

ПРОЧНОСТЬ И ПЛАСТИЧНОСТЬ

УДК 539.12.043

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КАСКАДА ВЫБИТЫХ АТОМОВ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ С УЧЕТОМ ИХ ЭНЕРГИИ СВЯЗИ

© 2021 г. Е. В. Метелкин^а, *, М. В. Лебедева^а

^аРоссийский химико-технологический университет им. Д.И. Менделеева,
Миусская площадь, 9, Москва, 125047 Россия

*e-mail: sitech47@mail.ru

Поступила в редакцию 01.09.2020 г.

После доработки 24.11.2020 г.

Принята к публикации 25.11.2020 г.

На основе решения кинетического уравнения Больцмана получено приближенное выражение для функции распределения, описывающей нестационарное энергетическое распределение каскада движущихся атомов. Развитие каскада рассматривается в материалах, состоящих из одинаковых атомов с учетом энергии связи атомов в узлах решетки (ϵ_d). Предполагается, что рассеяние движущихся атомов является упругим и сферически симметричным в системе центра инерции, а сечение взаимодействия обратно пропорционально скорости. На основе полученного решения проведен анализ влияния энергии связи атомов на функцию распределения и связанные с ней величины. В предельном случае $\epsilon_d = 0$ полученное приближенное решение хорошо согласуется с точным решением соответствующей задачи.

Ключевые слова: кинетическое уравнение, столкновения, каскад атомов, сечение взаимодействия

DOI: 10.31857/S0015323021040070

ВВЕДЕНИЕ

При проектировании и создании ядерных реакторов и термоядерных установок возникает задача выбора для них радиационно-стойких материалов, поскольку в процессе эксплуатации их корпуса и отдельные элементы подвергаются длительному воздействию радиации. Именно радиационная стойкость материала во многом определяет время жизни установок и многие другие их физические характеристики.

При облучении различных материалов быстрыми частицами (в частности нейтронами) атомы кристаллической решетки, которым налетающая частица сообщает энергию, большую энергии связи, вылетают из своих равновесных положений. В дальнейшем столкновения движущихся атомов с атомами, расположенными в узлах решетки, приводят к образованию следующих поколений выбитых атомов. В результате возникает так называемый каскад движущихся атомов. Развитие каскадов в твердом теле приводит к образованию комплекса точечных дефектов (вакансий и междоузельных атомов, кластеров и т.д.), определяющих степень повреждения материала и его дальнейшие физические свойства [1–5].

Описание развития каскадов представляет собой достаточно сложную задачу. В связи с этим для ее решения в большинстве случаев с успехом используется компьютерное моделирование. Существует три основных метода, используемых для

моделирования поведения атомов в каскаде смещений: метод бинарной аппроксимации столкновений, метод молекулярной динамики и кинетический метод Монте-Карло [2, 6–9].

Однако, аналитические решения соответствующей задачи для линейного уравнения Больцмана, несмотря на то, что они существуют в исключительных случаях, также представляют значительный интерес. Это связано с тем, что аналитические решения дают наглядное представление о протекающем процессе и его особенностях. Кроме того, эти результаты могут быть использованы для тестирования достаточно сложных численных расчетов.

Аналитическое описание каскадов атомных столкновений в твердом теле и их особенностей было представлено в целом ряде работ [10–21]. В [10] с помощью построенной модельной индикатрисы рассеяния было получено приближенное стационарное энергетическое распределение каскада движущихся атомов для произвольных потенциалов межатомного взаимодействия. В работах [11, 12] анализировалась возможность образования субкаскадов – ряда неперекрывающихся между собой областей, в процессе развития каскада атомных столкновений. Оценка пороговой энергии образования субкаскадов была проведена в [13].

В работе [14] была разработана теоретическая модель для исследования образования каскадов и субкаскадов атомных столкновений в облучаемых твердых телах, основанная на использовании

линейного кинетического уравнения Больцмана. На основе расширенного толкования понятия первично выбитый атом (ПВА) в [14] был сформулирован критерий для определения пороговой энергии образования субкаскадов в твердом теле и получены формулы для определения средних размеров субкаскадов и их числа в зависимости от энергии ПВА. На основе результатов, представленных в [14], в работе [15] были проведены численные расчеты для конкретных материалов, согласующиеся с экспериментальными данными.

Кроме этого, представления, развитые в [14], в работе [16] были использованы для вычисления стационарного энергетического распределения релятивистских электронов, замедляющихся в веществе за счет ионизационных потерь, с учетом размножения электронов. Использование результатов из [14] в работе [17] позволило на основе решения кинетического уравнения Больцмана определить функцию распределения по энергии каскада движущихся атомов при степенном потенциале взаимодействия ($U \sim 1/r^n$ [18]) с учетом энергии связи атомов в узлах решетки.

В работах [19, 20] было получено точное решение кинетического уравнения Больцмана, описывающее нестационарное энергетическое распределение каскада движущихся атомов с учетом их размножения. Предполагалось, что материал состоит из одинаковых атомов, рассеяние движущихся атомов является упругим и сферически симметричным в системе центра инерции, а энергия связи атомов в узлах решетки не учитывалась ($\epsilon_d = 0$). В [19] предполагалось, что сечение рассеяния обратно пропорционально скорости ($\Sigma = \Sigma_0/v$; $\Sigma_0 = \text{const}$), а в [20] оно полагалось постоянной величиной ($\Sigma = \text{const}$). В работе [21] в тех же предположениях ($\epsilon_d = 0$; $\Sigma = \text{const}$) с использованием P_1 и транспортного приближений было получено нестационарное пространственно-энергетическое распределение каскада выбитых атомов.

В настоящей работе на основе приближенного метода решения кинетического уравнения Больцмана определяется нестационарное энергетическое распределение каскада движущихся атомов с учетом их энергии связи в узлах решетки. Рассеяние движущихся атомов считается упругим и сферически симметричным в системе центра инерции. Для простоты и наглядности расчетов полагается, что сечение рассеяния обратно пропорционально скорости.

Полученное решение при $\epsilon_d = 0$ хорошо согласуется с точным решением аналогичной задачи (см. [19]). Это решение позволяет оценить энергетический диапазон влияния учета энергии связи на функцию распределения.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим распространение каскада выбитых атомов в твердом теле, состоящем из одинако-

вых атомов. Кинетическое уравнение Больцмана, описывающее этот процесс, имеет следующий вид [10, 22]:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi(E, t)}{\partial t} + \Sigma(E) \Phi(E, t) = \int_E^{E_0} dE' P(E' \rightarrow E) \times \\ \times \Sigma(E') \Phi(E', t) + \int_{E+\epsilon_d}^{E_0} dE' P(E' \rightarrow E' - E - \epsilon_d) \times (1) \\ \times \Sigma(E') \Phi(E', t) + N_0 \delta(E - E_0) \delta(t),$$

где $f(E, t)dE$ – число атомов с энергией E в интервале dE в момент времени t в единице объема; $\Phi(E, t) = v f(E, t)$ – поток движущихся атомов; v – их скорость; $P(E' \rightarrow E) = \Sigma(E' \rightarrow E)/\Sigma(E')$ – индикатриса рассеяния (вероятность того, что движущийся атом с энергией E' в результате рассеяния перейдет в единичный интервал энергий вблизи значения E); $\Sigma(E' \rightarrow E)$ и $\Sigma(E')$ – дифференциальное и полное макроскопические сечения рассеяния атомов; $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака; E_0 – начальная энергия движущихся атомов; N_0 – полное число атомов, испущенных в единицу объема; ϵ_d – энергия связи атомов в узлах решетки.

Первый интеграл, стоящий в правой части кинетического уравнения (1), описывает переход движущегося атома с энергией E' в состояние с энергией E . Второй интеграл описывает образование выбитого атома с энергией E , когда движущийся атом перешел в состояние с энергией $(E' - E - \epsilon_d)$.

Выше отмечалось, что точное решение уравнения (1) было получено в работах [19, 20] для упругого, сферически симметричного рассеяния в системе центра инерции без учета энергии связи атомов в узлах решетки ($\epsilon_d = 0$).

В данной работе мы также будем считать, что рассеяние движущихся атомов на покоящихся является сферически симметричным в системе центра инерции и описывается индикатрисой рассеяния, имеющей следующий вид [22]:

$$P(E' \rightarrow E) = 1/E'. \quad (2)$$

Для учета энергии связи уравнение (1) запишем в более простом виде, удобном для дальнейшего решения [23]:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi(E, t)}{\partial t} + [\Sigma(E) + \delta\Sigma] \Phi(E, t) = \\ = \int_E^{E_0} dE' P(E' \rightarrow E) [\Sigma(E') + \delta\Sigma] \Phi(E', t) + \\ + \int_E^{E_0} dE' P(E' \rightarrow E' - E) \Sigma(E') \Phi(E', t) + \\ + N_0 \delta(E - E_0) \delta(t). \quad (3)$$

Величину $\delta\Sigma$ найдем, следуя [23], из соотношения

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\epsilon_d \frac{d}{dt} N(t), \quad (4)$$

где

$$N(t) = \int_0^{E_0} dE f(E, t); \quad E(t) = \int_0^{E_0} dE E f(E). \quad (5)$$

Используя (2)–(4), получим

$$\delta\Sigma = \frac{2\epsilon_d}{E} \Sigma(E). \quad (6)$$

Корректность использования уравнения (3) и соотношения (4) была подробно проанализирована в работах [10, 24]. Там было показано, что в этом случае учитываются соударения, сопровождающиеся передачей энергии, большей ϵ_d . Кроме этого, в этих работах было представлено уравнение, аналогичное (3), и позволяющее более точно учесть наличие энергии связи, но являющееся значительно более сложным для аналитического решения.

Учитывая (2) и (6), уравнение (3) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v\Sigma} \frac{\partial \Psi(E, t)}{\partial t} + \left(1 + \frac{2\epsilon_d}{E}\right) \Psi(E, t) = \\ & = 2 \int_E^{E_0} \frac{dE'}{E'} \left(1 + \frac{\epsilon_d}{E'}\right) \Psi(E', t) + N_0 \delta(E - E_0) \delta(t), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\Psi(E, t) = \Sigma(E) \Phi(E, t)$ – плотность соударений.

РЕШЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Применяя к обеим частям уравнения (7) преобразование Лапласа по времени [25]

$$\tilde{\Psi}(E, p) = \int_0^{\infty} \exp(-pt) \Psi(E, t) dt, \quad (8)$$

получим:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{p}{v\Sigma} + 1 + \frac{2\epsilon_d}{E}\right) \tilde{\Psi}(E, p) = \\ & = 2 \int_E^{E_0} \frac{dE'}{E'} \left(1 + \frac{\epsilon_d}{E'}\right) \tilde{\Psi}(E', p) + N_0 \delta(E - E_0). \end{aligned} \quad (9)$$

Выделим в решении уравнения (9) нерассеянное излучение

$$\tilde{\Psi}(E, p) = \tilde{\Psi}_0(E, p) + \frac{N_0 \delta(E - E_0)}{\left(\frac{p}{v\Sigma} + 1 + \frac{2\epsilon_d}{E}\right)}. \quad (10)$$

Подставив (10) в (9), найдем уравнение для функции $\tilde{\Psi}_0(E, p)$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{p}{v\Sigma} + 1 + \frac{2\epsilon_d}{E}\right) \tilde{\Psi}_0(E, p) = \\ & = 2 \int_E^{E_0} \frac{dE'}{E'} \left(1 + \frac{\epsilon_d}{E'}\right) \tilde{\Psi}_0(E', p) + \frac{2N_0 \left(1 + \frac{\epsilon_d}{E_0}\right)}{E_0 \left(\frac{p}{v_0 \Sigma(E_0)} + 1 + \frac{2\epsilon_d}{E_0}\right)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Будем далее для простоты расчетов полагать, что

$$\Sigma = \Sigma_0/v; \quad \Sigma_0 = \text{const}. \quad (12)$$

Используя (12) и дифференцируя (11) по энергии получим дифференциальное уравнение для функции $\tilde{\Psi}_0(E, p)$:

$$\frac{d}{dE} \tilde{\Psi}_0(E, p) = -\frac{2\tilde{\Psi}_0(E, p)}{E \left(\frac{p}{\Sigma_0} + 1 + \frac{2\epsilon_d}{E}\right)}. \quad (13)$$

Начальное условие для уравнения (13) легко определить из (11):

$$\tilde{\Psi}_0(E_0, p) = \frac{2N_0 \left(1 + \frac{\epsilon_d}{E_0}\right)}{E_0 \left(\frac{p}{\Sigma_0} + 1 + \frac{2\epsilon_d}{E_0}\right)^2}. \quad (14)$$

Решая уравнение (13) с учетом (14), для образа Лапласа функции распределения получим:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(E, p) = \frac{\tilde{\Psi}(E, p)}{\Sigma_0} & = \frac{2N_0 \Sigma_0 \left(1 + \frac{\epsilon_d}{E_0}\right)}{E_0 \left(p + \Sigma_0 + \frac{2\epsilon_d \Sigma_0}{E_0}\right)^2} \times \\ & \times \left(\frac{E_0 + \frac{2\epsilon_d \Sigma_0}{(p + \Sigma_0)}}{E + \frac{2\epsilon_d \Sigma_0}{(p + \Sigma_0)}}\right)^{\frac{2\Sigma_0}{(p + \Sigma_0)}} + \frac{N_0 \delta(E - E_0)}{\left(p + \Sigma_0 + \frac{2\epsilon_d \Sigma_0}{E_0}\right)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Очевидно, что при $\epsilon_d = 0$ выражение (15) совпадает с точным решением соответствующей задачи (см. в [19] формулу (12)), поскольку при этом условии и сделанных предположениях совпадают уравнения (1) и (7).

Вычисление оригинала функции распределения ($f(E, t)$), используя формулу (15), является достаточно сложной задачей. В связи с этим для функции распределения (первое слагаемое в (15)) выберем следующее приближенное выражение

$$f(E, t) = A(E) t^{b(E)} \exp[-c(E)t], \quad (16)$$

где параметры $A(E)$, $b(E)$, $c(E)$ легко определяются через временные моменты (см. напр. [22])

$$\langle t^n(E) \rangle = \int_0^{E_0} dt t^n f(E, t) / \int_0^{E_0} dt f(E, t) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (17)$$

Используя (16), (17), найдем:

$$\begin{aligned} A(E) &= \frac{\tilde{f}(E, p = 0) c(E)^{b(E)+1}}{\Gamma[b(E) + 1]}; \\ b(E) &= \frac{\langle t(E) \rangle^2}{\langle t^2(E) \rangle - \langle t(E) \rangle^2} - 1; \\ c(E) &= \frac{\langle t(E) \rangle}{\langle t^2(E) \rangle - \langle t(E) \rangle^2}, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция [26].

Из выражения (16) следует, что наиболее вероятное время замедления равно.

$$t_m(E) = \frac{b(E)}{c(E)} = \frac{2 \langle t(E) \rangle^2 - \langle t^2(E) \rangle}{\langle t(E) \rangle}. \quad (19)$$

Соответствующие временные моменты, используя (15), можно вычислить следующим образом:

$$\langle t^n(E) \rangle = (-1)^n \left\{ \frac{\left[\frac{\partial^n}{\partial p^n} \tilde{f}(E, p) \right]}{\tilde{f}(E, p)} \right\}_{p=0}. \quad (20)$$

Используя (15), (20), найдем:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(E, p = 0) &= \frac{2N_0 E_0}{\Sigma_0 (E + 2\varepsilon_d)^2}; \\ \langle t(E) \rangle &= \frac{2}{\Sigma_0} \left[1 + \ln \left(\frac{E_0}{E + 2\varepsilon_d} \right) - \frac{2\varepsilon_d (E_0 - E)}{E_0 (E + 2\varepsilon_d)} \right]; \\ \langle t^2(E) \rangle &= \frac{6}{\Sigma_0^2} \left\{ \frac{1 + 2 \ln \left(\frac{E_0}{E + 2\varepsilon_d} \right) - \frac{4\varepsilon_d (E_0 - E)}{E_0 (E + 2\varepsilon_d)} - \frac{4\varepsilon_d^2 (E_0 - E)^2}{3E_0^2 (E + 2\varepsilon_d)^2} + \frac{2}{3} \left[\ln \left(\frac{E_0}{E + 2\varepsilon_d} \right) - \frac{2\varepsilon_d (E_0 - E)}{E_0 (E + 2\varepsilon_d)} \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Заметим, что в выражениях (21), мы пренебрегли членами порядка ε_d/E_0 , много меньшими единицы.

Таким образом, окончательно функцию распределения (16) (рассеянное излучение) можно представить в следующем безразмерном виде:

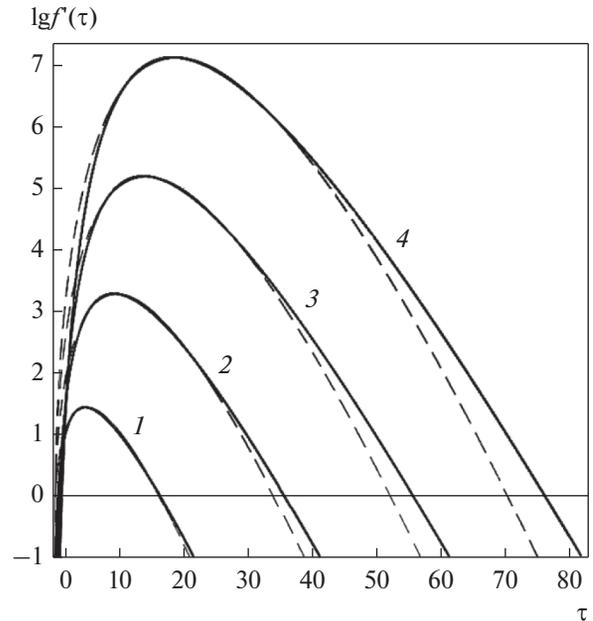


Рис. 1. Зависимости функции распределения от времени при различных значениях энергии ($\varepsilon = E/E_0$; 1 – $\varepsilon = 10^{-1}$; 2 – $\varepsilon = 10^{-2}$; 3 – $\varepsilon = 10^{-3}$; 4 – $\varepsilon = 10^{-4}$), построенные по точной формуле (штриховые линии) и по приближенной (сплошные линии).

$$\begin{aligned} f'(E, \tau) &= \frac{f(E, t) E_0}{N_0} = 2 \left(\frac{E_0}{E + 2\varepsilon_d} \right)^2 \times \\ &\times \frac{[c'(E)]^{b(E)+1}}{\Gamma[b(E) + 1]} \tau^{b(E)} \exp[-c'(E) \tau], \end{aligned} \quad (22)$$

где $\tau = \Sigma_0 t$ – безразмерное время; $c'(E) = c(E)/\Sigma_0$.

АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННОГО РЕШЕНИЯ

Оценим точность представления функции распределения в виде (16). На рис. 1 представлены зависимости функции распределения ($f'(E, \tau)$) от безразмерного времени τ для различных значений безразмерной энергии $\varepsilon = E/E_0$, построенные по формуле (22) при $\varepsilon_d = 0$ и по формуле (26) из [19], являющейся точным решением соответствующей задачи. Из рисунка видно, что функция (22) с хорошей точностью описывает точное решение задачи. Следует отметить, что время достижения максимума и значение функции (22) в максимуме на несколько процентов отличаются от соответствующих значений при точном решении (см. в [19] формулы (27), (28)).

Учет энергии связи (ε_d) приводит к уменьшению среднего времени замедления и среднего квадрата этой величины, что представлено на рис. 2 и 3. (кривые построены по формулам (21)). Это обстоятельство связано, очевидно, с тем, что

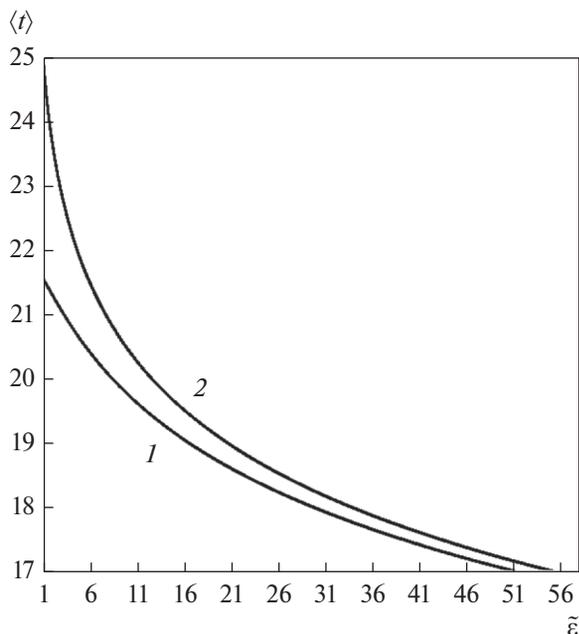


Рис. 2. Зависимость среднего времени замедления ($\Sigma_0 \langle t \rangle$) от безразмерной энергии $\tilde{\epsilon} = E/\epsilon_d$ (1 – с учетом ϵ_d ; 2 – без учета ϵ_d).

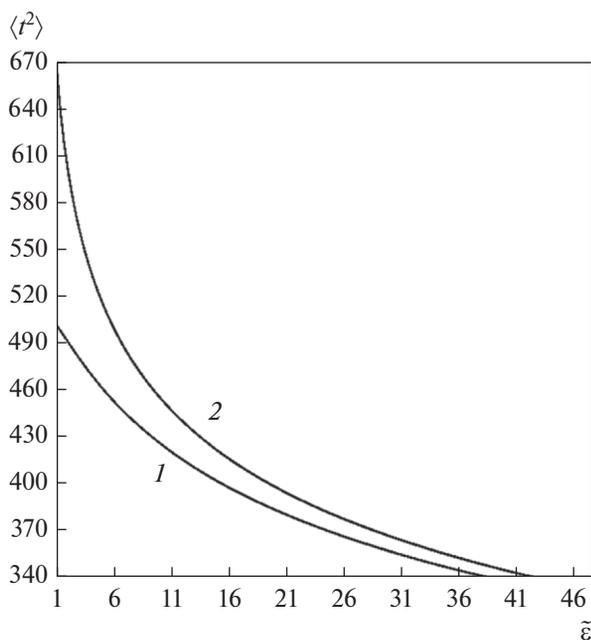


Рис. 3. Зависимость среднего квадрата времени замедления ($\Sigma_0^2 \langle t^2 \rangle$) от безразмерной энергии $\tilde{\epsilon} = E/\epsilon_d$ (1 – с учетом ϵ_d ; 2 – без учета ϵ_d).

при учете энергии связи образуется меньше выбитых атомов, поскольку учитываются потери энергии на выбивание атомов из узлов решетки. Напомним, что при $\epsilon_d = 0$ число выбитых атомов возрастает неограниченно [19].

На рис. 4 показаны зависимости функции распределения от времени ($f'(\tau)$), построенные по формуле (22) для различных значений безразмерной энергии $\tilde{\epsilon} = E/\epsilon_d$ при учете (штриховые линии) и без учета (сплошные линии) энергии связи атомов. При расчетах полагалось, что $E_0/\epsilon_d = 10^5$.

Из представленных результатов видно, что при учете энергии связи функция распределения достигает максимума при меньших значениях времени (см. рис. 4), и ее значение в максимуме существенно меньше. Это обусловлено, очевидно, тем, что при учете энергии связи количество выбитых атомов конечно, а в противном случае оно неограниченно возрастает. Однако с увеличением энергии эти различия становятся все менее и менее существенными, и при $E \geq 25\epsilon_d$ практически исчезают. Последнее обстоятельство уточняет область применимости точных результатов, полученных в работах [19–21].

Найдем каскадную функцию $v(E_0)$, представляющую собой полное число атомов решетки, выбитых одним первичным атомом с энергией E_0 . В

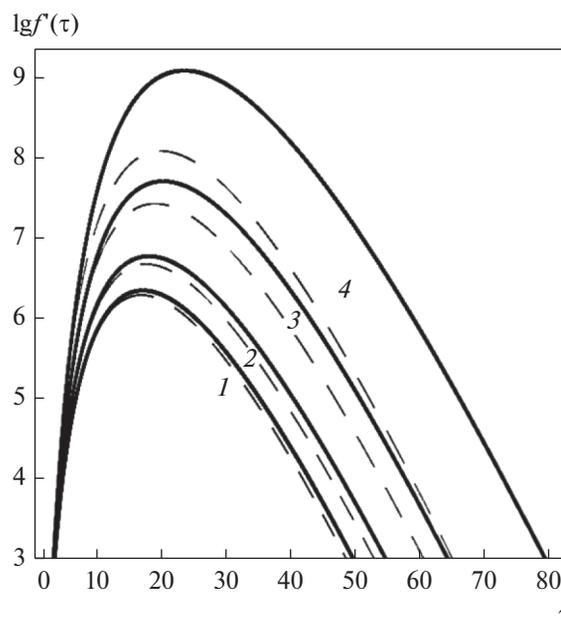


Рис. 4. Зависимости функции распределения от времени, построенные по формуле (22), при различных значениях безразмерной энергии ($\tilde{\epsilon} = E/\epsilon_d$; 1 – $\tilde{\epsilon} = 25$; 2 – $\tilde{\epsilon} = 15$; 3 – $\tilde{\epsilon} = 5$; 4 – $\tilde{\epsilon} = 1$), при учете (штриховые линии) и без учета (сплошные линии) энергии связи.

нашем случае она будет определяться следующим выражением (см. [10, 24]):

$$v(E_0) = \frac{1}{N_0} \int_{\epsilon_d}^{E_0} \Sigma_0 \tilde{f}(E, p=0) dE. \quad (23)$$

Используя (23) и (21) и пренебрегая членами порядка ϵ_d/E_0 , много меньшими единицы, найдем:

$$v(E_0) = \frac{2E_0}{3\epsilon_d}. \quad (24)$$

Это значение несколько превосходит известный результат Кинчина–Пиза (см. в [2]), поскольку мы не учитывали соударения с передачей атомам решетки энергии, меньшей ϵ_d (подробный анализ приведен в [10, 24]).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе получено приближенное аналитическое решение кинетического уравнения Больцмана, описывающее нестационарное энергетическое распределение каскада движущихся атомов в твердом теле при учете энергии связи атомов в узлах решетки (ϵ_d). Предполагалось, что тело состоит из одинаковых атомов, рассеяние является сферически симметричным в системе центра инерции, а сечение взаимодействия обратно пропорционально скорости (см. (12)).

На основе полученного решения проведен анализ влияния энергии связи на функцию распределения и связанные с ней величины: среднее время замедления, средний квадрат этой величины (см. рис. 2–4). В предельном случае $\epsilon_d = 0$ полученное приближенное решение хорошо согласуется с точным решением соответствующей задачи из [19] (см. рис. 1).

Показано, что учет энергии связи атомов в узлах решетки начнет оказывать влияние на функцию распределения при энергиях меньших $\approx 25\epsilon_d$. Это позволяет уточнить область применения точных решений уравнения Больцмана полученных в [19–21] при $\epsilon_d = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лейман К. Взаимодействие излучения с твердым телом и образование элементарных дефектов. М.: Атомиздат, 1979. 297 с.
2. Вас Гэри С. Основы радиационного материаловедения. Металлы и сплавы. М.: ТЕХНОСФЕРА, 2014. 992 с.
3. Портных И.А., Козлов А.В. Рост вакансионных пор на начальной стадии нестационарного распухания // ФММ. 2018. Т. 119. № 6. С. 636–644.

4. Васильев Л.С., Ломаев С.Л. Избыточный объем материалов с дислокациями // ФММ. 2019. Т. 120. № 7. С. 771–777.
5. Исинбаев А.Р., Портных И.А., Козлов А.В. Влияние радиационной пористости, формирующейся в аустенитной стали при нелинейном облучении, на концентрацию собственных точечных дефектов // ФММ. 2020. Т. 121. № 1. С. 99–104.
6. Воскобойников Р.Е. Радиационные дефекты в алюминии. Моделирование первичных повреждений в каскадах смещений в объеме материала // ФММ. 2019. Т. 120. № 1. С. 3–10.
7. Воскобойников Р.Е. Радиационные дефекты в алюминии. Моделирование первичных повреждений в каскадах смещений на поверхности // ФММ. 2019. Т. 120. № 1. С. 11–17.
8. Воскобойников Р.Е. Моделирование каскадов смещений на поверхности никеля методом молекулярной динамики // ФММ. 2020. Т. 121. № 1. С. 10–17.
9. Воскобойников Р.Е. Моделирование первичных радиационных повреждений в никеле // ФММ. 2020. Т. 121. № 1. С. 18–24.
10. Ryazanov A.I., Metelkin E.V. Concerning the theory of radiation cascades of atomic collisions in a solid with an arbitrary interatomic interaction potential // Radiation Effects and Defects in Solids. 1980. V. 52. № 1–2. P. 15–23.
11. Sato Y., Kojimo S., Yoshiie T., Kiritani M. Criterion of subcascade formation in metals from atomic collision calculation // J. Nuclear Mater. 1991. № 179–181. P. 901–904.
12. Sato Y., Yoshiie T., Kiritani M. Binary collision calculation of subcascade structure and its correspondence to observe subcascade defects in 14 MeV neutron irradiated copper // J. Nuclear Mater. 1992. № 191–194. P. 1101–1104.
13. Метелкин Е.В., Рязанов А.И. Пороговая энергия образования субкаскадов // Атомная энергия. 1997. Т. 83. В. 3. С. 183–189.
14. Метелкин Е.В., Рязанов А.И., Семенов Е.В. Разработка новых теоретических моделей для исследования образования каскадов и субкаскадов атомных столкновений в облучаемых твердых телах // Журн. экспериментальной и теоретич. физики. 2008. Т. 134. В. 3(9). С. 469–480.
15. Ryazanov A.I., Metelkin E.V., Semenov E.V. Modeling of cascade and sub-cascade formation at high PKA energies in irradiated fusion structural materials // J. Nuclear Mater. 2009. № 386–388. P. 132–134.
16. Метелкин Е.В., Лебедева М.В., Черняев А.В. Энергетическое распределение релятивистских электронов, замедляющихся в веществе // Атомная энергия. 2018. Т. 125. В. 3. С. 184–186.
17. Aleksandrov A.A., Akatev V.A., Metelkin E.V., Barycheva E.J. Develop a Model to Study the Energy Distribution of Cascades of Atomic Collisions // Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences. 2019. № 1. P. 27–36

18. *Lindhard J., Vibeke Nielsen, Scharff M.* Approximation Method in Classical Scattering by Screened Coulomb Fields // *Det Kongelige Danske Videnskabskabernes Selskab Matematisk-fysiske Meddelelser*. 1968. V. 36. № 10. P. 1–32.
19. *Метелкин Е.В., Манвелов А.Н., Пономарев А.Я., Шмырев В.И.* Модель развития каскада выбитых атомов в твердом теле // *ФММ*. 2019. Т. 120. № 8. С. 892–896.
20. *Aleksandrov A.A., Akatev V.A., Metelkin E.V., Barycheva E.J.* Investigation of the Nonstationary Energy Distribution of an Atomic Collision Cascad // *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*. 2019. № 6. P. 40–49.
21. *Метелкин Е.В., Акатьев В.А., Шмырев В.И., Барышева Е.Ю.* Нестационарное пространственно-энергетическое распределение каскада выбитых атомов в твердом теле // *Журн. экспериментальной и теоретич. физики*. 2019. Т. 156. В. 3(9). С. 387–395.
22. *Исаков А.И., Казарновский М.В., Медведев Ю.А., Метелкин Е.В.* Нестационарное замедление нейтронов. Основные закономерности и некоторые приложения. М.: Наука, 1984. 264 с.
23. *Ахиезер А.И., Ахиезер И.А.* К кинетической теории каскада столкновений в твердом теле. ХФТИ, 1975. Препринт 75–24. 35 с.
24. *Рязанов А.И., Метелкин Е.В.* К теории образования точечных дефектов в радиационном каскаде столкновений атомов с произвольным потенциалом взаимодействия. ИАЭ, 1979. Препринт 3223. 35 с.
25. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. М.: Наука, 1969. 343с.
26. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.