

ТЕОРИЯ МЕТАЛЛОВ

УДК 537.9.001

ОРБИТАЛЬНЫЕ МАГНИТНЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ, ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ПОРЯДОК И СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ В СИЛЬНО КОРРЕЛИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

© 2020 г. В. Ю. Ирхин^{a, b, *}, Ю. Н. Скрябин^a

^aИнститут физики металлов им. М.Н. Михеева УрО РАН, ул. С. Ковалевской, 18, Екатеринбург, 620108 Россия

^bУральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина,
ул. Мира, 19, Екатеринбург, 620002 Россия

*e-mail: valentin.irkhin@imp.uran.ru

Поступила в редакцию 16.09.2019 г.

После доработки 23.09.2019 г.

Принята к публикации 24.09.2019 г.

Рассматриваются современные представления о топологической природе сверхпроводимости и состояния Мотта–Хаббарда в сильно коррелированных системах. Эти системы описываются в терминах разделения спинов и зарядов, т.е. деконфайнмент спинов и голонов в калибровочном поле. Обсуждается роль орбитальных степеней свободы. Рассмотрены аналогии с топологическими изоляторами, квантовым эффектом Холла и квантованием Ландау. Продемонстрирована важность члена Черна–Саймонса для правильного описания хаббардовского расщепления.

Ключевые слова: топологический порядок, экзотическая сверхпроводимость, деконфайнмент, хаббардовские зоны

DOI: 10.31857/S0015323020020072

В последние годы идеи квантовой топологии активно применяются к теории сильно коррелированных систем (см. обзор [1]). В частности, было разработано топологическое описание систем Мотта–Хаббарда, включая необычную сверхпроводимость и алгебраическую спин-жидкостную фазу калибровочной теории [2–4]. Важным физическим свойством таких спин-жидкостных изоляторов Мотта является появление дополнительной топологической структуры. В частности, спин-жидкостные состояния обладают дополнительными топологическими законами сохранения, отсутствующими в исходных микроскопических моделях. Такие законы удобно интерпретировать как сохранение потока возникающего калибровочного поля. В настоящей работе мы сопоставляем топологические концепции со стандартным описанием спектра хаббардовских зон [5, 6] и обсуждаем их применение к теории высокотемпературной сверхпроводимости.

Спин-жидкостное состояние обычно рассматривается в терминах экзотических квазичастиц — спинов и голонов, связанных между собой калибровочным полем (в модели Хаббарда с большим U и $t - J$ модели это поле обусловлено ограничением двоек — двукратного заполнения на уз-

ле). Они были введены Андерсоном [7]. Для проекционного оператора Хаббарда имеем

$$\tilde{c}_{i\sigma} = X_i(0, \sigma) = b_i^\dagger f_{i\sigma}. \quad (1)$$

Переход металл–диэлектрик Мотта описывается конденсацией заряженных бозонных голонов b . SU(2) представление [2] вводит два сорта бозонов:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{i\uparrow} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(b_{i1}^\dagger f_{i\uparrow} + b_{i2}^\dagger f_{i\downarrow}), \\ \tilde{c}_{i\downarrow} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(b_{i1}^\dagger f_{i\downarrow} - b_{i2}^\dagger f_{i\uparrow}). \end{aligned} \quad (2)$$

Флуктуации калибровочного поля — это, по существу, флуктуации киральности или орбитального тока. Соответствующие SF (staggered flux) фазы получаются в методе среднего поля в представлении слейв-бозонов [2, 8]. SF-состояние конкурирует с d -волновой сверхпроводимостью и антиферромагнитным (АФМ) упорядочением в системах с нодальными точками (купратах с высокими T_c).

Рядом автором развивалась идея вихревой жидкости, основанная на двумерной модели Березинского–Костерлица–Таулесса (БКТ), в которой разрушение сверхпроводимости с ростом T

возникает не из-за нарушения спаривания БКШ, а из-за потери фазовой жесткости вследствие разрастания вихрей, — без исчезновения сверхтекучей плотности ρ_s на микроскопическом уровне; эта идея обобщается и на трехмерный случай (см. обсуждение в [9]).

SU(2) калибровочная теория обеспечивает механизм низкоэнергетических вихрей, которые необходимы для описания перехода БКТ. Если энергия ядра (кора) вихря слишком велика, система будет вести себя как сверхпроводник на любом разумном масштабе длины выше $T_{\text{БКТ}}$, что не соответствует эксперименту. С другой стороны, если энергия ядра мала по сравнению с T_c , вихри будут быстро размножаться. Таким образом, энергия вихревого потока должна быть порядка T_c . В результате возникает широкий диапазон температур выше $T_{\text{БКТ}}$, где число вихрей растет, но они все еще сохраняют свою идентичность. Так формируется область на фазовой диаграмме с необычными кинетическими свойствами, которую называют областью Нернста. Выше нее возникает “псевдощелевая” фаза. Это сильно неупорядоченная фаза σ -модели, где вихри потеряли свою идентичность и фазы бозонов b_1 и b_2 четко не определены, хотя энергетическая щель, связанная с фермионами, сохраняется. Она понимается как фаза спиновой жидкости с калибровочной симметрией U(1), с которой не связан обычный параметр порядка, поскольку флуктуации, включая SF-орбитальные токи типа “staggered” (соответствующие чередующемуся “шахматному” расположению узлов) и d -волновое спаривание, становятся короткодействующими.

В сверхпроводящем состоянии калибровочный поток локализован в ядре вихря, и флуктуации между полуцелыми вихрями возможны через инстантоны, потому что действие инстантона конечно. Сверхпроводник находится в конфайнментной фазе по отношению к калибровочному полю U(1). Когда температура поднимается к псевдощелевой фазе, это калибровочное поле просачивается из вихревых коров и начинает однородно флуктуировать.

Конкуренция между переходом БКТ для фермионного спаривания и конденсацией бозонов ведет к вопросу о величине кванта потока: hc/e или обычное значение $hc/2e$ (бозон имеет заряд e , а фермионная пара — $2e$)? Оказывается, что в рамках калибровочной теории U(1) вихрь с квантованием потока hc/e будет иметь более низкую энергию, чем $hc/2e$ -вихри, особенно при низком допировании. Однако $hc/2e$ -вихри естественно объясняются в SU(2) модели с двумя бозонами [2].

Отличительной особенностью спроецированного по Гутцвиллеру (с исключением двоек) SF-

состояния является то, что оно нарушает трансляционную симметрию, а при конечном допировании в плакетах (замкнутых контурах из трех или четырех узлов) циркулируют орбитальные токи. Спроецированные состояния SF фазы и d -волнового сверхпроводника тесно связаны благодаря SU(2) симметрии. Последнее состояние не нарушает трансляционную симметрию или симметрию относительно обращения времени и не обладает статическим током, но демонстрирует степенные корреляции для АФМ порядка и “шахматного” орбитального тока. При конечном допировании проекция SF-фазы обладает дальним порядком в смысле орбитального тока, но ближним для сверхпроводящего спаривания и АФМ порядка. Спроецированное состояние SF менее энергетически благоприятно, чем d -волновой сверхпроводник, однако эта разность энергий мала и исчезает, когда допирование стремится к нулю. Отметим, что в более строгой SU(2) калибровочной теории нет параметра дальнего порядка, связанного с фазой алгебраической спиновой жидкости, так что флуктуации, включающие “шахматные” орбитальные токи и d -волновое спаривание, являются лишь короткодействующими.

Одним из способов получения стабильной деконфайнментной фазы является нарушение калибровочной структуры U(1) или SU(2) до симметрии Z_2 [2]. Такая фаза называется спиновой жидкостью Z_2 или RVB-состоянием. Спиновое Z_2 состояние также содержит нейтральные возбуждения со спином $1/2$ — спиноны. Состояние SF является примером состояния с коллинеарным SU(2) потоком, которое инвариантно только при вращении U(1). Эта ситуация маргинальна в смысле ренормгруппы.

Состояние с неколлинеарным потоком SU(2) является Z_2 состоянием. В состоянии Z_2 все калибровочные флуктуации являются щелевыми. Здесь флуктуации могут вызывать только короткодействующие взаимодействия между фермионами. Поэтому включение флуктуаций качественно не меняет свойств решения среднего поля, калибровочные взаимодействия иррелевантны, а состояние среднего поля Z_2 устойчиво при низких энергиях. Это означает существование реальной физической спиновой жидкости, которая содержит фракционализированные нейтральные фермионные возбуждения со спином $1/2$. Эта спиновая жидкость также содержит Z_2 вихревые возбуждения, так называемые визоны. Связанное состояние фермионного возбуждения со спином $1/2$ и Z_2 вихря дает нам бозонное возбуждение со спином $1/2$.

Другой способ получить деконфайнментную фазу — придать калибровочному бозону массу.

Наиболее простое описание такой ситуации получается в терминах киральной спиновой жидкости, где присутствует член Черна–Саймонса. Физическая картина выглядит следующим образом [8]. Возбуждение в приближении среднего поля получается добавлением спинона в зону проводимости. Однако это возбуждение все еще не физическое, так как спинон в зоне проводимости нарушает ограничение $\sum_{\sigma} \langle f_{i\sigma}^{\dagger} f_{i\sigma} \rangle = 1$.

Дополнительная плотность спинов может быть устранена введением вихревого потока калибровочного поля.

$$\Phi = -\pi \sum_i \left(\sum_{\sigma} \langle f_{i\sigma}^{\dagger} f_{i\sigma} \rangle - 1 \right). \quad (3)$$

Поэтому физические квазичастицы — это спиноны, одетые π -вихрем, которые несут спин $1/2$. В то же время спинон, который несет заряд калибровочного поля, имеет дробную (семионную) статистику, являясь связанным состоянием заряда и вихря [8]. При отключении потенциала решетки валентная зона в киральном спиновом состоянии среднего поля становится первым уровнем Ландау, так что “уровни Ландау”, возникающие в “электромагнитном” калибровочном поле, соответствуют хаббардовским подзонам. Таким образом, мы имеем орбитальное квантование во внутреннем калибровочном поле, которое определяет коррелированную структуру зон.

Подобный подход может быть разработан в рамках двойных (doubled) теорий Черна–Саймонса, где макроскопическая киральность и нарушение инвариантности относительно обращения времени отсутствуют. Такую теорию рассматривали Левин и Вен [10], которые исследовали взаимную статистику спинона и визона, которые можно рассматривать как взаимные семионы. Здесь адиабатическое перемещение спинона вокруг визона приводит к фазе Берри [11] величиной π . Таким образом, заряды движутся по квадратной решетке, а потоки — по дуальной решетке. Возможна и формулировка некоторых трехмерных моделей [10].

Взаимная семионная статистика спинов и голонов в сверхпроводящей и АФМ фазах также рассматривалась в $t - J$ модели в рамках подхода слейв-фермионной теории фазовых струн Вэнга с применением к купратным системам [12]. Согласно этой теории, в недодопированном режиме АФМ и сверхпроводящая фазы дуальны: в первой голоны конфайнментны, а спиноны деконфайнментны, и наоборот, а калибровочное поле, порождаемое голонами (спинонами), взаимодействует со спинонами (голонами) посредством минимальной связи. Соответствующим механизмом поведения типа латтинжеровской жидкости является неперенормируемый фазовый сдвиг на по-

верхности Ферми, вызванный допированными дырками; он был идентифицирован с многочастичной фазой типа Берри [13, 14]. Таким образом, теория Вэнга вводит топологические дефекты с нетривиальными квантовыми числами, которые соответствуют вихрям. Лагранжиан Вэнга обладает как четностью, так и симметрией относительно обращения времени; аналогичная структура для Z_2 спиновой жидкости в терминах спинов и визонов была получена в работе [15].

Для произвольного контура C на решетке получаем [12]

$$\begin{aligned} \sum_{\langle i,j \rangle \in C} A_{ij}^s &= \pi \sum_{l \in S_C} (b_{l\uparrow}^{\dagger} b_{l\uparrow} - b_{l\downarrow}^{\dagger} b_{l\downarrow}) \bmod 2\pi, \\ \sum_{\langle i,j \rangle \in C} A_{ij}^h &= \pi \sum_{l \in S_C} h_l^{\dagger} h_l \bmod 2\pi, \end{aligned} \quad (4)$$

где b и h — бозе-операторы спинов и голонов, $A_{ij}^{s,h}$ — калибровочные поля, сумма в левой части пробегает все связи на C , а в правой части — по всем узлам внутри C . Таким образом, голоны (спиноны) несут π -поток и связывается с движением спинов (голонов) через A_{ij}^h (A_{ij}^s). Таким образом, квантование потока калибровочных полей в единицах π приводит к целочисленным значениям чисел заполнения спина и голона. Как и рассмотрение вихрей в киральной спиновой жидкости [8], взаимный член Черна–Саймонса [12] позволяет реализовать условие запрета двукратного заполнения на узле, то есть правильно описать проектирование Хаббарда.

Статистика Вэнга приводит к изменению скрытой топологической структуры по сравнению с ферми-жидкостным БКШ-сверхпроводником: сверхпроводник представляет собой конденсат бозонов с зарядом e , и на первый взгляд кажется, что вихри несут поток hc/e . Однако, если рассмотреть влияние взаимной статистики Черна–Саймонса на топологию сверхпроводника, связывание спинона с вихрем приводит к уменьшению кванта потока вдвое до значения $hc/2e$, как и для обычного конденсата куперовских пар.

Новое понимание было достигнуто благодаря открытию топологических изоляторов [16]. Обычные топологические изоляторы (с энергетической щелью в объеме и бесщелевыми краевыми состояниями) подобны целочисленным квантовым состояниям эффекта Холла. Здесь, благодаря наличию одночастичной энергетической щели, электрон-электронные взаимодействия существенно не изменяют состояние. Таким образом, их можно понять в рамках зонной теории твердого тела. Поэтому более простые целочисленные квантовые холловские состояния в целом адекватно описываются в терминах одночастичной квантовой механики (хотя они обладают так на-

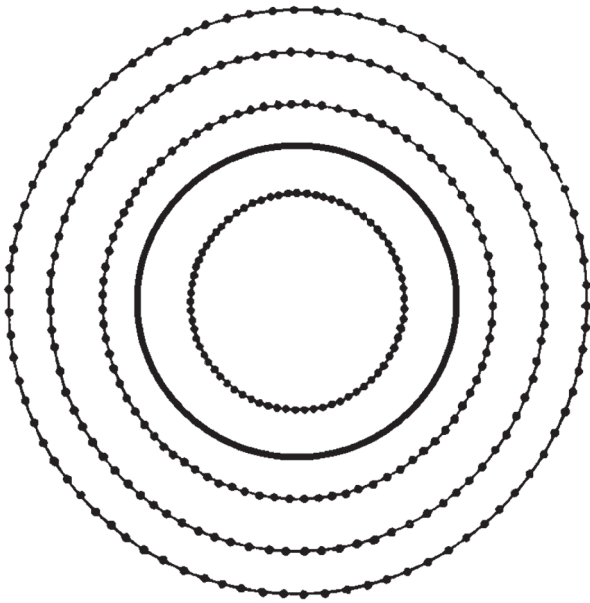


Рис. 1. Квантование Ландау в калибровочном поле на плоскости k_x-k_y . Точки означают плотность электронных состояний на уровнях. Жирная линия показывает энергию Ферми в изоляторном состоянии.

зывается обратимым топологическим порядком [17]). Поскольку холловская проводимость нечетна при обращении времени, описанные топологически нетривиальные состояния могут возникнуть только тогда, когда эта симметрия нарушена. Однако спин-орбитальное взаимодействие допускает другой топологический класс Z_2 изоляторных зонных структур, где данная симметрия не нарушается [16].

Напротив, коррелированные дробные квантовые холловские состояния характеризуются топологическим порядком и квантовой запутанностью и требуют существенно многочастичной трактовки. Хаббардовские системы, где электронные корреляции играют решающую роль, аналогичны последним состояниям. Возбуждения спиновой жидкости Дирака, рассматриваемые в [18, 19], включают магнитные монополи, которые вызывают конфайнмент. Когда фермионы заполняют зону Черна, генерируется член Черна–Саймонса, который представляет собой связь потока и заряда, — аналогично тому, как спин переносится монополем (квантом потока) при наличии квантованной спиновой проводимости Холла.

Стабильность состояния спиновой жидкости повышается на небипартитных решетках (например, треугольной и кагоме) по сравнению с бипартитными решетками (квадратной и сотовой решеткой графена), поскольку в первом случае в силу симметрии отсутствуют тривиальные монополи.

Распространение монополей приводит к конденсации бозонов и появлению щелей в дираковских точках. При наличии потоков квантование в калибровочном поле приводит к появлению уровней типа Ландау, см. рис. 1. При этом нулевой уровень имеет вырождение, равное числу квантов потока $\Phi/2\pi$. Добавление кванта потока порождает нулевую фермионную моду для каждого типа дираковских фермионов. После включения потенциала кристаллической решетки уровни Ландау превращаются в узкие коррелированные полосы. В этом смысле полосы Хаббарда (которые могут быть описаны в простейшем приближении Хаббард-I [5] как уширенные атомные уровни) являются зонами спинов.

Аналогичные зоны получаются в роторном представлении

$$c_{i\sigma}^\dagger = f_{i\sigma}^\dagger \exp(i\theta_i), \quad (5)$$

где оригинальный гамильтониан взаимодействия Хаббарда записывается в терминах углового момента $\hat{L} = -i\partial/\partial\theta$ как $(U/2)\hat{L}_i^2$ [20], причем спектр спинов перенормирован некоторыми Z -факторами. Это рассмотрение обобщается на случай орбитального вырождения, аналогично рассмотрению Хаббарда [6]. Опять же, ситуация аналогична обычному квантованию Ландау в магнитном поле, где энергетические уровни становятся почти $\mathbf{k}$ -независимыми [21]. Однако в нашем случае мы имеем дело с квантованием для спинов, а не для свободных электронов, см. (3).

Топологическое взаимодействие можно рассматривать в рамках теории поля (см., напр., [22]). В $2 + 1$ мерном случае как квазичастицы, так и вихри являются частицами, так что имеется тесная аналогия с бозонной теорией Черна–Саймонса для квантового эффекта Холла, и мы можем присоединить поток и заряд к частицам таким образом, чтобы появились фазы Берри. Ситуация аналогична эффекту Ааронова–Бома [23], который может сопровождаться трансмутацией статистики фермион–бозон. Волновая функция приобретает хорошо определенную фазу Берри, которая дается интегралом по линии от связи Берри. Он может быть выражен как поверхностный интеграл от кривизны Берри. Инвариант Черна — это полный поток Берри в зоне Бриллюэна [16].

Квазичастичный ток единичного заряда j^μ и вихревой ток J^μ связаны с электрическими и магнитными компонентами потенциала a_μ и b_μ через лагранжиан Черна–Саймонса [22]:

$$L \frac{1}{\pi} \varepsilon^{\mu\nu\sigma} b_\mu \partial_\nu a_\sigma - a_\mu j^\mu - b_\mu J^\mu. \quad (6)$$

В $3 + 1$ измерениях вихри становятся струнами, а векторный потенциал b является антисимметричным тензором $b_{\mu\nu}$.

Указанные подходы относятся по существу к изоляторному случаю. Следует отметить, что переход Мотта может происходить при конечном допировании [2] (состояние изолятора при конечном допировании можно описать также в роторном представлении [24, 25]).

Согласно рассмотрению в работах [26, 27], вклады орбитальных токов возникают в высших порядках теории возмущений даже в изоляторной ситуации полузаполненной зоны. В этом контексте следует также упомянуть старые идеи экситонной конденсации [28] и тороидного упорядочения в кристаллах [29].

Однако более сильные эффекты могут быть вызваны фрустрациями из-за движения носителей тока [2]. Эти эффекты описываются скалярной спиновой киральностью $\chi_{ijk} = (\mathbf{S}_i[\mathbf{S}_j \times \mathbf{S}_k])$; отметим, что состояние $SU(2)$ [2] (уравнение (2)) не характеризуется киральностью, поскольку используется другой параметр порядка. Таким образом, в допированном случае должны возникать два канала, которые связаны с состояниями спинов (дробных степеней свободы) и электроновпроводимости.

Микроскопическое описание может быть получено в представлении допонов [30], которое использовалось в проблеме нодально-антинодальной дихотомии для купратов с высокими T_c [2]. Соответствующее выражение для оператора Хаббарда имеет вид

$$X_i(0, -\sigma) = -\frac{\sigma}{2\sqrt{2}} \sum_{\sigma'} d_{i\sigma'}^\dagger (1 - n_{i,-\sigma'}) [\delta_{\sigma\sigma'} - 2(\mathbf{S}_i \sigma_{\sigma'\sigma})], \quad (7)$$

где фермиевские операторы допонов $d_{i\sigma'}^\dagger$ описывают носители тока, а операторы спинов $\mathbf{S}_i$ — локализованные степени свободы; они могут быть представлены в терминах фермиевских или бозевских (швингеровских) спинов [30, 31].

Подставляя (7) в $t - J$ гамильтониан, мы получаем представление с киральными тенденциями (содержащий векторные произведения). Такое представление гамильтониана в узкозонной $s - d$ модели с произвольным спином S (также справедливое в ее частном случае — $t - J$ модели) было получено в [32].

Таким образом, исходная однозонная модель принимает форму эффективной двухзонной модели, как и в проблеме решетки Кондо. Здесь происходит орбитально-селективный (частичный) переход Мотта в одной полосе, который представляет собой квантованное изменение поверхности Ферми, то есть переход от большой к

малой поверхности Ферми [33], связанный с образованием хаббардовских подзон.

Спинон-допонное спаривание в допонном подходе [30] приводит к тем же фазам, что и конденсация голонов в формализме слейв-бозонов [2]. В этом смысле сверхпроводимость есть конденсация слейв-бозона или спинон-допонных пар. Согласно численным результатам, использующим методы точной диагонализации и численной ренормгруппы для матрицы плотности [14], в основном состоянии $t - J$ модели с периодическими и открытыми граничными условиями обнаруживаются нетривиальные многочастичные фазы типа Берри и спиновые токи. Они сопровождаются ненулевым полным импульсом или угловым моментом, связанным с допированной дыркой. Это определяет нетривиальное вырождение основного состояния.

Общий топологический анализ теоремы Латтинджера (который определяет объем поверхности Ферми) был выполнен Ошикавой [34] (см. также обсуждение в [35]). Он основан на аргументе баланса импульса, глобальной калибровочной $U(1)$ симметрии (сохранение заряда) и протягивании 2π -кванта потока. В силу циклических граничных условий система рассматривается как тор, в контурах которого возникает кристаллический импульс, что аналогично появлению силы Фарадея с изменением потока. Изменение кристаллического импульса, соответствующее введению потока, определяется числом точек в импульсном пространстве внутри поверхности Ферми. Каждый уровень “энергии Ландау” имеет вырождение $\Phi/(2\pi)$ в единицах кванта потока. Это вырождение равно числу состояний между двумя квантованными орбитами [21], в соответствии с уравнением (3).

Таким образом, если принять во внимание глобальные топологические возбуждения, нарушение теоремы Латтинджера, аналогичное состоянию дробного эффекта Холла, должно сопровождаться топологическим порядком в состоянии спиновой жидкости. Соответствующее экзотическое немагнитное состояние фракционизированной ферми-жидкости FL^* в двухзонной модели обладает малой поверхностью Ферми и может быть типа $U(1)$ или Z_2 [35]. Низкоэнергетические возбуждения состояния на торе задаются действием $S_{FL^*} = S_{FL} + S_{CS}$, которое является суммой действия для фермионных квазичастиц и топологического действия Черна—Саймонса [36].

Здесь возникает аналогия с такими явлениями, как образование парамагнитного состояния с квантово-неупорядоченными (фрустрированными) локальными моментами (что также означает неферми-жидкостное поведение) и расщепление Мотта—Хаббарда (теорема Ошикавы верна как

для изолятора, так и для металла, и даже в трехмерном случае; аналогичный более общий критерий изоляторного состояния, использующий топологический инвариант и оператор сдвига, дан в работе [37]).

Переход FL*—FL с ростом допирования наиболее удобно описывается в терминах фермионных спинов. С другой стороны, переход АФМ—FL* с ростом фрустрации использует бозонные спиноны (например, теория Венга [12] или подход швингеровских допонов [31]). При этом описание трансмутации нейтральных спиновых возбуждений фазы FL* из фермионов в бозоны по-прежнему отсутствует [38].

Переходя к заключению, отметим, что топологические эффекты и калибровочное поле тесно связаны с корреляционным хаббардовским расщеплением (по крайней мере, в двумерном случае) [39]. Фрустрации, создаваемые носителями тока, могут привести к образованию экзотических состояний с топологическим порядком и орбитальными степенями свободы. Эффективная двухзонная модель, включающая в себя спиноны и состояния электронов проводимости, позволяет получить соответствующее описание.

Исследование проводилось в рамках государственного задания ФАНО России (тема “Поток” № АААА-А18-118020190112-8 и тема “Квант” № АААА-А18-118020190095-4) при частичной поддержке гранта РФФИ № 17-52-52008.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Ирхин В.Ю., Скрябин Ю.Н. Современная физика конденсированного состояния: сильные корреляции и квантовая топология // ФММ. 2019. Т. 120. С. 563–600.
- Lee P.A., Nagaosa N., Wen X.-G. Doping a Mott insulator: Physics of high-temperature superconductivity // Rev. Mod. Phys. 2006. V. 78. P. 17.
- Hermele M., Senthil T., Fisher M.P.A. Algebraic spin liquid as the mother of many competing orders // Phys. Rev. B. 2005. V. 72. P. 104404.
- Senthil T., Lee P.A. Cuprates as doped U(1) spin liquids // Phys. Rev. B. 2005. V. 71. P. 174515.
- Hubbard J. Electron correlations in narrow energy bands // Proc. Roy. Soc. A. 1963. V. 276. P. 238.
- Hubbard J. Electron correlations in narrow energy bands // Proc. Roy. Soc. A. 1963. V. 277. P. 237.
- Anderson P.W. Theories of high-temperature superconductivity // Int. J. Mod. Phys. B. 1990. V. 4. P. 181.
- Wen X.G. Quantum Field Theory of Many-Body Systems — From the Origin of Sound to an Origin of Light and Electrons. Oxford University Press, 2004.
- Anderson P.W. Personal history of my engagement with cuprate superconductivity, 1986–2010 // Int. J. Mod. Phys. B. 2011. V. 25. № 1. P. 1–39.
- Levin M., Wen X.-G. Fermions, strings, and gauge fields in lattice spin models // Phys. Rev. B. 2003. V. 67. P. 245316.
- Berry M.V. Quantum phase-factor accompanying adiabatic changes // Proc. Royal Soc. London A. 1984. V. 392. P. 45–57.
- Ye P., Tian C.-Sh., Qi X.-L., Weng Zh. Electron fractionalization and unconventional order parameters of the $t - J$ model // Nucl. Phys. B. 2012. V. 854. P. 815.
- Weng Z.Y., Sheng D. N., Chen Y.-C., Ting C.S. Phase string effect in the $t - J$ Model: General Theory // Phys. Rev. B. 1997. V. 55. P. 3894.
- Zheng W., Zhu Zh., Sheng D.N., Weng Zh.Y. Hidden spin current in doped Mott antiferromagnets // Phys. Rev. B. 2018. V. 98. P. 165102.
- Xu. C., Sachdev S. Global phase diagrams of frustrated quantum antiferromagnets in two dimensions: doubled Chern-Simons theory // Phys. Rev. B. 2009. V. 79. P. 064405.
- Hasan M.Z., Kane C.L. Colloquium: Topological insulators // Rev. Mod. Phys. 2010. V. 82. P. 3045.
- Wen X.-G. Zoo of quantum-topological phases of matter // Rev. Mod. Phys. 2017. V. 89. P. 041004.
- Song X.-Y., He Y.-Ch., Vishwanath A., Wang Ch. From spinon band topology to the symmetry quantum numbers of monopoles in Dirac spin liquids // arXiv: 1811.11182.
- Song X.-Y., Wang Ch., Vishwanath A., He Y.-Ch. Unifying Description of Competing Orders in Two Dimensional Quantum Magnets // arXiv:1811.11186.
- Florens S., Georges A. Slave-rotor mean field theories of strongly correlated systems and the Mott transition in finite dimensions // Phys. Rev. B. 2004. V. 70. P. 035114.
- Займан Дж. Принципы теории твердого тела: Пер. с англ. М.: Мир, 1974.
- Hansson T.H., Oganessian V., Sondhi S.L. Superconductors are topologically ordered // Annals of Physics. 2004. V. 313. P. 497–538.
- Aharonov Y., Bohm D. Significance of electromagnetic potentials in quantum theory // Phys. Rev. 1959. V. 115. № 3. P. 485–491.
- Lee S.-S., Lee P.A. U (1) gauge theory of the Hubbard model: Spin liquid states and possible application to $\kappa - (\text{BEDT-TTF})_2\text{Cu}_2(\text{CN})_3$ // Phys. Lett. 2005. V. 95. P. 036403.
- Kim K.S. How to control pairing fluctuations: SU(2) slave-rotor gauge theory of the Hubbard model // Phys. Rev. B. 2007. V. 75. P. 245105.
- Bulaevskii L.N., Batista C.D., Mostovoy M., Khomskii D. Electronic orbital currents and polarization in Mott insulators // Phys. Rev. B. 2008. V. 78. P. 024402.
- Motrunich O. I. Orbital magnetic field effects in spin liquid with spinon Fermi sea: Possible application to $\kappa - (\text{ET})_2\text{Cu}_2(\text{CN})_3$ // Phys. Rev. B. 2008. V. 78. P. 024402.
- Vonsovsky S.V., Irkhin V.Yu., Katsnelson M.I. Exciton approach to the description of the antiferromagnetic ground state in the Heisenberg and Hubbard model // J. Magn. Magn. Mater. 1986. V. 58. P. 309–312.

29. *Конаев Ю. В.* Тороидные упорядочения в кристаллах // УФН. 2009. Т. 179. С. 1175–1190.
30. *Ribeiro T.C., Wen X.G.* Doped carrier formulation and mean-field theory of the $tt't''J$ model // Phys. Rev. B. 2006. V. 74. P. 155113.
31. *Punk M., Sachdev S.* Fermi surface reconstruction in hole-doped t-J models without long-range antiferromagnetic order // Phys. Rev. B. 2012. V. 85. P. 195123.
32. *Irkhin V.Yu., Irkhin Yu.P.* Many-electron operator approach in the solid state theory // Phys. Stat. Sol. (b). 1994. V. 183. P. 9–58.
33. *Vojta M.* Frustration and quantum criticality // Rep. Prog. Phys. 2018. V. 81. P. 064501.
34. *Oshikawa M.* Topological Approach to Luttinger's Theorem and the Fermi Surface of a Kondo Lattice // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 3370.
35. *Senthil T., Vojta M., Sachdev S.* Weak magnetism and non-Fermi liquids near heavy-fermion critical points // Phys. Rev. B. 2004. V. 69. P. 035111.
36. *Sachdev S., Chowdhury D.* The novel metallic states of the cuprates: Topological Fermi liquids and strange metals // Progr. Theor. Exper. Phys. 2016. V. 2016. P. 12C102.
37. *Hetenyi B.* dc conductivity as a geometric phase // Phys. Rev. B. 2013. V. 87. P. 235123.
38. *Sachdev S., Metlitski M.A., Punk M.* Antiferromagnetism in metals: from the cuprate superconductors to the heavy fermion materials // J. Phys.: Cond. Mat. 2012. V. 24. P. 294205.
39. *Irkhin V.Yu., Skryabin Yu.N.* Topological nature of Hubbard bands in strongly correlated systems // Physics Letters A. 2019. V. 383. P. 2974–2977.