{cn} u \sin \gamma e^{i\varphi_0} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\xi = \sqrt{\cos^2 \gamma - \text{cn}^2 u}, \quad \det U = 1.$$

Постоянные матрицы $C_{1,2}$ находятся из условия непрерывности функции $\Psi_1(\chi, t = 0)$ в точках $\chi = \chi_{1,2}$. Отсюда получаем матрицу перехода:

$$\begin{aligned} T(u) &= C_2 = \begin{pmatrix} a(u) & -\bar{b}(u) \\ b(u) & \bar{a}(u) \end{pmatrix} = \\ &= [\Psi_2^{(0)}(\chi, t = 0)]^{-1} U \exp\left(\frac{\xi}{2} kd \sigma_3\right) U^{-1} \Psi_1^{(0)}(\chi_0, t = 0). \end{aligned}$$

С учетом тождеств:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(\chi + iK' + 2K)}{\sigma(\chi + iK')} \exp[-\eta_1 \chi - \eta_1 (K + iK')] &= \\ &= -\frac{i}{k'} [\text{dn} \chi + k \text{cn} \chi]; \\ \frac{\text{sn} u \text{cn} u}{\text{dnu}} &= \frac{\text{sn}(2u)}{1 + \text{dn}(2u)}, \end{aligned}$$

условие обращения в нуль функции $\bar{a}(u)$ сводится к уравнению:

$$\xi \text{cth}\left(\frac{\xi}{2} kd\right) - \frac{k \text{sn}(2u, k)}{1 + \text{dn}(2u, k)} \cos \gamma = 0. \quad (35)$$

Результаты численного счета говорят о том, что локализованное возмущение малой ширины $d \leq 0.8K$ расплывается на диспергирующие спиновые волны при $0 < \gamma \leq \pi/2$, а при $\pi/2 < \gamma \leq \pi$ порождает два или более попарно одинаковых малоамплитудных солитона (22) со значениями $\rho \leq 0.2K$, $0 < \theta < 0.4\pi$, движущихся в противоположных направлениях.

Наибольший интерес представляют неподвижные солитоны. Значения параметров d, γ , при которых (35) имеет вещественный корень $u = -\rho$ ($0 < \rho < K$), соответствуют условиям формирования неподвижного солитона (25). Он хорошо различим на фоне структуры, когда ρ лежит в интервале: $0.1K < \rho < K$. Солитоны со значениями $\rho < 0.1K$ мы считаем слабо локализованными и далее их не рассматриваем.

Будем понимать под глубиной начального импульса (34) h величину $1 - S_3(x, t = 0) =$

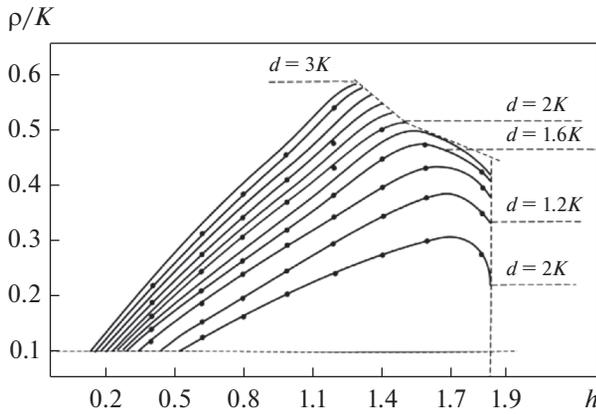


Рис. 7. Зависимость $\rho(0 < h \leq 1.9, d = \text{const})$ (35) и данные численного счета для неподвижного солитона (25) при разных значениях d .

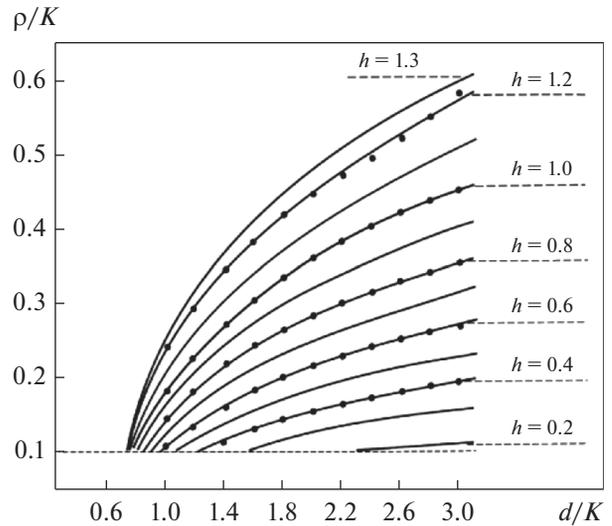


Рис. 8. Зависимость $\rho(h = \text{const}, 0.8K \leq d \leq 3K)$ (35) и данные численного счета для неподвижного солитона (25) при разных значениях h .

$= 2 \sin^2(\gamma/2) = h, 0 \leq h \leq 2$ (см. рис. 6). Уравнение (35) решается явно только при $h = 0, 1, 2$. Для $h = 0$ и $h = 2$ оно имеет тривиальное решение $\rho = 0$. В случае $h = 1$ из (35) получим соотношение:

$$\text{сnp} = \pi/(kd), \quad (36)$$

согласно которому $\rho(h = 1, d)$ монотонно растет с увеличением ширины ступеньки d . Корень $\rho(h = 1, d)$ параметризует неподвижный солитон (25) с частотой прецессии:

$$\omega(\rho)|_{h=1} = k^{-1} \text{сnp} d \text{np} = \pi(k^2 d)^{-1} \sqrt{k^2 + \pi^2 d^{-2}}.$$

Хорошо локализованный неподвижный солитон (25) формируется из начального импульса (34) шириной $K < d < 4K$ и глубиной $h \geq 0.3$. Соответствующие численные и аналитические зависимости $\rho(h, d)$ приведены на рис. 7, 8. Жирные точки соответствуют данным численного счета, сплошные линии построены по формуле (35). Примечательно, что с ростом ширины d – при значениях $2K \leq d < 4K, h \geq 1$ – формирование неподвижного солитона (25) с $0.4K \leq \rho \leq 0.6K$ (рис. 7, 8) сопровождается образованием одной или более пар малоамплитудных движущихся солитонов (22), а также еще одного неподвижного солитона (25) со значениями $\rho \leq 0.2K$. Эти значения ρ тоже удовлетворяют уравнению (35), но на рис. 7, 8 мы их не приводим во избежание загромождения. Второй неподвижный солитон находится на расстоянии порядка двух периодов структуры от первого. Центры неподвижных солитонов располагаются, соответственно, правее и левее середины начального импульса (34). Число движущихся солитонов увеличивается с ростом ширины, либо глубины начального импульса (34).

При $d > 4K$ начальная ступенька (34) порождает комплекс многосолитонных возбуждений.

Отметим, что при $d \geq 2K, h \geq 1.3$ левая часть (35) оказывается близкой к нулю на всем интервале значений $0.4K \leq \rho \leq 0.6K$. В этом случае уравнение (35) дает лишь качественную оценку зависимости $\rho(h, d)$. Потому на рис. 7 соответствующие участки вырезаны штриховой ломаной линией. По той же причине на рис. 8 отсутствуют кривые для $h > 1.3$. На рис. 7 мы также не рассматриваем область значений $h \geq 1.9$, поскольку для начальных импульсов большой глубины $h \approx 1.9$ крутизна кривых $\rho(h, d = \text{const})$ резко возрастает, и решения уравнения (35) становятся неустойчивыми.

На интервале $0 < h < 1$ графики $\rho(h, d = \text{const})$ (рис. 7) – почти прямые. Угол их наклона $\alpha(d)$ слабо зависит от h . С учетом этого, из (35) находим:

$$\text{tg}[\alpha(d)] = \frac{d\rho}{dh} \approx \left. \frac{d\rho}{dh} \right|_{\xi(\rho, h)=0} = \frac{d}{2} \left(\frac{n-1}{n+1} \right),$$

где $n \equiv 3d^{-1} \sqrt{d^2 - 16}$. Это приближение оказывается верным для значений $1.1K \leq d \leq 2K$.

Зависимость $\rho(h, d = \text{const})$ от глубины h начального импульса при его фиксированной ширине d немонотонна: она круто убывает, начиная с некоторого значения $1 < h_0(d) < 2$ (см. рис. 7). Это означает, что из двух ступенек равной ширины d , но разных глубин $0 < h_1 < 1$ и $h_2 > h_0(d) > 1$ может формироваться солитон (25) с одним и тем же значением ρ . Начальное возмущение глубиной $h_2 > h_0(d)$ сбрасывает часть энергии в виде излуче-

ния, уменьшая свою глубину до уровня $0 < h_1 < 1$, а после из него формируется солитон со значением $\rho = \rho(h_1, d)$.

На рис. 8 сплошными линиями изображены кривые $\rho(h = \text{const}, d)$ для значений $h \leq h_0(d = 3K) = 1.3$. При $d > 3K$ зависимость $\rho(h = \text{const}, d)$ “выходит на насыщение”. Возмущение (34) ширины $3K < d < 4K$ сначала сужается до $d \approx 3K$, сбрасывая излишек энергии в виде диспергирующих волн, а затем из него формируется неподвижный солитон (25) с параметром ρ из области $\rho \leq 0.7K$. Значения $\rho \geq 0.7K$ соответствуют области модуляционной неустойчивости солитона (25). Поэтому солитоны с такими значениями ρ не наблюдаются в численном эксперименте.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе получены и детально проанализированы новые точные решения уравнения Ландау–Лифшица (2), которые описывают солитоны, сильно связанные с полосовой доменной структурой легкоосного ферромагнетика. Эти солитоны структурно устойчивы и служат элементарными переносчиками макроскопических сдвигов структуры. Некруговая прецессия намагниченности в ядре солитона вызывает пульсации ядра и колебания соседних доменных границ структуры. При малых частотах прецессии солитоны являются зародышами перемагничивания доменной структуры. Когда частоты солитонов приближаются к границам спин-волнового спектра, они трансформируются в малоамплитудные спиновые волны или в периодические всплески сильных модуляций доменной структуры. Модуляции сопровождаются возвратно-поступательными перемещениями группы доменных границ вдоль структуры, а также процессами вращения намагниченности в нескольких соседних доменах.

В результате численного моделирования выявлены необходимые условия и проанализированы типичные сценарии генерирования солитонов в доменной структуре после ее локального перемагничивания внешним полем. При формировании прецессирующих солитонов энергия начального возмущения (34) перераспределяется между компонентами намагниченности. Поэтому ни ширина d , ни проекция S_3 начального возмущения в области $\chi_0 < \chi < \chi_1$ не совпадают с таковыми у результирующего солитона. Между тем, полученная оценка (35) зависимости параметра ρ солитона (25) от глубины и ширины начального импульса (34) находится в хорошем согласии с численным экспериментом и может быть использована для генерации неподвижных солитонов с требуемыми характеристиками.

Работа выполнена в рамках государственного задания ФАНО России (тема “Квант”, номер г. р. АААА-А18-118020190095-4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хуберт А. Теория доменных стенок в упорядоченных средах. М.: Наука, 1977. 306 с.
2. Браун У.Ф. Микромагнетизм. М.: Наука, 1979. 160 с.
3. Филиппов Б.Н., Танкеев А.П. Динамические эффекты в ферромагнетиках с доменной структурой. М.: Наука, 1987. 217 с.
4. Фартздинов М.М. Спиновые волны в ферро- и антиферромагнетиках с доменной структурой. М.: Наука, 1988. 240 с.
5. Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С. Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. Киев: Наукова думка, 1983. 192 с.
6. Borovik A.E., Klama S., Kulinich S.I. Integration of the Landau–Lifshitz equation with preferred-axis anisotropy by the method of the inverse scattering problem // Physica D. 1988. V. 32. № 1. P. 107–134.
7. Борисов А.Б., Киселев В.В. Квазиодномерные магнитные солитоны. М.: Физматлит, 2014. 520 с.
8. Бикбаев Р.Ф., Бобенко А.И., Итс Р.А. Уравнение Ландау–Лифшица. Теория точных решения II / Препринт Дон ФТИ-84-7 (82), Донецк. 1984.
9. Бикбаев Р.Ф., Бобенко А.И., Итс Р.А. О конечно-зонном интегрировании уравнения Ландау–Лифшица // ДАН. 1988. Т. 272. № 6. С. 1293–1298.
10. Митропольский Ю.Ф., Боголюбов Н.Н. (мл.), Прикарпатский А.К., Самойленко В.Г. Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты. Киев: Наукова думка, 1987. 233 с.
11. Шамсутдинов М.А., Рахимов С.Э., Харисов А.Т. Нелинейные волны в цепочке плоскопараллельных доменных границ в ферромагнетике // ФТТ. 2001. Т. 43. № 4. С. 690–692.
12. Киселев В.В., Расковалов А.А. Нелинейная динамика квазиодномерной спиральной структуры // ТМФ. 2012. Т. 173. № 2. С. 268–292.
13. Киселев В.В., Расковалов А.А. Нелинейные коллективные возбуждения в геликоидальных магнитных структурах // ФММ. 2012. Т. 113. № 12. С. 1180–1192.
14. Kiselev V.V., Raskovalov A.A. Solitons and nonlinear waves in the spiral magnetic structures // Chaos, Solitons and Fractals. 2016. V. 84. P. 88–103.
15. Ширококов М.К. К теории механизма намагничивания ферромагнетиков // ЖЭТФ. 1945. Т. 15. № 1–2. С. 57–76.
16. Бейтмен Г., Эрдейи А. Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матъе. М.: Наука, 1967. 229 с.
17. Byrd P.F., Friedman M.D. Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists. Springer Verlag, 1971. 360 p.
18. Borisov A.B., Kiselev V.V. Topological defects in incommensurable magnetic and crystal structures and quasi-pe-

- riodic solutions of the elliptic sine–Gordon equation // *Physica D*. 1988. V. 31. P. 49–64.
19. *Ахиезер А.И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970. 304 с.
20. *Sklyanin E.K.* On complete integrability of the Landau–Lifshitz equation, Preprint LOMI 79-E-3, Leningrad. 1979.
21. *Mikhailov A.V.* The Landau–Lifschitz equation and the Riemann boundary problem on a torus // *Phys. Lett. A*. 1982. V. 92. № 2. P. 51–55.
22. *Борисов А.Б., Киселев В.В.* Многосолитонные решения асимметричных киральных $SU(2)$, $SL(2, R)$ -теорий ($d = 1$) // *ТМФ*. 1983. V. 54. № 2. С. 246–257.
23. *Borisov A.B.* The Hilbert problem for matrices and a new class of integrable equation // *Lett. Math. Phys.* 1983. V. 7. P. 195–199.
24. *Kiselev V.V., Raskovalov A.A.* Forced motion of breathers and domain boundaries against the background of nonlinear magnetization wave // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2012. V. 45. P. 1551–1565.
25. *Kiselev V.V., Raskovalov A.A.* Solitons in the domain structure of a ferromagnet // *Theor. Math. Phys.* 2018. V. 196. № 3. P. 1317–1334.
26. *Косевич А.М.* Дислокации в теории упругости (влияние дислокаций на механические свойства кристаллов). Киев: Наукова думка, 1978. 220 с.