ФИЗИКА МЕТАЛЛОВ И МЕТАЛЛОВЕДЕНИЕ, 2020, том 121, № 3, с. 257–269

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА

УДК 537.633

ЭЛЕКТРОННЫЙ СПИНОВЫЙ ТОК И СПИН-ЗАВИСИМЫЕ ГАЛЬВАНОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В МЕТАЛЛАХ

© 2020 г. В. В. Устинов[a, b, *], И. А. Ясюлевич[a]

[a]Институт физики металлов им. М.Н. Михеева УрО РАН, ул. С. Ковалевской, 18, Екатеринбург, 620108 Россия

[b]Институт естественных наук и математики УрФУ, ул. Куйбышева, 48, Екатеринбург, 620002 Россия

*e-mail: ustinov@imp.uran.ru

Поступила в редакцию 16.09.2019 г.
После доработки 03.10.2019 г.
Принята к публикации 10.10.2019 г.

На основе квантового кинетического уравнения получена система связанных кинетических уравнений для функции распределения электронной плотности и функции распределения спиновой плотности. Интегралы столкновений в кинетических уравнениях записаны для произвольного рассеивающего потенциала с учетом спин-орбитального взаимодействия электронов проводимости с рассеивающими дефектами. Применительно к спиновой системе электронов проводимости последовательно реализована идея "сокращенного" описания транспортных явлений. Описание системы на языке функций распределения, зависящих от квазиимпульса электронов, сводится к описанию на языке макроскопических средних величин: плотности электронов, спиновой плотности, потока электронов и спинового тока.

Ключевые слова: электрон, спин, спиновый ток, спиновая релаксация, электросопротивление, магнитосопротивление, эффект Холла, спиновый эффект Холла

DOI: 10.31857/S0015323020030079

ВВЕДЕНИЕ

Известные гальваномагнитные явления в металлах и полупроводниках – магниторезистивный эффект и эффект Холла – обусловлены влиянием магнитного поля **B** на движение электронов проводимости, вызываемое электрическим полем **E** [1]. Влияние магнитного поля на переносимый электронами электрический ток плотности **j** обусловлено силой Лоренца $e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$, которая действует на движущийся со скоростью **v** электрон, несущий на себе электрический заряд e. Исторически первая работа по наблюдению влияния магнитного поля на электрический ток была опубликована Эдвином Холлом еще в 1879 г. [2]. Эффект Холла проявляется как появление в образце электрического поля, перпендикулярного направлению пропускаемого через образец тока, при помещении образца в поперечное магнитное поле. Для реального образца конечных размеров эффект Холла приводит к появлению вблизи граней образца областей накопления электрического заряда, которые и являются источником поперечного электрического поля.

Помимо электрического заряда, электроны несут на себе собственный механический момент, спин и соответствующий ему магнитный момент. Спин-орбитальное взаимодействие электронов с кристаллической решеткой и ее дефектами ведет к тому, что электроны с разным значением проекции спина, участвующие в создании электрического тока, будут отклоняться в разные стороны перпендикулярно направлению плотности тока **j**. Это явление, получившее название спинового эффекта Холла, было теоретически предсказано Дьяконовым и Перелем в 1971 г. [3, 4]. В отличие от классического эффекта Холла [2], спиновый эффект Холла [3, 4] возникает при протекании тока в отсутствие какого-либо внешнего магнитного поля и проявляется в появлении вблизи граней образца областей аккумуляции неравновесной спиновой плотности. Наличие у электронов проводимости спина ведет естественным образом и к спиновой зависимости классического эффекта Холла. В работе [5] описан спин-зависящий классический эффект Холла без учета спин-орбитального взаимодействия – возбуждение электрическим током перпендикулярного ему спинового потока в геометрии классического эффекта Холла, когда поперечным к току магнитным полем создана спиновая поляризация Паули.

Спин-орбитальное взаимодействие в условиях протекания электрического тока в поперечном магнитном поле приводит к появлению спиновой аккумуляции вблизи граней образца, зависящей от величины магнитного поля. Как было показано в работе [6], приложенное магнитное поле уменьшает величину спиновой поляризации в области поверхностной аккумуляции, что в результате приводит к эффекту положительного магнитосопротивления. Этот эффект дает возможность изучать явление спиновой аккумуляции с помощью гальваномагнитных измерений.

Во всех вышеупомянутых гальваномагнитных эффектах магнитное поле $\mathbf{B}$ по умолчанию предполагается однородным. Между тем неоднородность магнитного поля может играть в спин-транспортных явлениях существенную роль. Отвлечемся (в дидактических целях) от квантовой природы спина и представим электрон как классическую частицу, обладающую магнитным моментом $\boldsymbol{\mu}$. Тогда при рассмотрении движения электрона в неоднородном магнитном поле мы должны принять во внимание действующую на него силу $\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B})$, равную с обратным знаком пространственному градиенту от энергии взаимодействия магнитного момента $\boldsymbol{\mu}$ с полем $\mathbf{B}$.

Здесь уместно будет упомянуть работу Штерна и Герлаха [7], в которой именно особенности движения частиц – носителей спина в неоднородном магнитном поле были использованы для доказательства квантовой природы спина.

В выполненных к настоящему времени работах по спин-зависящим гальваномагнитным явлениям вопросы учета неоднородностей магнитного поля рассматривали лишь фрагментарно. Поэтому сегодня актуальной задачей является построение квантовой теории спин-транспортных явлений, пригодной для описания спиновых токов и гальваномагнитных явлений в металлах и полупроводниках в неоднородных внешних полях с учетом спин-орбитальных взаимодействий.

Вопросы описания спиновых транспортных явлений в проводящих твердых телах составляют предмет многочисленных исследований в области спинтроники. Исследование эффектов, для которых понятие “спиновый ток” является ключевым, является одним из “горячих” направлений современной физики конденсированного состояния вещества. Здесь уместно будет сослаться на монографию [8], 25 глав которой дают полное представление о прогрессе в изучении эффектов, связанных со спиновыми токами, а также на коллективную монографию [9], в которой описан широкий круг спин-зависимых оптических, электрических и магнитных свойств полупроводников.

Главная задача настоящей работы – сформулировать основные уравнения для описания электрических и спиновых токов, протекающих в системе, помещенной в неоднородное магнитное поле. В случае, когда речь идет об электронах проводимости парамагнитных металлов и полупроводников, действующие на электрон силы могут создаваться неоднородным внешним магнитным полем. Если же нас интересует электронный спиновый транспорт в магнитоупорядоченных проводниках, в которых реализуется неоднородное магнитное состояние, то под неоднородным магнитным полем, действующем на спин электрона, можно понимать эффективное обменное поле, усредненное по элементарному объему магнетика и пропорциональное неоднородной спонтанной намагниченности вещества. Задача последнего раздела – дать описание спинового и электрического транспорта в киральных гелимагнетиках, где эффекты неоднородного магнитного состояния могут наблюдаться экспериментально.

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ. СПИНОВЫЙ ТОК

Последовательное описание транспорта заряда и спина в электронной системе в металлах и полупроводниках может быть реализовано с помощью аппарата квантового кинетического уравнения для квантовой функции распределения $\hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$, зависящей от координаты $\mathbf{r}$, электронного квазиимпульса $\mathbf{p}$ и времени t, но являющейся оператором в спиновом пространстве. Будучи квантовым обобщением хорошо известного и повсеместно применяемого уравнения Больцмана на случай наличия у носителей заряда спинового момента, квантовое кинетическое уравнение для $\hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$ является, возможно, наиболее простым и эффективным теоретическим инструментом для изучения транспорта заряда и спина в условиях, когда орбитальное движение электронов может быть рассмотрено на языке классической механики.

Итак, наша задача – описание кинетических явлений в системе электронов проводимости твердого тела, которые являются носителями электрического заряда e, а также спинового и связанного с ним магнитного момента $\boldsymbol{\mu}$. Величина магнитного момента μ определяется значением g-фактора электрона соотношением $\mu = g\mu_B/2$, где μ_B – магнетон Бора. Результатом решения поставленной задачи должны стать материальные уравнения – соотношения, связывающие потоки электрического заряда и спинового (магнитного) момента электронов с индуцирующими их внешними электрическим и магнитным полями.

Пусть $\varepsilon_\mathbf{p}$ – энергетический спектр электронов проводимости кристалла. Закон зависимости энергии $\varepsilon_\mathbf{p}$ от квазиимпульса $\mathbf{p}$ определяет скорость электрона $\mathbf{v} = (\partial/\partial\mathbf{p})\varepsilon_\mathbf{p}$. Пусть $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ – оператор магнитного момента электрона. Ниже мы будем использовать известное представление оператора $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ через спиновые матрицы Паули $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = -\mu\hat{\boldsymbol{\sigma}}. \qquad (1)$$

Поскольку квантовая функция распределения $\hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$ представляет собой оператор в спиновом пространстве, который может быть представлен как матрица по спиновым переменным, без каких-либо ограничений общности можно представить $\hat{f}$ в виде

$$\hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{p},t)=\frac{1}{2}n(\mathbf{r},\mathbf{p},t)+\frac{1}{2}\mathbf{s}(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}. \qquad (2)$$

Вновь введенные функции $n(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$ и $\mathbf{s}(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$ определяются следующими соотношениями:

$$n(\mathbf{r},\mathbf{p},t)=\mathrm{Tr}\hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{p},t), \qquad (3)$$

$$\mathbf{s}(\mathbf{r},\mathbf{p},t)=\mathrm{Tr}\hat{\boldsymbol{\sigma}}\hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{p},t). \qquad (4)$$

Здесь и ниже $\mathrm{Tr}\hat{M}$ – операция взятия следа (шпура) матрицы $\hat{M}$.

Функция $n(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$ имеет смысл функции распределения электронной плотности в импульсном пространстве. Суммируя $n(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$ по всем возможным $\mathbf{p}$, получаем величину $N(\mathbf{r},t)$ – плотность числа электронов в данной точке пространства в заданный момент времени:

$$N(\mathbf{r},t)=\sum_{\mathbf{p}}n(\mathbf{r},\mathbf{p},t). \qquad (5)$$

Просуммировав по всем $\mathbf{p}$ произведение $\mathbf{v}n(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$, получаем величину $\mathbf{I}(\mathbf{r},t)$ – плотность потока электронов в точке пространства $\mathbf{r}$ в момент времени t:

$$\mathbf{I}(\mathbf{r},t)=\sum_{\mathbf{p}}\mathbf{v}n(\mathbf{r},\mathbf{p},t). \qquad (6)$$

Произведение $eN(\mathbf{r},t)$ дает нам плотность электрического заряда, тогда как $e\mathbf{I}(\mathbf{r},t)$ суть плотность электрического тока $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$.

Введенная определением (4) функция $\mathbf{s}(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$ по аналогии с $n(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$ может быть названа функцией распределения спиновой плотности. Суммируя $\mathbf{s}(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$ по всем возможным $\mathbf{p}$, получаем величину $\mathbf{S}(\mathbf{r},t)$, которую ниже будем называть спиновой плотностью:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r},t)=\sum_{\mathbf{p}}\mathbf{s}(\mathbf{r},\mathbf{p},t). \qquad (7)$$

Просуммировав по $\mathbf{p}$ тензорное произведение векторов $\mathbf{v}\otimes\mathbf{s}(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$, получаем величину $\boldsymbol{J}(\mathbf{r},t)$, которую мы будем называть плотностью спинового тока:

$$\boldsymbol{J}(\mathbf{r},t)=\sum_{\mathbf{p}}\mathbf{v}\otimes\mathbf{s}(\mathbf{r},\mathbf{p},t). \qquad (8)$$

Здесь необходимо сделать одно важное замечание. При записи определения спинового тока (8) мы использования знак $\otimes$ для обозначения математической операции тензорного произведения векторов. В результате выполнения операции тензорного произведения векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{s}$ получается тензор – диада $\mathbf{v}\otimes\mathbf{s}$, который в матричном представлении имеет компоненты $(\mathbf{v}\otimes\mathbf{s})_{ij}=v_is_j$. Для обозначения тензоров мы будем использовать “наклонный жирный” шрифт, тогда как векторы будут обозначаться “прямым жирным” шрифтом. Таким образом, введенная нами величина $\boldsymbol{J}(\mathbf{r},t)$ – тензор плотности спинового тока. Произведение $\frac{\hbar}{2}\mathbf{S}(\mathbf{r},t)$ дает нам вектор плотности спинового момента электронов, тогда как $\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{J}(\mathbf{r},t)$ суть тензор плотности потока спинового момента электронов. Заметим здесь также, что введенная нами величина спиновой плотности $\mathbf{S}(\mathbf{r},t)$ имеет ту же самую размерность, что и электронная плотность $N(\mathbf{r},t)$. Аналогично, одинаковую размерность имеют плотность потока электронов $\mathbf{I}(\mathbf{r},t)$ и плотность спинового тока $\boldsymbol{J}(\mathbf{r},t)$.

Тензор спинового тока в конкретном базисе ортогональных единичных векторов $\{\mathbf{e}_i\}$, может быть представлен как $\boldsymbol{J}=J_{ij}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j$, где J_{ij} – координаты тензора спинового тока. Иногда вместо тензора $\boldsymbol{J}$ удобно использовать его проекции на орты $\{\mathbf{e}_i\}$. Этими проекциями могут быть либо три вектора $\mathbf{P}_i=\mathbf{e}_i\cdot\boldsymbol{J}$, либо тройка векторов $\mathbf{Q}_i=\boldsymbol{J}\cdot\mathbf{e}_i$. В матричном представлении $\mathbf{P}_i=J_{ij}\mathbf{e}_j$ и $\mathbf{Q}_j=J_{ij}\mathbf{e}_i$. Последние равенства показывают, что векторы $\mathbf{P}_i$ – это вектор-строки, а векторы $\mathbf{Q}_j$ – это вектор-столбцы матрицы J_{ij}, представляющей тензор $\boldsymbol{J}$. Вектор $\mathbf{P}_i$ по способу определения может быть назван поляризацией спинового тока, текущего в направлении i. Вектор $\mathbf{Q}_i$ характеризует направление, в котором течет компонента спиновой плотности S_i, и может быть назван потоком i-той компоненты спиновой плотности. Таким образом, получаем два альтернативных представления тензора спинового тока:

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}J_{11}&J_{12}&J_{13}\\J_{21}&J_{22}&J_{23}\\J_{31}&J_{32}&J_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{P}_1\\\mathbf{P}_2\\\mathbf{P}_3\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}J_{11}&J_{12}&J_{13}\\J_{21}&J_{22}&J_{23}\\J_{31}&J_{32}&J_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{Q}_1&\mathbf{Q}_2&\mathbf{Q}_3\end{bmatrix}.$$

Иллюстрация представления произвольного тензора спинового тока $\boldsymbol{J}$ на языке векторов $\mathbf{P}_i$ и $\mathbf{Q}_i$ дана на рис. 1. На рис. 2 приведены $\mathbf{P}$- и $\mathbf{Q}$-

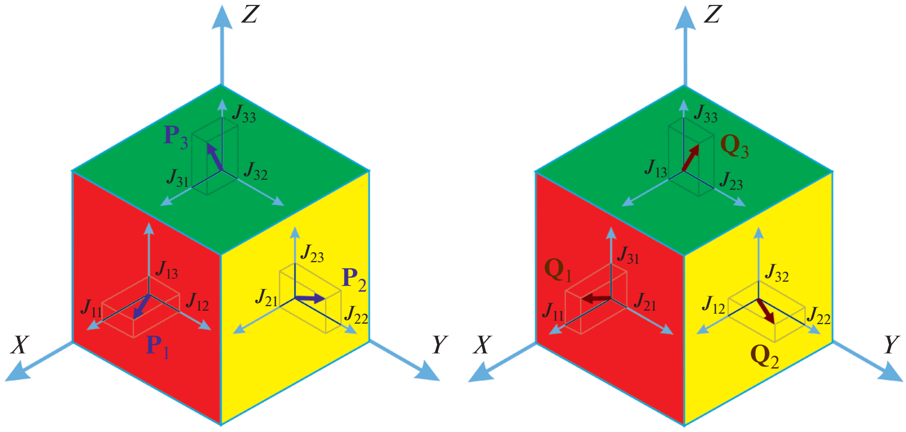

Рис. 1. Иллюстрация представления произвольного тензора спинового тока с компонентами J_{ij} на языке векторов поляризаций $\mathbf{P}_i$ спинового тока и векторов потоков компонент спиновой плотности $\mathbf{Q}_j$.

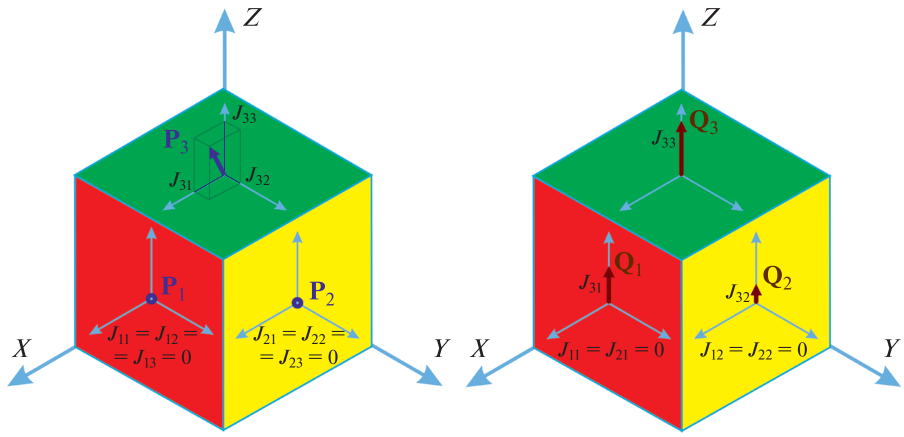

Рис. 2. Иллюстрация **P**- и **Q**-представлений тензора спинового тока, у которого отличны от нуля только компоненты одной z-строки ($i = 3$).

представления тензора спинового тока $\boldsymbol{J}$ для случая, когда отличны от нуля только три компоненты одной z-строки матрицы J_{ij}. В этом случае среди всех векторов $\mathbf{P}_i$ отличен от нуля только один вектор поляризации тока $\mathbf{P}_3$, который может иметь произвольное направление, а все три вектора $\mathbf{Q}_i$ направлены вдоль одной оси z.

КВАНТОВОЕ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Квантовое кинетическое уравнение для $\hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$ может быть получено последовательным образом из уравнения для одночастичного статистического оператора $\hat{\rho}$, удовлетворяющего уравнению фон Неймана

$$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}_0 + \hat{H}_E + \hat{H}_B + \hat{V}, \hat{\rho}\right] = 0, \qquad (9)$$

в котором $\hat{H}_0$ – оператор кинетической и потенциальной энергии электрона в поле идеальной кристаллической решетки, $\hat{H}_E = -e\mathbf{E}\cdot\mathbf{r}$ и $\hat{H}_B = \mu\mathbf{B}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ – операторы взаимодействия с электрическим полем напряженности $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ и магнитным полем индукции $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ соответственно. Оператор $\hat{V} = U - \frac{\hbar}{4m^2c^2}\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\left[\mathbf{p}\times\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}U\right]$ описывает спин-орбитальное взаимодействие электрона с рассеивателями – всевозможными дефектами кристаллической решетки, создающими потенциал U. Собственные значения гамильтониана $\hat{H}_0$ – суть энергетический спектр электрона $\varepsilon_{\mathbf{p}}$.

Квантовое кинетическое уравнение для $\hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$ может быть получено из (9) путем записи уравнения для оператора $\langle\hat{\rho}\rangle$, где скобки $\langle\ldots\rangle$ означают операцию усреднения по всем возможным конфигурациям рассеивающего потенциала $\hat{V}$. Последующий переход к квазиклассическому пределу в уравнении для $\langle\hat{\rho}\rangle$ при описании только орбитального движения электронов и дает интересующее нас квантовое кинетическое уравнение для $\hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$. Не имея возможности описать в данном сообщении детали этой довольно громоздкой процедуры, мы приведем здесь только конечное уравнение:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\hat{f}}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\hat{f}}{\partial\mathbf{r}}+\left(e\mathbf{E}+\frac{e}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]\right)\cdot\frac{\partial\hat{f}}{\partial\mathbf{p}}-\\-\mu\frac{\partial(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{B})}{\partial\mathbf{r}}\cdot\frac{\partial\hat{f}}{\partial\mathbf{p}}++\mu\frac{i}{\hbar}\left[\hat{\boldsymbol{\sigma}},\hat{f}\right]\cdot\mathbf{B}+\hat{R}=0.\end{gathered}\tag{10}$$

В уравнении (10) сумма второго и третьего члена – это квазиклассический предел квантовой скобки Пуассона $\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}_0+\hat{H}_E,\langle\hat{\rho}\rangle\right]$, тогда как сумма четвертого и пятого членов – это квазиклассический предел от $\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}_B,\langle\hat{\rho}\rangle\right]$. Последний член $\hat{R}$ – это квазиклассический предел усредненной по конфигурациям рассеивающего потенциала квантовой скобки Пуассона $\left\langle\frac{i}{\hbar}\left[\hat{V},\hat{\rho}\right]\right\rangle$. Этот член описывает релаксацию квантовой функции распределения $\hat{f}$ к своему локально-равновесному значению $\hat{f}_{\mathrm{L}}$ и выражается через отклонение $\delta\hat{f}=\hat{f}-\hat{f}_{\mathrm{L}}$.

Заметим, что сумма четвертого и пятого членов в уравнении (10) может быть записана как скалярное произведение векторного оператора $\hat{\mathbf{F}}=e\mathbf{E}+\frac{e}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]-\mu\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{B})$ и производной $\frac{\partial\hat{f}}{\partial\mathbf{p}}$. Последнее слагаемое в выражении для оператора $\hat{\mathbf{F}}$ можно трактовать как квантовую добавку к классической силе Лоренца $e\mathbf{E}+\frac{e}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]$, действующей на электрон в неоднородном поле в силу наличия у него спина.

Уравнение (10) для $\hat{f}$ с точностью до использованных обозначений совпадает с уравнением, приведенным в работах [10, 11], в которых интеграл столкновений $\hat{R}$ был записан феноменологически в приближении времени релаксации. В отличие от этих работ, мы в следующем разделе приведем строгий результат квантовомеханического рассмотрения интеграла столкновений, справедливый для любого рассеивающего потенциала $\hat{V}$. Отметим, что продуктивность идеи использования аппарата квантового кинетического уравнения для построения теории спин-транспортных явлений была продемонстрирована в работах [12, 13] по выводу граничных условий для функций распределения, описывающих спиновые процессы рассеяния электронов на дефектах поверхности металла.

Возьмем след от уравнения (10) и выполним ту же операцию после умножения уравнения (10) на $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, в результате получим систему связанных кинетических уравнений для функций распределения электронной плотности и спиновой плотности электронов:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}n+\mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}n+\left(e\mathbf{E}+\frac{e}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]\right)\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}n-\\-\mu\frac{\partial B_i}{\partial\mathbf{r}}\cdot\frac{\partial s_i}{\partial\mathbf{p}}+R=0,\end{gathered}\tag{11}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{s}+\mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\mathbf{s}+\left(e\mathbf{E}+\frac{e}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]\right)\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\mathbf{s}+\\+\frac{2\mu}{\hbar}[\mathbf{s}\times\mathbf{B}]-\mu\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}n\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\mathbf{B}+\mathbf{R}=0,\end{gathered}\tag{12}$$

где введены обозначения $R=\mathrm{Tr}\hat{R}$, $\mathbf{R}=\mathrm{Tr}\hat{\boldsymbol{\sigma}}\hat{R}$.

Кинетические уравнения (11), (12) необходимо использовать при описании транспортных свойств систем, в которых длина свободного пробега электронов проводимости сравнима или превышает характерный масштаб изменения полей $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$, а также характерные линейные размеры образца. В этом случае из уравнений (11), (12) после их решения будет получена существенно нелокальная связь потоков и полей. В обратном предельном случае, когда длина свободного пробега электронов является наименьшим параметром размерности длины, можно существенно упростить решение задачи, если перейти от описания системы на языке функций распределения к описанию на языке плотностей и потоков. Пренебрегая в этом случае пространственной дисперсией, исходя из уравнений (11), (12) для функций распределения, ниже мы получим замкнутую систему уравнений для плотностей $N(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{S}(\mathbf{r},t)$ и потоков $\mathbf{I}(\mathbf{r},t)$, $\boldsymbol{J}(\mathbf{r},t)$.

ПЕРЕХОД К “СОКРАЩЕННОМУ” ОПИСАНИЮ СПИНОВОЙ КИНЕТИКИ

В отсутствие внешних полей система находится в состоянии полного термодинамического равновесия и описывается статистическим оператором $\hat{f}_0=F(\varepsilon_{\mathbf{p}}-\zeta_0)$, где $F(\varepsilon)=1/(\exp(\varepsilon/k_{\mathrm{B}}T)+1)$ – функция Ферми, ζ_0 – химический потенциал, определяемый из условия $\sum_{\mathbf{p}}2F(\varepsilon_{\mathbf{p}}-\zeta_0)=N_0$, где N_0 – равновесная плотность электронов.

Определим мгновенное локально-равновесное значение квантовой функции распределения системы, помещенной в магнитное поле $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$, как оператор $\hat{f}_{\mathrm{L}}=F(\varepsilon_{\mathbf{p}}+\mu\mathbf{B}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}-\zeta_{\mathrm{L}})$. Здесь ζ_{L} – локальный химический потенциал, определяемый из условия $\sum_{\mathbf{p}} \mathrm{Tr} F\left(\varepsilon_{\mathbf{p}}+\mu \mathbf{B} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}-\zeta_{\mathrm{L}}\right)=N$. Считая энергию спинового расщепления μB и изменения химпотенциала $\zeta_{\mathrm{L}}-\zeta_0$ малыми по сравнению с энергией Ферми, запишем $\hat{f}_{\mathrm{L}}$ в линейном по внешним полям приближении как

$$\begin{gathered}\hat{f}_{\mathrm{L}}=F\left(\varepsilon_{\mathbf{p}}-\zeta_0\right)+\\ +F'\left(\varepsilon_{\mathbf{p}}-\zeta_0\right)\left(\mu \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{B}-\left(\zeta_{\mathrm{L}}-\zeta_0\right)\right),\end{gathered} \tag{13}$$

где $F'(\varepsilon)$ – производная функции $F(\varepsilon)$. Соответствующая этому состоянию спиновая функция распределения $\mathbf{s}_{\mathrm{L}}(\mathbf{r},\mathbf{p},t)=2F'\left(\varepsilon_{\mathbf{p}}-\zeta_0\right)\mu\mathbf{B}$, тогда как спиновая плотность $\boldsymbol{S}_{\mathrm{L}}(\mathbf{r},t)=2\sum_{\mathbf{p}} F'\left(\varepsilon_{\mathbf{p}}-\zeta_0\right)\mu\mathbf{B}$. Локально равновесная спиновая функция распределения $\mathbf{s}_{\mathrm{L}}(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$ может быть выражена через спиновую плотность $\mathbf{S}_{\mathrm{L}}$ соотношением

$$\begin{gathered}s_{\mathrm{L}}(\mathbf{r},\mathbf{p},t)=\\ =F'\left(\varepsilon_{\mathbf{p}}-\zeta_0\right)\left[\sum_{\mathbf{p}} F'\left(\varepsilon_{\mathbf{p}}-\zeta_0\right)\right]^{-1} \mathbf{S}_{\mathrm{L}}(\mathbf{r},t).\end{gathered} \tag{14}$$

Локальное изменение химпотенциала $\zeta_{\mathrm{L}}-\zeta_0$ определяет отклонение локально-равновесной функции распределения числа частиц $n_{\mathrm{L}}(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$ от равновесного значения $n_0=2F\left(\varepsilon_{\mathbf{p}}-\zeta_0\right)$ как $n_{\mathrm{L}}-n_0=-2F'\left(\varepsilon_{\mathbf{p}}-\zeta_0\right)\left(\zeta_{\mathrm{L}}-\zeta_0\right)$. Это отклонение выражается через отклонение локальной плотности электронов N от N_0 соотношением

$$\begin{gathered}n_{\mathrm{L}}(\mathbf{r},\mathbf{p},t)-n_0=\\ =F'\left(\varepsilon_{\mathbf{p}}-\zeta_0\right)\left[\sum_{\mathbf{p}} F'\left(\varepsilon_{\mathbf{p}}-\zeta_0\right)\right]^{-1}\left[N(\mathbf{r},t)-N_0\right].\end{gathered} \tag{15}$$

Переход от описания системы на языке функций распределения к “сокращенному” описанию на языке плотностей и потоков подразумевает возможность непосредственного выражения функций распределения через плотности и потоки.

“Сокращенное” представление $\hat{f}_{\mathrm{R}}$ оператора $\hat{f}$ мы определим формальным операторным уравнением $\hat{f}_{\mathrm{R}}=F\left(\varepsilon_{\mathbf{p}-\hat{\boldsymbol{\pi}}}+\mu \mathbf{B} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}-\hat{\zeta}\right)$, в котором $\hat{\zeta}$ описывает локальные изменения энергии электронов из-за изменения плотностей $N(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{S}(\mathbf{r},t)$, а вектор $\hat{\boldsymbol{\pi}}$ определяет локальный сдвиг распределения квантовой функции распределения в импульсном пространстве, обусловленный потоками заряда и спина $\mathbf{I}(\mathbf{r},t)$, $\boldsymbol{J}(\mathbf{r},t)$. В линейном по внешним полям приближении для $\hat{f}_{\mathrm{R}}$ получаем уравнение

$$\begin{gathered}\hat{f}_{\mathrm{R}}=F\left(\varepsilon_{\mathbf{p}}-\zeta_0\right)+F'\left(\varepsilon_{\mathbf{p}}-\zeta_0\right)\times\\ \times\left(\mu \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{B}-\left(\hat{\zeta}-\zeta_0\right)-\mathbf{v} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}}\right).\end{gathered} \tag{16}$$

Химпотенциал ζ и векторный оператор $\hat{\boldsymbol{\pi}}$ определяются из уравнений

$$\begin{gathered}N=\sum_{\mathbf{p}} \mathrm{Tr} \hat{f}_{\mathrm{R}}, \quad \mathbf{S}=\sum_{\mathbf{p}} \mathrm{Tr} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \hat{f}_{\mathrm{R}}, \\ \mathbf{I}=\sum_{\mathbf{p}} \mathrm{Tr} \mathbf{v} \hat{f}_{\mathrm{R}}, \quad \boldsymbol{J}=\sum_{\mathbf{p}} \mathrm{Tr} \mathbf{v} \otimes \hat{\boldsymbol{\sigma}} \hat{f}_{\mathrm{R}}.\end{gathered} \tag{17}$$

После нахождения из уравнений (16), (17) операторов $\hat{\zeta}$ и $\hat{\boldsymbol{\pi}}$ получаем выражение для $\hat{f}_{\mathrm{R}}$:

$$\hat{f}_{\mathrm{R}}=\frac{1}{2} n_{\mathrm{R}}+\frac{1}{2} \mathbf{s}_{\mathrm{R}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \tag{18}$$

$$n_{\mathrm{R}}=2F+F'\left[\sum_{\mathbf{p}} F'\right]^{-1}\left[N-N_0+\frac{1}{\overline{v_E^2}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{I}\right], \tag{19}$$

$$\mathbf{s}_{\mathrm{R}}=F'\left[\sum_{\mathbf{p}} F'\right]^{-1}\left[\mathbf{S}+\frac{1}{\overline{v_E^2}} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{J}\right], \tag{20}$$

где $\overline{v_E^2}=\sum_{\mathbf{p}} v_E^2 F'\left[\sum_{\mathbf{p}} F'\right]^{-1}$, $\mathbf{v}_E$ – проекция скорости электрона на направление электрического поля. При получении соотношений (19), (20) для простоты мы считали спектр $\varepsilon_{\mathbf{p}}$ электронов изотропным. Далее мы будем считать спектр $\varepsilon_{\mathbf{p}}$ изотропным и квадратичным, введя в рассмотрение эффективную массу электронов m.

Перейдем теперь непосредственно к получению уравнений для плотностей и токов из уравнений (11), (12) для функций распределения. Просуммируем по $\mathbf{p}$ уравнения (11) и (12), а затем просуммируем эти же уравнения после умножения их на скорость $\mathbf{v}$, в результате получим систему уравнений вида

$$\frac{\partial}{\partial t} N+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{I}+\sum_{\mathbf{p}} R=0, \tag{21}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{S}+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{J}+\left[\mathbf{S} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{L}}\right]+\sum_{\mathbf{p}} \mathbf{R}=0, \tag{22}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{I}+\sum_{\mathbf{p}} \mathbf{v}\left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} n\right)-\frac{e}{m} \mathbf{E} N-\left[\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{C}} \times \mathbf{I}\right]+\\ +\frac{\mu}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \otimes \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}+\sum_{\mathbf{p}} \mathbf{v} R=0,\end{gathered} \tag{23}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{J}+\sum_{\mathbf{p}} \mathbf{v} \otimes\left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{s}\right)-\frac{e}{m} \mathbf{E} \otimes \mathbf{S}-\\ -\left[\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{C}} \times \boldsymbol{J}\right]+\left[\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{L}}\right]+\\ +\frac{\mu}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \otimes \mathbf{B} N+\sum_{\mathbf{p}} \mathbf{v} \otimes \mathbf{R}=0,\end{gathered} \tag{24}$$

где введены обозначения $\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{L}}=\frac{2\mu}{\hbar} \mathbf{B}$ и $\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{C}}=\frac{|e|}{mc} \mathbf{B}$. Величина Ω_{L} – это Ларморовская частота, характеризующая прецессионное движение спина электронов, тогда как Ω_{C} – циклотронная частота, отвечающая движению электрона по циклотронным орбитам вследствие действия на заряд электрона силы Лоренца.

Система уравнений (21)–(24) не является замкнутой, поскольку вторые слагаемые в левых частях уравнений (23) и (24) выражаются через свертку функций распределения с квадратичными комбинациями вектора скорости электрона. Чтобы замкнуть систему уравнений, мы при вычислении вышеуказанных слагаемых пренебрежем отличием функций распределения n и $\mathbf{s}$ от функций n_{R} и $\mathbf{s}_{\mathrm{R}}$, определенных уравнениями (19) и (20) соответственно. В результате получаем

$$\sum_{\mathbf{p}} \mathbf{v}\left(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} n\right) = \overline{v_E^2}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} N, \tag{25}$$

$$\sum_{\mathbf{p}} \mathbf{v}\otimes\left(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{s}\right) + \frac{\mu}{m}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\otimes \mathbf{B}N = \\ = \overline{v_E^2}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\otimes(\mathbf{S}-\mathbf{S}_{\mathrm{L}}) + \frac{\mu}{m}(N-N_0)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\otimes\mathbf{B}. \tag{26}$$

Аналогично мы поступим и при вычислении сумм по квазиимпульсам от интегралов столкновений R и $\mathbf{R}$.

ИНТЕГРАЛ СТОЛКНОВЕНИЙ

Дальнейшее рассмотрение требует конкретизации вида интегралов столкновений R и $\mathbf{R}$. Можно показать, что описывающий релаксацию интеграл столкновений $\hat{R}$ может быть записан в следующем виде:

$$\hat{R} = \frac{i}{\hbar}\left\{\left\langle \hat{T}^{+}_{\mathbf{pp}}(\varepsilon_{\mathbf{p}})\right\rangle \delta\hat{f}_{\mathbf{p}} - \delta\hat{f}_{\mathbf{p}}\left\langle \hat{T}^{-}_{\mathbf{pp}}(\varepsilon_{\mathbf{p}})\right\rangle\right\} - \\ - \frac{2\pi}{\hbar}\sum_{\mathbf{p}'}\left\langle \hat{T}^{+}_{\mathbf{pp}'}(\varepsilon_{\mathbf{p}})\,\delta\hat{f}_{\mathbf{p}'}\hat{T}^{-}_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}(\varepsilon_{\mathbf{p}})\right\rangle \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{p}'}), \tag{27}$$

где $\delta\hat{f}_{\mathbf{p}} \equiv \delta\hat{f}(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$, $\hat{T}^{\pm}_{\mathbf{pp}'}(E)$ – матричные элементы оператора амплитуды рассеяния, который определяется рассеивающим потенциалом $\hat{V}$ и находится как решение уравнения Липпмана–Швингера

$$\hat{T}^{\pm}(E) = \hat{V} + \hat{V}\left(E - \hat{H}_0 \pm i0\right)^{-1}\hat{T}^{\pm}(E). \tag{28}$$

Первое слагаемое в (27), выражающееся через $\delta\hat{f}_{\mathbf{p}}$, – это так называемый “уходный” член интеграла стокновений, описывающий уход электронов из состояния $\mathbf{p}$ во все возможные состояния при рассеянии на потенциале $\hat{V}$. Второе слагаемое в (27), выражающееся через сумму по $\mathbf{p}'$ от слагаемых, содержащих $\delta\hat{f}_{\mathbf{p}'}$, – это так называемый “приходный” член интеграла столкновений, описывающий приход электронов в состояние $\mathbf{p}$ из всех других состояний $\mathbf{p}'$.

Мы ограничимся здесь рассмотрением случая, когда рассеиватели электронов, формирующие потенциал $\hat{V}$ и определяющие вид оператора амплитуды рассеяния $\hat{T}$, не обладают собственным спином. Некоторые важные данные о структуре оператора $\hat{T}$ можно получить путем анализа свойств симметрии взаимодействия $\hat{V}$, поскольку амплитуду рассеяния можно представить в виде матричного элемента оператора рассеяния, а свойства симметрии оператора $\hat{T}$ совпадают со свойствами симметрии гамильтониана системы. Гамильтониан рассматриваемой системы предполагаем инвариантым относительно произвольных поворотов и пространственной инверсии. Следовательно, и оператор амплитуды рассеяния должен быть инвариантен относительно этих преобразований. Опираясь на эти фундаментальные свойства оператора $\hat{T}$, найдем его общий вид. Поскольку $\hat{T}$ является оператором в пространстве спиновых функций, его всегда можно представить в виде линейной комбинации матриц Паули $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ и единичного оператора:

$$\hat{T} = A + \mathbf{C}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}. \tag{29}$$

В разложении (29) величины A и $\mathbf{C}$ являются комплексно-значными функциями квазиимпульсов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$. Оператор амплитуды рассеяния $\hat{T}$ будет инвариантом произвольного поворота и инверсии только в том случае, если A будет скаляром, а величина $\mathbf{C}$ – некоторым псевдовектором.

Введем в рассмотрение три единичных вектора:

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{p}\times\mathbf{p}'}{|\mathbf{p}\times\mathbf{p}'|},\quad \mathbf{c}_{+} = \frac{\mathbf{p}+\mathbf{p}'}{|\mathbf{p}+\mathbf{p}'|},\quad \mathbf{c}_{-} = \frac{\mathbf{p}-\mathbf{p}'}{|\mathbf{p}-\mathbf{p}'|}. \tag{30}$$

Векторы $\mathbf{c}$, $\mathbf{c}_{+}$, $\mathbf{c}_{-}$ попарно ортогональны, а поэтому могут быть взяты в качестве базиса трехмерного пространства. Тогда вектор $\mathbf{C}$ можно представить в виде разложения $\mathbf{C} = C\mathbf{c} + C_{+}\mathbf{c}_{+} + C_{-}\mathbf{c}_{-}$, где C, C_{+}, C_{-} – некоторые скалярные или псевдоскалярные функции $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$. При инверсии векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ изменяют знак, а поэтому изменяют знак также векторы $\mathbf{c}_{+}$ и $\mathbf{c}_{-}$. Поэтому из инвариантности оператора $\hat{T}$ относительно пространственной инверсии следует, что $C_{+} = 0$, $C_{-} = 0$, а зависящие от $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ величины A и C – скаляры. Эти функции зависят от $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ только через скалярные комбинации $\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}$, $\mathbf{p}'\cdot\mathbf{p}'$ и $\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}'$, т.е. являются функциями энергии и угла рассеяния – угла между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$. Таким образом, оператор амплитуды рассеяния имеет следующий общий вид:

$$\hat{T} = A + C(\mathbf{c}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}), \tag{31}$$

где $\mathbf{c}$ – единичный вектор нормали к плоскости рассеяния, определяемый первым из выражений (30).

Можно показать, что определяющие оператор $\hat{T}$ величины A и C связаны следующим соотношением, которое известно как “оптическая теорема”:

$$-\frac{2}{\hbar}\mathrm{Im}A_{\mathbf{pp}} = \frac{2\pi}{\hbar}\sum_{\mathbf{p}'}\left(\left|A_{\mathbf{pp}'}\right|^2 + \left|C_{\mathbf{pp}'}\right|^2\right)\delta\left(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{p}'}\right). \quad (32)$$

С использованием определения (27) для оператора интеграла столкновений $\hat{R}$, уравнений (31) и (32), интегралы столкновений $R = \mathrm{Tr}\hat{R}$ и $\mathbf{R} = \mathrm{Tr}\hat{\boldsymbol{\sigma}}\hat{R}$ можно представить в виде:

$$R = \sum_{\mathbf{p}'}\Big\{\left(W_{\mathbf{pp}'}^{(\mathrm{nsf})} + W_{\mathbf{pp}'}^{(\mathrm{sf})}\right)\left(\delta n_{\mathbf{p}} - \delta n_{\mathbf{p}'}\right) - -2\mathrm{Re}\,W_{\mathbf{pp}'}^{(\mathrm{as})}\left(\mathbf{c}\cdot\delta \boldsymbol{s}_{\mathbf{p}'}\right)\Big\}; \quad (33)$$

$$\mathbf{R} = \sum_{\mathbf{p}'}\Big\{\left(W_{\mathbf{pp}'}^{(\mathrm{nsf})} + W_{\mathbf{pp}'}^{(\mathrm{sf})}\right)\left(\delta\mathbf{s}_{\mathbf{p}} - \delta\mathbf{s}_{\mathbf{p}'}\right) + + 2W_{\mathbf{pp}'}^{(\mathrm{sf})}\left(\delta \boldsymbol{s}_{\mathbf{p}'} - \mathbf{c}\left(\mathbf{c}\cdot\delta \boldsymbol{s}_{\mathbf{p}'}\right)\right) - 2\mathrm{Re}\,W_{\mathbf{pp}'}^{(\mathrm{as})}\left(\mathbf{c}\cdot\delta n_{\mathbf{p}'}\right) - - 2\mathrm{Im}\,W_{\mathbf{pp}'}^{(\mathrm{as})}\left[\mathbf{c}\times\delta \boldsymbol{s}_{\mathbf{p}'}\right]\Big\}. \quad (34)$$

При записи интегралов столкновений (33), (34) мы для краткости использовали обозначения $\delta n_{\mathbf{p}}$ и $\delta\mathbf{s}_{\mathbf{p}}$ для функций $\delta n(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$ и $\delta\mathbf{s}(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$ соответственно, а также ввели следующие величины:

$$W_{\mathbf{pp}'}^{(\mathrm{nsf})} = \frac{2\pi}{\hbar}\left\langle\left|A_{\mathbf{pp}'}\right|^2\right\rangle\delta\left(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{p}'}\right), \quad (35)$$

$$W_{\mathbf{pp}'}^{(\mathrm{sf})} = \frac{2\pi}{\hbar}\left\langle\left|C_{\mathbf{pp}'}\right|^2\right\rangle\delta\left(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{p}'}\right), \quad (36)$$

$$W_{\mathbf{pp}'}^{(\mathrm{as})} = \frac{2\pi}{\hbar}\left\langle A_{\mathbf{pp}'}C_{\mathbf{pp}'}^{*}\right\rangle\delta\left(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{p}'}\right). \quad (37)$$

Величина $W_{\mathbf{pp}'}^{(\mathrm{nsf})}$ имеет смысл дифференциальной вероятности рассеяния электрона без изменения спинового состояния (non spin-flip) из состояния с квазиимпульсом $\mathbf{p}'$ в состояние с квазиимпульсом $\mathbf{p}$ за единицу времени, тогда как $W_{\mathbf{pp}'}^{(\mathrm{sf})}$ – это дифференциальная вероятность рассеяния с переворотом спина (spin-flip) за единицу времени. Величина $W_{\mathbf{pp}'}^{(\mathrm{as})}$ характеризует асимметричное, так называемое “косое” (askew) спиновое рассеяние, является комплексно-значной функцией квазиимпульсов электрона до и после рассеяния и поэтому не имеет простого смысла вероятности какого-либо процесса. Суммируя дифференциальную вероятность $W_{\mathbf{pp}'}^{(\mathrm{sf})}$ рассеяния электрона из состояния с квазиимпульсом $\mathbf{p}'$ в состояние с квазиимпульсом $\mathbf{p}$ за единицу времени с переворотом спина по всем возможным состояниям электрона $\mathbf{p}$ после рассеяния, получаем интегральную вероятность рассеяния из состояния с квазиимпульсом $\mathbf{p}'$ за единицу времени с переворотом спина

$$w_{\mathbf{p}'}^{(\mathrm{sf})} = \sum_{\mathbf{p}} W_{\mathbf{pp}'}^{(\mathrm{sf})}. \quad (38)$$

Интегральную вероятность изменения орбитального состояния электрона с квазиимпульсом $\mathbf{p}'$, от величины которой будут зависеть транспортные характеристики электронной системы, определим как

$$w_{\mathbf{p}'}^{(\mathrm{tr})} = \sum_{\mathbf{p}}\left[W_{\mathbf{pp}'}^{(\mathrm{nsf})} + W_{\mathbf{pp}'}^{(\mathrm{sf})}\right]\left[1 - \cos\left(\mathbf{p},\ \mathbf{p}'\right)\right]. \quad (39)$$

Интегральная вероятность процессов “косого” спинового рассеяния из состояния $\mathbf{p}'$ характеризуется величиной

$$w_{\mathbf{p}'}^{(\mathrm{as})} = \sum_{\mathbf{p}}\frac{pp'}{\left|\mathbf{p}\times\mathbf{p}'\right|}\mathrm{Re}\,W_{\mathbf{pp}'}^{(\mathrm{as})}. \quad (40)$$

БАЗОВЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ПЛОТНОСТЕЙ И ПОТОКОВ

Подставим (33), (34) в уравнения (21)–(24), с использованием соотношений (25), (26) и определений (35)–(40), после выполнения всех суммирований получим искомую систему уравнений для плотностей и потоков:

$$\frac{\partial}{\partial t}N + \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\cdot\mathbf{I} = 0; \quad (41)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\cdot\boldsymbol{J} + \left[\mathbf{S}\times\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{L}}\right] + \frac{1}{\tau_{\mathrm{S}}}\delta\mathbf{S} = 0; \quad (42)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{I} + \overline{v_E^2}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\delta N - \frac{e}{m}\mathbf{E}N - \left[\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{C}}\times\mathbf{I}\right] + + \frac{\mu}{m}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\otimes\mathbf{B}\cdot\mathbf{S} + \frac{1}{\tau_{\mathrm{O}}}\mathbf{I} + \frac{1}{\tau_{\mathrm{SO}}}\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{J} = 0; \quad (43)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{J} + \overline{v_E^2}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\otimes\delta\mathbf{S} - \frac{e}{m}\mathbf{E}\otimes\mathbf{S} - \left[\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{C}}\times\boldsymbol{J}\right] + + \left[\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{L}}\right] + \frac{\mu}{m}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\otimes\mathbf{B}\delta N + \frac{1}{\tau_{\mathrm{O}}}\boldsymbol{J} + \frac{1}{\tau_{\mathrm{SO}}}\boldsymbol{e}\cdot\mathbf{I} = 0. \quad (44)$$

Здесь введены следующие величины, характеризующие скорость различных процессов релаксации:

– скорость релаксации спина $1/\tau_{\mathrm{S}}$ (как характеристика процессов рассеяния с переворотом спина)

$$\frac{1}{\tau_{\mathrm{S}}} = 2\overline{w_{\mathbf{p}}^{(\mathrm{sf})}}; \quad (45)$$

— скорость релаксации импульса $1/\tau_O$ (как характеристика влияния рассеяния на изменение орбитального движения электронов, определяющее их транспортные свойства):

$$\frac{1}{\tau_O} = \overline{v^2 w_{\mathbf{p}}^{(tr)}} \Big/ \overline{v^2}; \qquad (46)$$

— скорость релаксации, обусловленной "косым" рассеянием электронов $1/\tau_{SO}$ (как характеристика интенсивности асимметричного спин-орбитального рассеяния)

$$\frac{1}{\tau_{SO}} = \frac{2}{3}\overline{v^2 w_{\mathbf{p}}^{(as)}} \Big/ \overline{v^2}. \qquad (47)$$

В определениях (45)–(47) чертой над функцией обозначена операция ее усреднения по $\mathbf{p}$ с весом F: $\overline{(\ldots)} = \sum_{\mathbf{p}} (\ldots) F' \Big/ \sum_{\mathbf{p}} F'$, а величина $\boldsymbol{e}$ в уравнениях (43), (44) есть абсолютно антисимметричный единичный тензор 3-го ранга.

Легко видеть, что уравнение (41) не что иное, как уравнение непрерывности для потока электронов. Наличие в левой части этого уравнения двух членов отражает выполнение закона сохранения числа частиц: скорость изменения плотности частиц в данной точке равна с обратным знаком дивергенции вектора плотности потока частиц в этой точке.

Уравнение (42) — известное уравнение движения для спиновой плотности, которое также можно рассматривать как уравнение непрерывности для спинового тока, однако в этом уравнении заложена возможность диссипации спина, которая описывается последним членом в левой части уравнения. Скорость спиновой релаксации электронов проводимости $1/\tau_S$ и, соответственно, время спиновой релаксации τ_S определяются, как можно видеть из уравнений (45) и (36), процессами рассеяния с переворотом спина. Третий член в левой части (42) описывает прецессионное движение электронов с частотой Ω_L. Второй член отвечает за локальное изменение спиновой плотности, обусловленное переносом спина, который имеет место при протекании спинового тока $\boldsymbol{J}$ из одной области пространства с фиксированной спиновой плотностью в другую область, имеющую иную по величине или направлению спиновую плотность. В силу малости времени релаксации квазиимпульса τ_O по сравнению с временем спиновой релаксации τ_S, описанное выше движение спина электрона можно описывать как диффузионный процесс. При этом коэффициент спиновой диффузии определяется как $D = \overline{v_E^2}\tau_O$.

Уравнение (43) — уравнение для нахождения вектора плотности потока электронов или связанного с ним вектора плотности электрического тока $\mathbf{j} = e\mathbf{I}(\mathbf{r}, t)$ при заданных полях $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. Второй член в левой части описывает диффузионную компоненту потока частиц, величина которой определяется коэффициентом диффузии $D = \overline{v_E^2}\tau_O$. Третий член описывает ток проводимости, индуцируемый полем $\mathbf{E}$, величина которого определяется удельной электропроводностью металла $\sigma = Ne^2\tau_O/m$. Четвертый описывает изменение плотности электрического тока из-за действия силы Лоренца, заставляющей электроны двигаться по циклотронным орбитам с частотой Ω_C и приводящей к появлению эффекта Холла. Пятое слагаемое учитывает изменение проводимости металла из-за зависимости действующего в металле магнитного поля от координат. Именно этот вклад определяет новые эффекты в проводимости неоднородно-намагниченных проводников. Шестое слагаемое описывает скорость изменения орбитального состояния электронов, определяемую транспортным временем релаксации импульса τ_O. Наконец, последнее слагаемое в левой части уравнения (43) отвечает за учет асимметричного спинового рассеяния электронов, интенсивность которого задается временем релаксации τ_{SO}. Это слагаемое, как и последний член в левой части уравнения (44), описывает специфические особенности физического явления, получившего название "спиновый эффект Холла".

Уравнение (44) — уравнение для нахождения тензора спинового тока $\boldsymbol{J}$. Второй член в левой части (44) описывает диффузионную компоненту потока спина, величина которой определяется коэффициентом диффузии спина $D = \overline{v_E^2}\tau_O$. Третий член описывает эффекты дрейфа спиновой плотности под действием электрического поля. Четвертое слагаемое, векторное произведение вектора $\mathbf{\Omega}_C$ и тензора спинового тока $\boldsymbol{J}$, описывает влияние силы Лоренца, аналогично четвертому члену уравнения (43). Пятый член, векторное произведение тензора спинового тока $\boldsymbol{J}$ и вектора $\mathbf{\Omega}_L$, описывает спиновую прецессию движущихся электронов. Шестое слагаемое описывает влияние неоднородностей магнитного поля на спиновый транспорт, а седьмое учитывает затухание спинового тока со скоростью релаксации импульса $1/\tau_O$. Последний член в левой части (44), как уже отмечалось, отражает существование спинового эффекта Холла.

СПИНОВЫЙ ТРАНСПОРТ В КИРАЛЬНЫХ ГЕЛИМАГНЕТИКАХ

Для иллюстрации влияния неоднородного магнитного поля на спиновый транспорт применим полученные уравнения для описания транспортных свойств киральных гелимагнетиков. Интерес к спиновому транспорту в киральных гелимагнетиках обусловлен возможностью использования их уникальных свойств при создании магнитокиральных наноструктур для применений в спинтронике [14–16].

Пусть ось простой магнитной спирали гелимагнетика и электрическое поле $\mathbf{E}$ направлены вдоль оси OZ: $\mathbf{E} = E_z\mathbf{e}_z$. Помимо внешнего магнитного поля на электронные спины действует эффективное магнитное поле обменного происхождения $\mathbf{H}^{(ex)}$. Для геликоидального магнетика со спиновым упорядочением типа "простая спираль" поле $\mathbf{H}^{(ex)}$ может быть представлено в виде $\mathbf{H}^{(ex)}(z) = H^{(ex)}\mathbf{h}(z)$, где $H^{(ex)}$ – величина обменного поля, $\mathbf{h}(z)$ – единичный вектор, характеризующий направление $\mathbf{H}^{(ex)}(z)$ в плоскости xy в точке z. Введем в рассмотрение вектор производной вектора $\mathbf{H}^{(ex)}(z)$ по координате z, $\mathbf{H}^{(ex)\prime}(z) \equiv (d/dz)\mathbf{H}^{(ex)}(z)$, и единичный вектор $\mathbf{h}'(z) = \mathbf{H}^{(ex)\prime}(z)\Big/\left|\mathbf{H}^{(ex)\prime}(z)\right|$, задающий направление вектора $\mathbf{H}^{(ex)\prime}(z)$. Полагая, что компоненты вектора $\mathbf{h}(z)$ изменяются по гармоническому закону, $h_x(z) \sim \cos qz$, $h_y(z) \sim \sin qz$, где $\mathbf{q}$ – волновой вектор магнитной спирали, получаем, что единичные вектора $\mathbf{h}(z)$ и $\mathbf{h}'(z)$ взаимно ортогональны в каждой точке z. Направление "закручивания" спирали однозначно определяется вектором $\mathbf{k} = [\mathbf{h} \times \mathbf{h}']$, который мы будем называть вектором киральности магнитной спирали.

Для наглядности изложения при записи системы уравнений (41)–(44) применительно к гелимагнетикам мы будем полагать, что внешнее магнитное поле отсутствует, полагая $\mathbf{\Omega}_\mathrm{C} = 0$, и будем рассматривать стационарный перенос заряда и спина в условиях электрической нейтральности системы, полагая $\delta N = 0$. Кроме того, пренебрежем эффектами "косого" спин-орбитального рассеяния, опуская все члены, содержащие $1/\tau_\mathrm{SO}$.

Решение уравнения (43) для потока $\mathbf{I}$ в этом случае можно записать в явном виде

$$\mathbf{I} = \frac{N_0 e\tau_\mathrm{O}}{m}\mathbf{E} - \frac{\mu\tau_\mathrm{O}}{m}\left(\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{H}^{(ex)} \cdot \delta\mathbf{S}\right)\mathbf{e}_z. \qquad (48)$$

Из выражения (48) следует, что неоднородное магнитное поле изменяет поток электронов, причем изменение определяется скалярным произведением вектора $\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{H}^{(ex)}$ и вектора неравновесной спиновой плотности $\delta\mathbf{S}$. Представим $\delta\mathbf{S}$ в виде суммы продольной $\delta\mathbf{S}_\mathrm{l}$ и поперечной $\delta\mathbf{S}_\mathrm{t}$ (по отношению к оси спирали) компонент: $\delta\mathbf{S} = \delta\mathbf{S}_\mathrm{l} + \delta\mathbf{S}_\mathrm{t}$. С учетом того, что вектор $\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{H}^{(ex)}$ перпендикулярен вектору оси $\mathbf{e}_z$, получаем, что изменение потока электронов в (48) определяется только поперечной компонентой неравновесной спиновой плотности $\delta\mathbf{S}_\mathrm{t}$.

Из уравнений (42)–(44) получаем следующую связь продольной $\delta\mathbf{S}_\mathrm{l}$ и поперечной $\delta\mathbf{S}_\mathrm{t}$ компонент:

$$\delta\mathbf{S}_\mathrm{l} = -\Omega_\mathrm{L}\tau_\mathrm{S}\left[\delta\mathbf{S}_\mathrm{t} \times \mathbf{h}\right]. \qquad (49)$$

Среди введенных ранее векторов поляризации спинового тока $\mathbf{P}_i$ в рассматриваемом случае оказывается отличным от нуля только вектор $\mathbf{P}_z$, удовлетворяющий уравнению

$$\mathbf{P}_z + \tau_\mathrm{O}\left[\mathbf{P}_z \times \mathbf{\Omega}_\mathrm{L}\right] = -D\frac{\partial}{\partial z}\delta\mathbf{S}_\mathrm{t} + \frac{e\tau_\mathrm{O}}{m}\mathbf{S}E_z. \qquad (50)$$

В линейном по электрическому полю приближении в формуле (50) можно пренебречь отличием спиновой плотности $\mathbf{S}$ от ее локально-равновесного значения $\mathbf{S}_\mathrm{L}$. Тогда получаем, что $\mathbf{P}_z \perp \mathbf{e}_z$, $\mathbf{P}_z \| \mathbf{\Omega}_\mathrm{L}$. Учет нелинейных членов в (50) приводит к появлению у вектора поляризации $\mathbf{P}_z$ компоненты, направленной вдоль оси геликоиды.

С использованием соотношений (49), (50), из уравнения (42) получаем следующее уравнение для поперечной компоненты спиновой плотности:

$$\begin{gathered}-\tau_\mathrm{S}\left[\left[\delta\mathbf{S}_\mathrm{t} \times \mathbf{\Omega}_\mathrm{L}\right] \times \mathbf{\Omega}_\mathrm{L}\right] - D\frac{\partial^2}{\partial z^2}\delta\mathbf{S}_\mathrm{t} + \\ + \frac{1}{\tau_\mathrm{S}}\delta\mathbf{S}_\mathrm{t} = -\frac{e\tau_\mathrm{O}}{m}E_z\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{S}_\mathrm{L}.\end{gathered} \qquad (51)$$

Уравнение движения (51) для геликоиды, характеризуемой волновым вектором $\mathbf{q}$, с учетом того обстоятельства, что вектора $\delta\mathbf{S}_\mathrm{t}$ и $\mathbf{\Omega}_\mathrm{L}$ взаимно перпендикулярны, может быть записано в виде

$$\frac{1}{\tau_\mathrm{G}}\delta\mathbf{S}_\mathrm{t} = -\frac{e\tau_\mathrm{O}}{m}E_z\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{S}_\mathrm{L}, \qquad (52)$$

где введено эффективное время спиновой релаксации в гелимагнетике τ_G, определяемое соотношением

$$\frac{1}{\tau_G} = \frac{1}{\tau_S} + \frac{1}{\tau_L} + \frac{1}{\tau_D}. \tag{53}$$

Эффективная скорость спиновой релаксации в гелимагнетике τ_G^{-1} есть сумма трех составляющих: τ_S^{-1}, τ_L^{-1} и τ_D^{-1}.

Вклад τ_S^{-1} – это скорость спин-решеточной релаксации, обусловленной диссипацией неравновесного спина электронов проводимости на дефектах решетки, которая может быть рассчитана по формуле (45).

Составляющая эффективной скорости релаксации τ_L^{-1} определяется как

$$\frac{1}{\tau_L} = \Omega_L^2 \tau_S. \tag{54}$$

Физической причиной появления такого вклада является ларморовская прецессия спина электрона в условиях, когда ось прецессионного движения меняет свое направление при движении электрона по орбите вдоль оси геликоиды. Этот механизм спиновой релаксации электронов проводимости в гелимагнетиках естественно называть прецессионным.

Вклад τ_D^{-1}, определяемый как

$$\frac{1}{\tau_D} = Dq^2, \tag{55}$$

описывает скорость изменения спиновой плотности в данной точке пространства из-за диффузионного "ухода" спинов электронов из данной точки в процессе протекания спинового тока. Следует заметить, что спиновая диффузия в проводящем гелимагнетике – это не процесс "перетекания" спина из области пространства, где концентрация электронов с заданной проекцией спина велика, в область, где таких электронов меньше. В гелимагнетике значения вектора неравновесной спиновой плотности в соседних точках оси геликоиды отличаются только по направлению и поэтому диффузия в данном случае обеспечивает релаксацию спина электронов исключительно "по направлению". С учетом того, что коэффициент диффузии прямо пропорционален времени релаксации импульса τ_O, $D = \overline{v_E^2}\tau_O$, частота "диффузионной" составляющей скорости спиновой релаксации также пропорциональна τ_O: $\tau_D^{-1} = \Omega_q^2 \tau_O$, где $\Omega_q^2 = q^2 \overline{v_E^2}$. Представление диффузионного вклада в эффективную частоту спиновой релаксации в виде соотношения $\tau_D^{-1} = \Omega_D^2 \tau_O$ по форме зависимости от времени релаксации импульса τ_O совпадает с известным выражением для скорости спиновой релаксации электронов в полупроводниках, предложенным Дьяконовым и Перелем.

Соотношение между величинами τ_D^{-1} и τ_S^{-1} определяется отношением характерного линейного размера неоднородности поля q^{-1} и спин-диффузионной длины $L_S = \sqrt{D\tau_S}$. Для длиннопериодных неоднородностей $qL_S \ll 1$ и диффузионным механизмом спиновой релаксации можно пренебречь. Для короткопериодных неоднородностей $qL_S \gg 1$ и скорость релаксации спиновой плотности определяется в основном диффузионным механизмом.

Легко видеть, что приведенные выше рассуждения о дополнительных механизмах спиновой релаксации – "прецессионном" и "диффузионном" – применимы не только к периодическим магнитно-неоднородным системам типа геликоидальных магнетиков. Для непериодических магнитоупорядоченных систем частота Ω_L будет определяться среднеквадратичной величиной флуктуаций обменного поля в магнетике, а волновое число q будет иметь смысл характерного обратного линейного размера этих флуктуаций.

Решение уравнения (51) с учетом определения (53) дает результат:

$$\delta \mathbf{S}_t = \chi \tau_O \tau_G \frac{e}{m\mu} q H^{(ex)} E_z \mathbf{h}'; \tag{56}$$

$$\delta \mathbf{S}_l = \chi \tau_O \tau_S \tau_G \frac{2e}{\hbar m} q \left[H^{(ex)} \right]^2 E_z \mathbf{k}, \tag{57}$$

где χ – восприимчивость Паули электронного газа.

Из выражений (56), (57) немедленно следует, что отношение абсолютных значений $\delta\mathbf{S}_l$ и $\delta\mathbf{S}_t$ зависит только от значения параметра $\Omega_L \tau_S$:

$$\frac{\delta S_l}{\delta S_t} = \Omega_L \tau_S. \tag{58}$$

Если обменное поле $H^{(ex)}$ невелико и $\Omega_L \tau_S \ll 1$, то параллельная оси геликоиды неравновесная компонента спиновой плотности мала. В противном случае сильных обменных полей, когда $\Omega_L \tau_S \gg 1$, неравновесная спиновая плотность практически параллельна оси геликоиды.

Отдельного обсуждения заслуживает вопрос о направлении вектора продольной поляризации $\delta\mathbf{S}_l$. Из выражения (57) следует, что вектор $\delta\mathbf{S}_l$ коллинеарен вектору киральности $\mathbf{k}$. Записывая вектор киральности в виде $\mathbf{k} = K\mathbf{e}_z$, получаем, что для правозакрученной магнитной спирали с киральностью $K = 1$ коллинеарные векторы спиновой плотности $\delta\mathbf{S}_1$ и плотности потока электронов $\mathbf{I}$ являются сонаправленными, $\delta\mathbf{S}_1 \uparrow\uparrow \mathbf{I}$. Этот вывод справедлив и для пары векторов неравновесной плотности намагниченности электронов $\delta\boldsymbol{m}_1$ и плотности электрического тока $\mathbf{j}$. Соответственно, для левозакрученной магнитной спирали с киральностью $K = -1$ коллинеарные векторы спиновой плотности $\delta\mathbf{S}_1$ и плотности потока электронов $\mathbf{I}$ являются противоположно направленными, $\delta\mathbf{S}_1 \uparrow\downarrow \mathbf{I}$, как и векторы $\delta\mathbf{m}_1$ и $\mathbf{j}$.

Из уравнения (48) следует, что плотность электрического тока $\mathbf{j} = e\mathbf{I}$, индуцируемого в гелимагнетике вдоль его оси электрическим полем $\mathbf{E}$, записывается как

$$\mathbf{j} = (\sigma_0 - \delta\sigma)\,\mathbf{E}, \tag{59}$$

где $\sigma_0 = N_0 e^2 \tau_{\mathrm{O}} / m$ — проводимость Друде электронного газа, а добавка $(-\delta\sigma)$ к проводимости, обусловленная спиральной структурой обменных полей в гелимагнетике, определяется выражением

$$\frac{\delta\sigma}{\sigma_0} = \frac{9}{4}\left(\frac{\mu H^{(\mathrm{ex})}}{\varepsilon_{\mathrm{F}}}\right)^2 \frac{\tau_{\mathrm{G}}}{\tau_{\mathrm{D}}}. \tag{60}$$

Таким образом, согласно (60), величина эффектов неоднородности магнитного состояния гелимагнетиков определяется двумя факторами. Во-первых, это величина отношения обменной энергии $\mu H^{(\mathrm{ex})}$ к энергии Ферми ε_{F}. Именно этот фактор, зависящий только от электронной и магнитной структуры гелимагнетика, ограничивает относительную величину изменения электропроводности сверху. Во-вторых, на величину изменения электропроводности будут влиять транспортные свойства материала. Этот фактор в формуле (60) записан как отношение $\tau_{\mathrm{G}}/\tau_{\mathrm{D}}$. Это отношение при любом соотношении вкладов различных механизмов спиновой релаксации всегда меньше единицы и достигает максимального единичного значения в условиях, когда диффузионный механизм релаксации является определяющим. Оставаясь в пределах применимости базовых уравнений (41)–(44), мы должны считать параметр $\mu H^{(\mathrm{ex})}/\varepsilon_{\mathrm{F}}$ малым по сравнению с единицей и, следовательно, численное значение величины $\delta\sigma/\sigma_0$, определяемой формулой (60), может быть оценено сверху именно значением этого малого параметра. В случае сильных обменных полей, когда $\mu H^{(\mathrm{ex})}/\varepsilon_{\mathrm{F}} \leq 1$, формула (60) может дать оценку лишь по порядку величины.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученная система уравнений (41)–(44) описывает весь круг гальваномагнитных явлений в металлах и полупроводниках, обусловленных наличием электрического заряда и спинового момента у электронов проводимости, включая как известные эффекты — магнитосопротивление, эффект Холла и спиновый эффект Холла, так и не описанные ранее эффекты, обусловленные неоднородностями внешнего магнитного поля и внутренних полей обменного происхождения. Неоднородности действующего на электрон в металле эффективного магнитного поля приводят как к изменению величины электрического тока, индуцированного электрическим полем, так и к существенному изменению картины протекания спиновых токов в рассматриваемой геометрии эксперимента.

Полученные уравнения движения применены для описания электронного спинового транспорта в киральных гелимагнетиках. Показано, что направление индуцируемой электрическим полем неравновесной спиновой плотности определяется киральностью гелимагнетика. Предсказано существование в киральных магнетиках двух дополнительных механизмов спиновой релаксации: диффузионного и прецессионного. Рассчитано уменьшение электропроводности гелимагнетика, обусловленное действием геликоидальных обменных полей.

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме “Спин” АААА-А18-118020290104-2, проект № 32-1.1.3.5, при поддержке РФФИ, проект № 19-02-00057.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kaganov M.I., Peschansky V.G.* Galvano-magnetic phenomena today and forty years ago // Physics Reports. 2002. V. 372. P. 445–487.
2. *Hall E.H.* On a new action of the magnet on electric currents // American J. Mathematics. 1879. V. 2. P. 287–292.
3. *Дьяконов М.И., Перель М.И.* О возможности ориентации электроных спинов током // Письма в ЖЭТФ. 1971. Т. 13. С. 657–660.
4. *Dyakonov M.I., Perel V.I.* Current-induced spin orientation of electrons in semiconductors // Phys. Letters A. 1971. V. 35. № 6. P. 459–460.
5. *Кравченко В.Я., Цой В.С.* Спиновый эффект Холла в немагнитных проводниках в условиях классического эффекта Холла // Письма в ЖЭТФ. 2007. Т. 86. № 8. С. 621–624.
6. *Dyakonov M.I.* Magnetoresistance due to Edge Spin Accumulation. Phys. Rev. Lett. 2007. V. 99. P. 126601(1–4).
7. *Gerlach W., Stern O.* Der experementelle Nachweis der Richtungsquantelung // Zeitschrift fur Physic. 1922. V. 9. P. 349–352.

8. *Maekawa S., Valenzuela S.O., Saitoh E., Kimura T.* (ed.) Spin Current. Oxford University Press. 2017. 464 p.
9. *Dyakonov M.I.* (ed.) Spin Physics in Semiconductors. Springer Series in Solid-State Sciences. 2017. V. 157. 532 p.
10. *Силин В.П.* Кинетика парамагнитных явлений // ЖЭТФ. 1956. Т. 30. № 2. С. 421–422.
11. *Азбель М.Я., Герасименко В.И., Лифшиц И.М.* Парамагнитный резонанс и поляризация ядер в металлах // ЖЭТФ. 1957. Т. 32. № 5. Р. 1212–1225.
12. *Окулов В.В., Устинов В.В.* Поверхностная релаксация магнитного момента и граничное условие для спиновой функции распределения электронов проводимости в металле // ФММ. 1977. Т. 44. № 1. С. 43–55.
13. *Устинов В.В.* Граничные условия к кинетическим уравнениям и уравнениям движения намагниченности электронов проводимости металла с поверхностными парамагнитными примесями // Теоретическая и математическая физика. 1980. Т. 44. № 3. С. 587–399.
14. *Антропов Н.О., Кравцов Е.А., Проглядо В.В., Рябухина М.В., Устинов В.В.* Кристаллическая структура и магнитные свойства сверхрешеток Dy/Gd // ФММ. 2017. Т. 118. С. 1283–1290.
15. *Миляев М.А., Наумова Л.И., Устинов В.В.* Обменно-связанные сверхрешетки с рекордным магнитосопротивлением // Физика металлов и металловедение. 2018. Т. 119. С. 1224–1228.
16. *Антропов Н.О., Кравцов Е.А., Хайдуков Ю.Н., Рябухина М.В., Проглядо В.В., Вешке О., Устинов В.В.* Когерентная веерная магнитная структура в сверхрешетках Dy/Gd // Письма в ЖЭТФ. 2018. Т. 108. С. 361–366.