

**ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ  
И МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА**

УДК 538.945

**МАГНИТНЫЕ И ТРАНСПОРТНЫЕ СВОЙСТВА  
СВЕРХПРОВОДНИКОВ ВТОРОГО РОДА:  
ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТ**

© 2021 г. В. А. Кашурников<sup>а</sup>, А. Н. Максимова<sup>а, \*</sup>, И. А. Руднев<sup>а</sup>, А. Н. Мороз<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Каширское шоссе, 31, Москва, 115409 Россия

\*e-mail: nastymaksimova@yandex.ru

Поступила в редакцию 02.07.2020 г.

После доработки 01.12.2020 г.

Принята к публикации 30.12.2020 г.

Обзор посвящен различным экспериментальным и теоретическим исследованиям магнитных и транспортных свойств сверхпроводников второго рода. Основным интерес представляют исследования особенностей поведения вихревой системы, ее динамики и взаимодействия с центрами пиннинга – дефектами. Подробно рассмотрены два широко используемых метода численного моделирования вихревой системы: Монте-Карло и молекулярной динамики. Описаны эффекты, исследованные данными методами, такие как различные фазовые переходы в решетке вихрей, ее плавление и инверсная кристаллизация. Рассмотрены существующие модели слоистого анизотропного высокотемпературного сверхпроводника в магнитном поле, перпендикулярном и наклонном по отношению к сверхпроводящим слоям. Описаны активно исследуемые и применяемые на практике методы улучшения токонесущих характеристик сверхпроводника путем внедрения различных нано- и микроскопических искусственных дефектов, в том числе имеющих ферромагнитное упорядочение. Рассмотрены различные эффекты, наблюдаемые в композитных (в том числе многослойных) структурах ферромагнетик–сверхпроводник, представляющие интерес по сей день.

*Ключевые слова:* сверхпроводник второго рода, вихри Абрикосова, Монте-Карло, молекулярная динамика

**DOI:** 10.31857/S0015323021050053

<b>ОГЛАВЛЕНИЕ</b>		<b>МЕТОД МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ</b>	482
<b>ВВЕДЕНИЕ</b>	467	Основные уравнения	482
<b>ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ</b>	468	Результаты расчетов	482
Сверхпроводник второго рода в магнитном поле	468	<b>КОМПОЗИТНЫЕ СТРУКТУРЫ ФЕРРОМАГНЕТИК–СВЕРХПРОВОДНИК</b>	485
Фазовые переходы в вихревой решетке.		Магнитные наночастицы в качестве центров пиннинга	485
Плавление решетки вихрей	469	Двойные и более слои ферромагнетик–сверхпроводник	487
Инверсная кристаллизация	471	<b>ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОМПОЗИТНЫХ НАНОСТРУКТУР ФЕРРОМАГНЕТИК–СВЕРХПРОВОДНИК: МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО</b>	488
Резистивное состояние сверхпроводника	471	Моделирование ВТСП с магнитными наночастицами в качестве центров пиннинга	488
Трехмерный анизотропный сверхпроводник. Вихревая решетка в магнитном поле, параллельном оси анизотропии	473	ВТСП с цилиндрическими магнитными дефектами	491
Вихревая решетка в слоистом ВТСП в наклонном поле	474	<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b>	492
<b>ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ – МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО</b>	477	<b>СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ</b>	493
NVT-ансамбль	478	<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ</b>	493
Двумерная модель с переменным числом вихрей	478		
Расчет транспортных характеристик	480		
Трехмерная модель слоистого ВТСП	480		

## ВВЕДЕНИЕ

Сверхпроводники являются перспективными материалами для различных электротехнических приложений, поскольку обладают более высокими токонесущими характеристиками по сравнению с традиционными резистивными проводниками. Открытие высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП), сохраняющих свои сверхпроводящие свойства при азотных температурах (77.4 К), привело к новым возможностям применения данных материалов, что стимулировало интенсивное исследование их магнитных и транспортных свойств. Как известно, все ВТСП являются сверхпроводниками второго рода, отличительная особенность которых — переход в смешанное (вихревое) состояние: уже при не слишком больших полях и токах в объем сверхпроводника начинают проникать так называемые вихри Абрикосова. Поведение вихрей и их взаимодействие с дефектной структурой образца в значительной мере определяют магнитные и транспортные свойства всего материала. Дефекты являются областями с пониженными сверхпроводящими свойствами, поэтому вихрю, обладающему нормальной (несверхпроводящей) сердцевинкой, оказывается энергетически выгодно закрепиться на дефекте (центре пиннинга). Наиболее практически значимым параметром для ВТСП служит критический ток  $j_c$ , при котором вихревая решетка срывается с дефектов и начинает движение, в результате которого происходит диссипация энергии. Природа дефектов, их форма, размеры и способы распределения по образцу оказывают сильное влияние на эффективность пиннинга в ВТСП, поэтому их всестороннему исследованию уделяется большое внимание. Такие факторы, как температура и анизотропия  $\gamma$ , также влияют на процессы проникновения, движения и захвата центрами пиннинга вихрей. Другая практически важная характеристика — значения гистерезисных потерь в режиме  $j < j_c$ , когда транспортный ток течет бездиссипативно, а транспортные потери обусловлены потерями на перемагничивание образца, в котором уже присутствует захваченный магнитный поток.

Одним из наиболее легко достижимых на практике способов повышения критического тока является создание искусственных центров пиннинга [1–10]. Часто используются дефекты, полученные в результате облучения образца нейтронами или высокоэнергетичными ионами, когда в слоистой структуре ВТСП появляются соответственно точечные или протяженные столбчатые дефекты, способные удерживать прямую вихревую нить (одномерные дефекты, [3]). Хорошими центрами пиннинга служат, например, дислокации и другие дефекты кристаллической решетки, а также границы зерен (двумерные дефекты). В ряде случаев

оказываются эффективны трехмерные дефекты, представляющие собой включения в сверхпроводник наночастиц различных веществ. Предполагается, в частности, что включения ферромагнитных наночастиц способны существенно повысить величину критического тока, поскольку к обычной, немагнитной части взаимодействия вихря с дефектом, добавляется энергия магнитного момента примеси в поле вихря. В настоящее время изучаются как ферромагнитные примеси в сверхпроводящих материалах (с целью улучшения токонесущих характеристик), так и взаимодействие ферромагнитных (антиферромагнитных) фаз со сверхпроводящей [11, 12] — для исследования сосуществования ферромагнетизма и сверхпроводимости в смешанном состоянии.

Следует, однако, отметить практическую сложность получения монокристаллов сверхпроводника с включениями в виде наночастиц другого вещества, а также предполагаемую неэффективность таких частиц ввиду существенного подавления сверхпроводимости в окрестности ферромагнитной частицы за счет эффекта близости. Только в последнее время появились технологии создания подобных включений (см., напр., [13]), в результате которых магнитная частица внутри сверхпроводника оказывается покрыта тонким слоем изолятора и на сверхпроводимость влияет только магнитное поле частицы. Тем не менее при определенных условиях была экспериментально продемонстрирована эффективность ферромагнитных дефектов и предпринимались попытки объяснить механизм пиннинга в таких системах. В работах [13, 14] была аналитически рассчитана сила взаимодействия сферической (или эллипсоидальной [14]) ферромагнитной частицы с прямой вихревой нитью, показано усиление пиннинга по сравнению с немагнитными дефектами. Существует также большое число экспериментальных работ [15, 16], показывающих усиление или подавление пиннинга магнитными частицами (в работе [15] использовали взвесь наночастиц железа в сплаве Hg–13% In, в более поздних — непосредственно магнитные частицы, помещенные внутрь сверхпроводника, такого как  $MgB_2$ ). Следует отметить, что большинство работ по исследованию влияния ферромагнетизма на магнитные свойства сверхпроводника носит экспериментальный характер. С другой стороны, существуют аналитические решения, но полученные только для некоторых типичных частных случаев и неприменимые в случае произвольных конфигураций магнитных дефектов.

Высокотемпературные сверхпроводники — материалы с ярко выраженной анизотропией. Данная характеристика влияет на жесткость вихревой нити в образце, что влияет на подвижность и взаимодействие вихрей и, следовательно, на

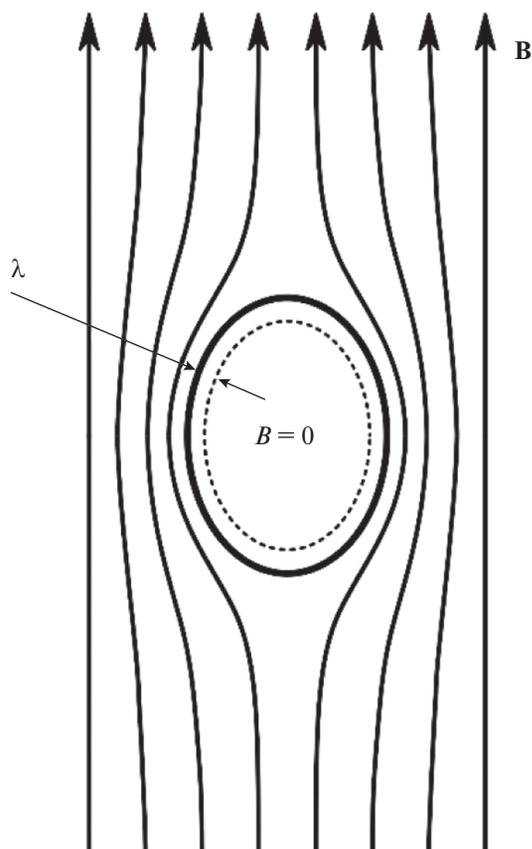


Рис. 1. Проникновение магнитного поля в сверхпроводник.

фазовую диаграмму сверхпроводника. Фактически, ВТСП являются слоистыми структурами, в которых сверхпроводящие слои (отождествляемые с плоскостями  $\text{CuO}_2$ ) чередуются со слоями, обладающими слабой сверхпроводимостью (или практически несверхпроводящими), отождествляемыми с промежуточными интеркалирующими областями.

Важен также случай, когда магнитное поле направлено под некоторым углом к сверхпроводящим плоскостям. Здесь реализуются сложные структуры, состоящие из абрикосовских и джозефсоновских вихрей. В экспериментах наблюдаются немонотонные зависимости критического тока сверхпроводника от наклона магнитного поля, при этом на данных зависимостях наблюдаются дополнительные максимумы при углах, отличных от  $0$  и  $\pi/2$ , не имеющие удовлетворительного объяснения.

Как уже было упомянуто выше, слоистый высокотемпературный сверхпроводник в смешанном состоянии представляет собой сложную систему с большим числом степеней свободы. Наличие значительного числа взаимодействующих друг с другом и с дефектами вихревых нитей за-

трудняет аналитическое описание системы в условиях (в общем случае) произвольного распределения дефектов и при произвольном изменении внешних параметров. Поэтому особый интерес приобретают методы численного моделирования вихревых состояний в ВТСП, такие как Монте-Карло и молекулярная динамика. Данные методы позволяют рассчитывать физические характеристики системы в широком диапазоне различных параметров и показали свою эффективность при исследовании вихревых структур в ВТСП (фазовые переходы, классическое и квантовое плавление [17–21]), при расчете намагниченности, токнесущих характеристик и структурных переходов в случаях хаотического и периодического распределения дефектов [22–28].

Обзор построен следующим образом. В разд. 2 поясняются основные понятия, связанные с вихревой решеткой. В разд. 3 и 4 описывается реализация методов молекулярной динамики и Монте-Карло в применении к вихревой системе и результаты расчетов в отсутствие магнитных дефектов, разд. 4 и 5 посвящены теоретическим и экспериментальным данным по композитным структурам ферромагнетик-сверхпроводник. В заключении кратко сформулированы основные результаты.

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

### Сверхпроводник второго рода в магнитном поле.

Прежде чем переходить к рассмотрению исследований, направленных на улучшение технических характеристик сверхпроводящих образцов, опишем вкратце магнитные свойства сверхпроводников второго рода. Для сверхпроводников характерно наличие эффекта Мейсснера — полного выталкивания магнитного поля из объема сверхпроводника. Магнитное поле проникает в сверхпроводник только на небольшую глубину  $\lambda$  от поверхности — лондоновская глубина проникновения (рис. 1). Согласно теории Гинзбурга—Ландау, для сверхпроводников второго рода характерна отрицательная энергия границы раздела между нормальной и сверхпроводящей фазами, так что в магнитном поле при определенных условиях им выгодно расслоиться на области сверхпроводящей и нормальной фаз. У этих сверхпроводников отсутствует полный эффект Мейсснера: магнитное поле экранируется сверхпроводником, но только до определенного значения, называемого первым критическим полем  $H_{c1}$ . Согласно точному

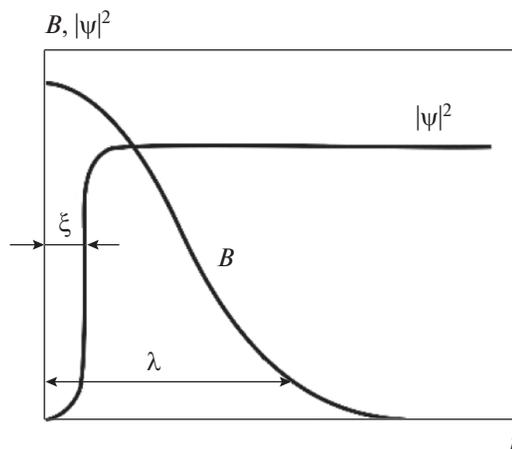
расчету,  $H_{c1} = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} (\ln \kappa + 0.50)$  [29]. Выше этого

значения сверхпроводник переходит в смешанное состояние (см. фазовую диаграмму на рис. 2), и магнитное поле проникает в образец в виде квантов магнитного потока — вихрей Абрикосова, вытя-



**Рис. 2.** Фазовая диаграмма сверхпроводника второго рода. Область между  $H_{c2}$  и  $H_{c3}$  является областью поверхностной сверхпроводимости.

нутых вдоль направления внешнего поля. Каждый вихрь имеет нормальную сердцевину, в которой сверхпроводящий параметр порядка  $\psi$  существенно подавлен и в центре вихря равен 0. Структура изолированного вихря показана на рис. 3. Магнитное поле вихря спадает на расстоянии порядка  $\lambda$ ; полный магнитный поток, связанный с отдельным вихрем, равен  $\Phi_0 = \hbar c/e = 2.07 \times 10^{-7} \text{ Г см}^2$ . В области радиусом порядка длины когерентности  $\xi$  от центра вихря сверхпроводящий параметр порядка существенно подавлен (рис. 3). Параметр Гинзбурга–Ландау  $\kappa = \lambda/\xi$  определяет род сверхпроводника. Сверхпроводники второго рода характеризуются параметром  $\kappa > 1/\sqrt{2}$ , первого –  $\kappa < 1/\sqrt{2}$ . Случай  $\kappa = 1/\sqrt{2}$  является граничным; сверхпроводники, для которых  $\kappa$  находится вблизи этого значения, формируют т.н. промежуточное смешанное состояние, при котором области в мейсснеровском состоянии сосуществуют с вихревой решеткой, вихревыми цепочками, кластерами и т.д. Интересно, что вблизи граничного значения  $\kappa$  наблюдается притяжение между абрикосовскими вихрями. Следует отметить работы [30–32], посвященные систематическому экспериментальному и теоретическому изучению подобных сверхпроводников. В частности, в [30] получена фазовая диаграмма на плоскости  $\kappa$ – $H$  ( $H$  – внешнее магнитное поле), включающая гексагональную решетку одноквантовых вихрей, вихревые кластеры, многоквантовые вихри, а также сверхпроводящие островки в нормальной фазе. Ограничимся далее случаем  $\kappa \gg 1/\sqrt{2}$  (этому условию удовлетворяют большинство ВТСП), когда в сверхпроводнике в магнитном поле формируется решетка одноквантовых абрикосовских вихрей.



**Рис. 3.** Для изолированного вихря: зависимость магнитного поля  $H$  и параметра порядка  $|\psi|^2$  от расстояния до центра вихря.

Потенциал взаимного отталкивания пары вихрей  $i$  и  $j$  имеет вид

$$U(r_{ij}) = d \frac{\Phi_0^2}{8\pi^2 \lambda^2} K_0 \left( \frac{r_{ij}}{\lambda} \right), \quad (1)$$

где  $K_0$  – функция Макдональда,  $r_{ij}$  – расстояние между вихрями,  $d$  – толщина сверхпроводящего слоя. При дальнейшем увеличении внешнего поля вихри начинают перекрываться нормальными сердцевинами, и сверхпроводник полностью переходит в нормальное состояние. Это поле равно  $H_{c2} = \Phi_0/2\pi\xi^2$  и называется вторым критическим. До значений внешнего поля  $H_{c3} = 1.69H_{c2}$  (третье критическое поле) сверхпроводимость сохраняется в тонком поверхностном слое (рис. 2).

В чистом (бездефектном) сверхпроводнике в результате взаимного отталкивания вихри образуют гексагональную решетку Абрикосова (рис. 4). Плотность вихрей  $n$  в чистом сверхпроводнике однородна по всему образцу, при этом магнитное поле внутри образца равно  $B = n\Phi_0$ . Тогда намагниченность сверхпроводника в смешанном состоянии определяется как  $-4\pi M = H - B$ , где  $H$  – внешнее магнитное поле.

**Фазовые переходы в вихревой решетке. Плавление решетки вихрей.** Как показывают теоретические и экспериментальные исследования, гексагональная решетка не является единственным состоянием вихревой системы в ВТСП. При повышении температуры в чистых монокристаллах высокого качества с небольшим числом центров пиннинга наблюдается плавление вихревой решетки и фазовый переход первого рода “вихревая решетка–вихревая жидкость” (vortex liquid). Во многих работах было убедительно показано, что в присут-

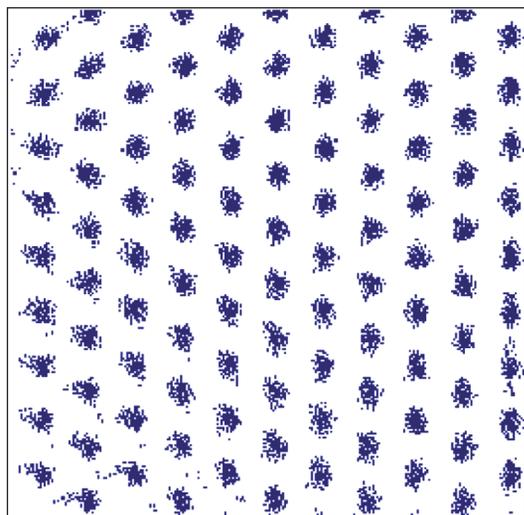


Рис. 4. Гексагональная вихревая решетка (расчет Монте-Карло).

ствии дефектов меняется картина фазовых превращений. При наличии большого количества центров пиннинга плавление происходит через фазу вихревого стекла (vortex glass), плавление которого, в свою очередь, является фазовым переходом второго рода.

Фазовый переход из вихревой жидкости в вихревое стекло в трехмерном случае имеет 2 признака [33]: исчезновение линейного сопротивления и экранировка параллельного ВТСП-слоя магнитного поля. В работе [33] данный фазовый переход исследовали на примере сверхпроводника YBCO в наклонном магнитном поле. При силь-

ном пиннинге, когда дефекты случайно распределены в плоскости сверхпроводящего слоя и вытянуты в направлении, перпендикулярном слоям (колончатые дефекты), наблюдается переход вихревой решетки в фазу Bose glass. В периодической системе центров пиннинга также возможен фазовый переход вихревая жидкость – вихревое стекло [17]. В этом случае при низкой температуре плавление имеет 3 стадии: сначала вдали от центров пиннинга начинает плавиться гексагональная решетка, далее вокруг дефектов образуются островки вращающейся решетки, и наконец происходит полный расплав решетки (фаза вихревой жидкости). Авторы работы [34] разделили твердую фазу под линией плавления вихревой решетки на две: в первой фазе вихри неподвижны (“слаборазупорядоченное брегговское стекло”), во второй вихри начинают двигаться и впоследствии превращаются в вихревую жидкость (“сильноразупорядоченное джозефсоновское стекло”).

Типичные двумерные вихревые конфигурации, рассчитанные в работе [18], показаны на рис. 5. Характер плавления несколько различен при сильном и слабом пиннинге. Сильный пиннинг (в случае [18] глубина потенциальной ямы дефекта в 30 раз превышала глубину для слабого пиннинга, соответствующую реальным экспериментальным данным) приводит к смещению точки перехода из гексагональной решетки во вращающуюся в сторону более низких температур и в целом к расширению температурного диапазона вращающейся фазы. При слабом пиннинге и низкой температуре наблюдается жесткая гексагональная решетка, однако не все дефекты заняты вихрями (полное заполнение наблюдалось бы

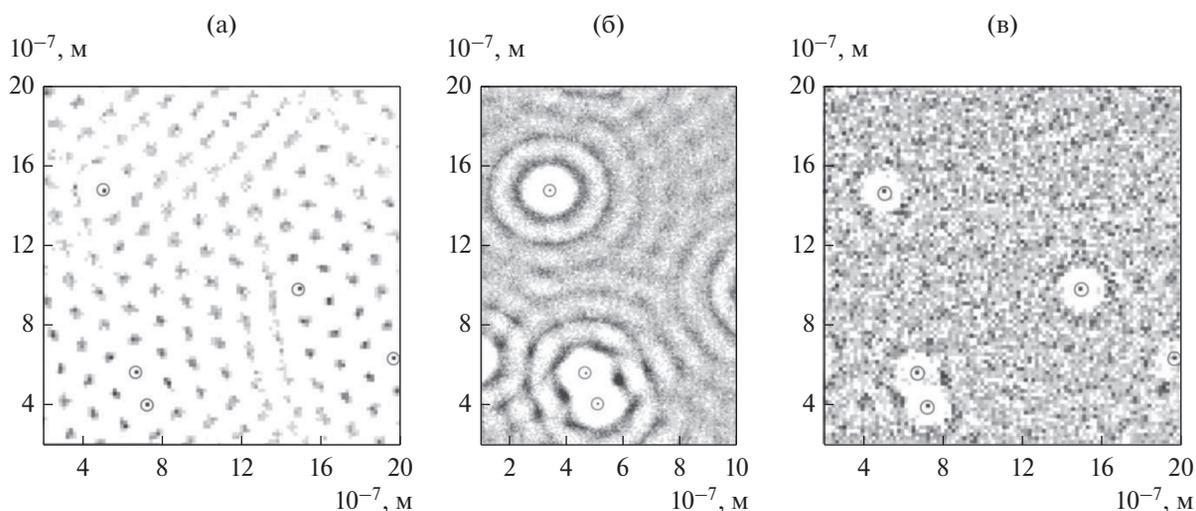
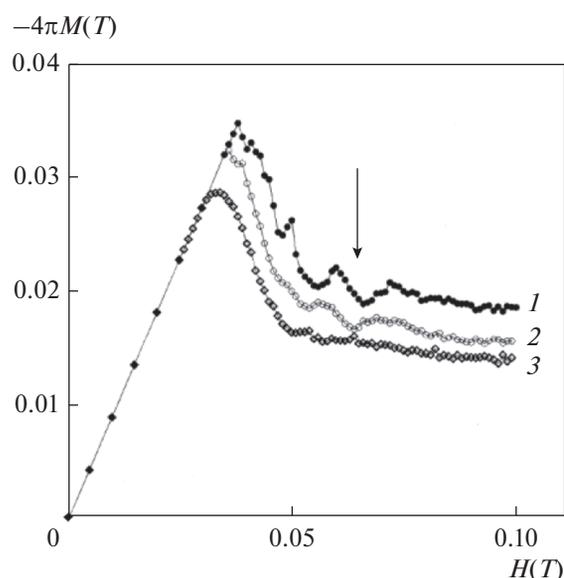


Рис. 5. Динамика плавления вихревой решетки при сильном пиннинге (глубина дефекта 0.115 эВ). (а)  $T = 2$  К; (б)  $T = 15$  К; (в)  $T = 70$  К [18]. Яркость точек соответствует локальной величине магнитного поля. На рис. (а) изображена гексагональная решетка, наблюдаемая при низкой температуре, на рис. (б) – фаза вращающейся решетки, на рис. (в) – вихревая жидкость.

при идеальном соответствии решетки дефектов и гексагональной решетки вихрей). При повышении температуры уже все дефекты оказываются заняты. В случае, если дефекты распределены по образцу нерегулярно, они “растаскивают” вихревую решетку, ломая ее вдали от себя. При дальнейшем повышении температуры островки гексагональной решетки поворачиваются вокруг дефекта как оси вращения, образуя концентрические круги. Затем вихри начинают срывать с дефектов, когерентные области разрушаются и наблюдается расплавленная вихревая жидкость. Температура плавления решетки определяется по критерию Линдемана (сравнение величины среднеквадратичного отклонения вихрей с периодом решетки). Также температуру плавления можно определить по особенности на температурной зависимости теплоемкости [17].

**Инверсная кристаллизация.** При определенных условиях в сверхпроводнике удается наблюдать достаточно редкое явление – инверсную кристаллизацию (упорядочение вихревой системы с повышением температуры, [25]). Инверсную кристаллизацию наблюдали в системах полимеров [35] и в некоторых магнитных материалах [36]. В вихревой системе её наблюдали экспериментально в работе [37] при хаотическом пиннинге. В ряде случаев с этим явлением связывают т.н. second peak на кривой намагниченности сверхпроводника [37]. В [25] инверсную кристаллизацию наблюдали при наличии периодической решетки дефектов.

Для моделирования в работе [25] была взята гексагональная решетка дефектов. Как было показано авторами [38], упорядоченные конфигурации вихрей возникают только при определенном соотношении между числом вихрей и числом дефектов  $N_v/N_d$ , а именно  $N_v/N_d = 1, 2, 3, 4, 7, 9, 12, 13, 16, 19, 21, 25, 28$ . Авторы [25] наблюдали пики на численно рассчитанной кривой намагниченности сверхпроводника (рис. 6) при некоторых значениях этого соотношения ( $N_v/N_d = 2, 3, 4$ ). При увеличении внешнего магнитного поля сформировавшаяся жесткая решетка вихрей препятствует проникновению в образец новых вихрей, что приводит к возрастанию намагниченности. При дальнейшем росте поля вход дополнительных вихрей становится возможен, упорядоченная структура разрушается и намагниченность падает. Таким образом, упорядоченная структура наблюдается в основании пика на кривой намагниченности. При увеличении температуры уменьшается поле перегрева мейсснеровского состояния и кривые намагниченности идут ниже. При этом пики смещаются в сторону более слабых полей, а их величина уменьшается до полного сглаживания. Поскольку положение пиков меняется с температурой, возможна ситуация, когда область убывания



**Рис. 6.** Кривые намагниченности ВТСП с гексагональной решеткой точечных дефектов при разных температурах: 1 –  $T = 1$  К, 2 –  $T = 5$  К, 3 –  $T = 10$  К. Стрелкой показано магнитное поле, при котором наблюдается инверсная кристаллизация вихревой системы [25]. По вертикальной оси отложена намагниченность  $-4\pi M = H - B$ .

при низкой температуре совпадет с основанием пика при более высокой температуре. Тогда при повышении температуры удастся наблюдать инверсную кристаллизацию. Подбирая глубину потенциальной ямы дефектов, можно создать условия для появления данного эффекта. Пики на кривой намагниченности наблюдали и в случае наличия ферромагнитных дефектов [39].

Плавление вихревой решетки представляло серьезный интерес в 2000-е гг. [38–44]. Так, исследовали квантовое плавление вихревой решетки [38], фазовую диаграмму YBCO с колончатыми дефектами в магнитном поле, перпендикулярном направлению дефектов [33], измеряли транспортные характеристики YBCO в поле, параллельном сверхпроводящим слоям [41]. Плавление решетки вихрей исследовали и в более поздних работах – как численно (методом молекулярной динамики [45–47]), так и экспериментально [48]. В [48] исследовали плавление вихревой решетки в органическом квазидвумерном ВТСП. Численные расчеты проводят уже для стопки сверхпроводящих плоскостей с учетом межслоевого взаимодействия.

**Резистивное состояние сверхпроводника.** Как уже было упомянуто во введении, в присутствии транспортного тока  $j$  на вихри действует сила  $\mathbf{f} = [j\Phi_0]/c$ . Если сила тока превышает критическую величину (обусловленную эффективностью закрепления вихрей на дефектах), наблюдается

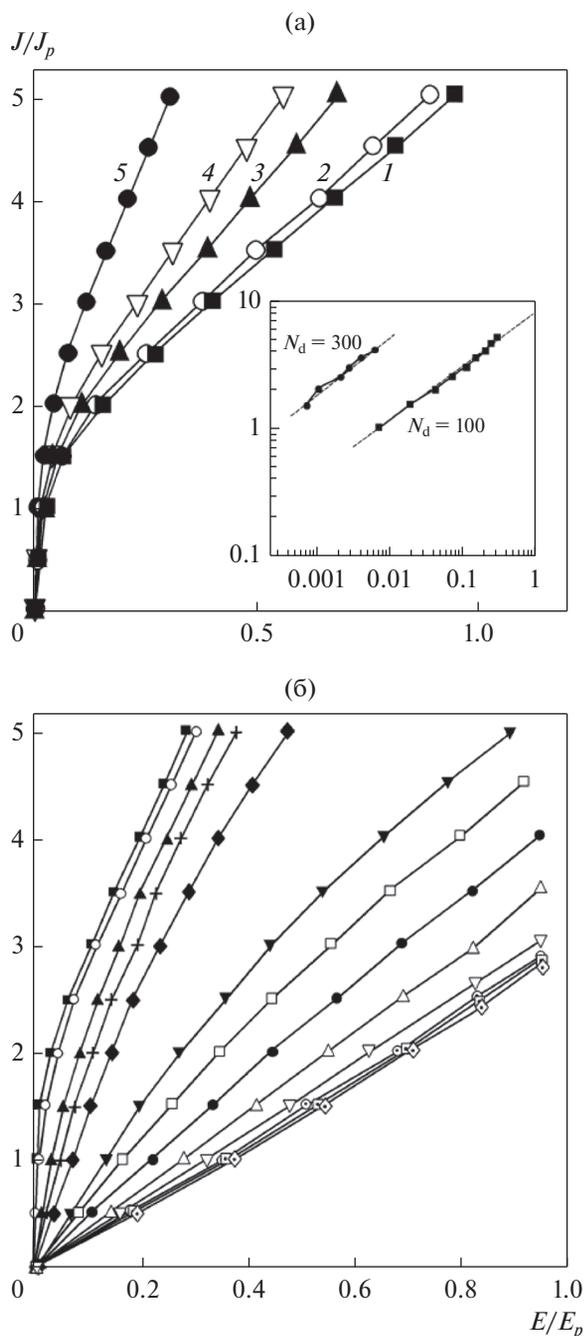


Рис. 7. Типичные ВАХ ВТСП (а) при фиксированной температуре и различном числе дефектов и (б) при фиксированном числе дефектов и различной температуре [17].

течение вихревой решетки, что означает потери энергии в сверхпроводнике и переход его в резистивное состояние. Когда вихри закреплены на дефектах, линии тока обтекают их сердцевин, однако при движении вихрей картина меняется.

К диссипации энергии приводят два механизма [49]. Первый механизм связан с тем, что, двигаясь через образец, вихри пересекают линии то-

ка (модель Бардина–Стефана, [50]). Следовательно, через нормальную сердцевину вихря протекает часть транспортного тока. Это возможно только если в сердцевине вихря присутствует электрическое поле. Следовательно, в ней отлична от нуля и мощность тепловыделения  $Ej$ . Второй механизм связан с тем, что, когда вихрь проходит через какую-либо точку образца, в ней происходит фазовый переход из сверхпроводящего состояния в нормальное или наоборот. Известно, что такой процесс является обратимым и не сопровождается диссипацией энергии, но только если он происходит бесконечно медленно. Поскольку скорость вихрей конечна, часть разности свободных энергий нормального и сверхпроводящего состояний переходит в тепло. Возникшее течение магнитного потока по закону электромагнитной индукции создает электрическое поле  $E$ . Пусть  $v$  – установившаяся скорость течения вихрей в направлении силы Лоренца (перпендикулярно транспортному току и полю). Работа в единицу времени, затраченная внешним источником на перемещение вихрей, равна  $F_L v$ , где  $F_L$  – плотность силы Лоренца. Это и есть та энергия, которая выделяется в единицу объема сверхпроводника в единицу времени,  $F_L v = Ej$ . Так как  $F_L = jB/c$ , то  $E = Bv/c$ . Можно определить сопротивление течения потока  $\rho_f = E/j$ . Оценка скорости течения вихрей (см., напр., [51]) дает  $v = \frac{cE}{B} \sim 10^{-2}$  см/с (при поле внутри сверхпроводника  $B \sim 1000$  Гс и напряженности электрического поля  $E \sim 1$  мкВ/см).

Так как движение вихрей сопровождается диссипацией энергии, то можно считать, что вихри движутся в вязкой среде, и ввести коэффициент вязкого трения  $\eta$ :  $f_{тр} = -\eta v$ , где  $f_{тр}$  – сила трения, действующая на один вихрь, движущийся со скоростью  $v$ . Расчеты инертной массы электрона, выполненные в работах [52, 53], дают значение  $\sim 10^3 m_e$  на единицу длины вихря, что означает время релаксации для вихря менее  $10^{-12}$  с и дает возможность пренебречь в уравнении движения массой вихря. Таким образом,  $f_{тр} + f_L = 0$ , откуда  $\rho_f = \Phi_0 B / c^2 \eta$  или  $\rho_n = \Phi_0 H_{c2} / c^2 \eta$ , где  $\rho_n$  – удельное сопротивление в нормальном состоянии. Типичные вольт-амперные характеристики (ВАХ) ВТСП, рассчитанные в работе [17], показаны на рис. 7. Видно, что при возрастании концентрации дефектов и приближении температуры к критической ВАХ выпрямляется, демонстрируя омическое поведение. Начальная часть вольт-амперных характеристик в двойном логарифмическом масштабе строго линейна, что указывает на наличие крипа магнитного потока. Крип магнитного потока, приводящий к явлениям релаксации тока и намагниченности в ВТСП, наблюдается в широ-

ком интервале  $j < j_c$ . Теория и эксперименты, связанные с данным явлением, изложены в исчерпывающем обзоре [54]. Наличие области термоактивированного течения магнитного потока подтверждается также расчетами зависимости дифференциального сопротивления от температуры [17]. Поведение ВАХ, как показывают расчеты, зависит от фазового состояния системы. На рис. 76 можно видеть две группы зависимостей, разделенных температурной границей  $T_{m2} = 70$  К: при  $T < T_{m2}$ , как показывает визуальный анализ распределения вихревой плотности, реализуется вращающаяся решетка, а при  $T > T_{m2}$  — вихревое стекло.

**Трехмерный анизотропный сверхпроводник. Вихревая решетка в магнитном поле, параллельном оси анизотропии.** В общем случае сверхпроводники второго рода являются анизотропными веществами, что еще больше усложняет вихревую решетку. Анизотропия означает зависимость эффективной массы электрона от направления в кристалле. Большинство известных ВТСП имеют слоистую структуру, представляющую собой стопку сверхпроводящих плоскостей  $\text{CuO}_2$ , разделенных изолирующими промежутками. Структура вихревой решетки определяется соотношением двух параметров: длины когерентности в направлении, перпендикулярном слоям, и расстоянием между слоями [55].

Согласно [51], первое уравнение Гинзбурга—Ландау для анизотропного сверхпроводника имеет вид:

$$\alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi - \frac{\hbar^2}{2}\left(\nabla - i\frac{2e}{\hbar c}A\right)\frac{1}{m}\left(\nabla - i\frac{2e}{\hbar c}A\right)\psi = 0, \quad (2)$$

где  $1/m$  — тензор эффективной массы электрона. При этом  $m_c$  — эффективная масса вдоль оси  $c$ ,  $m_{ab}$  — эффективная масса в плоскости  $ab$ .

$\xi_i^2(T) = \hbar^2/2m_i|\alpha(T)|$  — длина когерентности вдоль  $i$ -й оси. Соотношение для термодинамического критического поля может быть записано в виде:

$2\sqrt{2}H_c(T)\xi_i(T)\lambda_i(T) = \Phi_0$ . Следует отметить, что  $\lambda_i$  описывает затухание экранирующих сверхпроводящих токов вдоль  $i$ -й оси, а не магнитного поля, параллельного  $i$ -й оси. Радиус сердцевин (кора) абрикосовского вихря в магнитном поле, направленном вдоль оси  $a$ , в анизотропном случае будет  $\xi_{ab}$  в плоскости  $ab$  и  $\xi_c$  в направлении  $c$  (рис. 8). Второе критическое поле:

$$H_{c2\parallel c} = \Phi_0/2\pi\xi_{ab}^2, \quad H_{c2\parallel ab} = \Phi_0/2\pi\xi_{ab}\xi_c. \quad (3)$$

Так как  $H_{c1} \sim 1/\lambda$ , параметр анизотропии  $\gamma$  определяется следующим образом:

$$\gamma = \left(\frac{m_c}{m_{ab}}\right)^{1/2} = \frac{\lambda_c}{\lambda_{ab}} = \frac{\xi_{ab}}{\xi_c} = \frac{H_{c2\parallel ab}}{H_{c2\parallel c}} = \frac{H_{c1\parallel c}}{H_{c1\parallel ab}}. \quad (4)$$

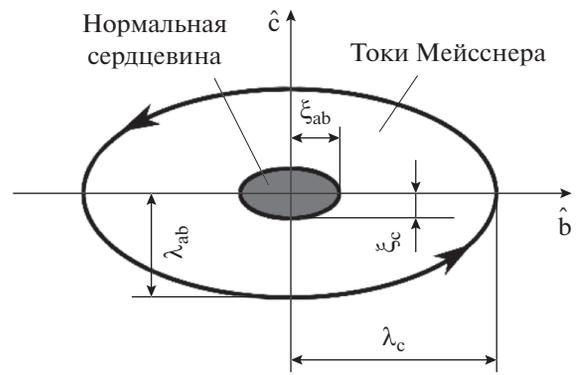


Рис. 8. Схематическое изображение вихря с магнитным потоком вдоль оси  $a$ .

Значение  $\gamma$  для YBCO составляет  $\sim 7$ , для BSCCO  $\gamma \sim 150$ . Угловая зависимость второго критического поля имеет вид

$$\left(\frac{H_{c2}(\theta)\sin\theta}{H_{c2\parallel c}}\right)^2 + \left(\frac{H_{c2}(\theta)\cos\theta}{H_{c2\parallel ab}}\right)^2 = 1, \quad (5)$$

где  $\theta$  — угол между направлением магнитного поля и плоскостью  $ab$ .

Поскольку  $\xi_c(T) \approx \xi_c(0)(1 - T/T_c)^{1/2}$ , вблизи  $T_c$  теория Гинзбурга—Ландау в анизотропном пределе справедлива всегда. Однако при понижении температуры длина когерентности уменьшается и, как показывает соответствующий расчет, при  $T^*$ , таком, что  $\xi_c(T^*) = d_s/\sqrt{2}$ , где  $d_s$  — расстояние между сверхпроводящими плоскостями,  $H_{c2}$  расходится и наблюдается 3D—2D-переход. Такой слоистый сверхпроводник описывается моделью Лоренса—Дониака [56], в которой вторая производная параметра порядка вдоль оси, перпендикулярной плоскостям, заменяется разностью сверхпроводящих волновых функций в соседних слоях. Свободная энергия в этой модели:

$$F = \sum_n \int \left[ \alpha|\psi_n|^2 + \frac{1}{2}\beta|\psi_n|^4 + \frac{\hbar^2}{2m_{ab}} \times \left( \left| \frac{\partial\psi_n}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial\psi_n}{\partial y} \right|^2 \right) + \frac{\hbar^2}{2m_c d^2} |\psi_n - \psi_{n-1}|^2 \right]. \quad (6)$$

Варьирование по  $\psi_n^*$  дает уравнение Лоренса—Дониака:

$$\alpha\psi_n + \beta|\psi_n|^2\psi_n - \frac{\hbar^2}{2m_{ab}}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi_n - \frac{\hbar^2}{2m_c d^2}(\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}) = 0. \quad (7)$$

Вихревая нить в таком квазидвумерном сверхпроводнике может быть представлена в виде стоп-

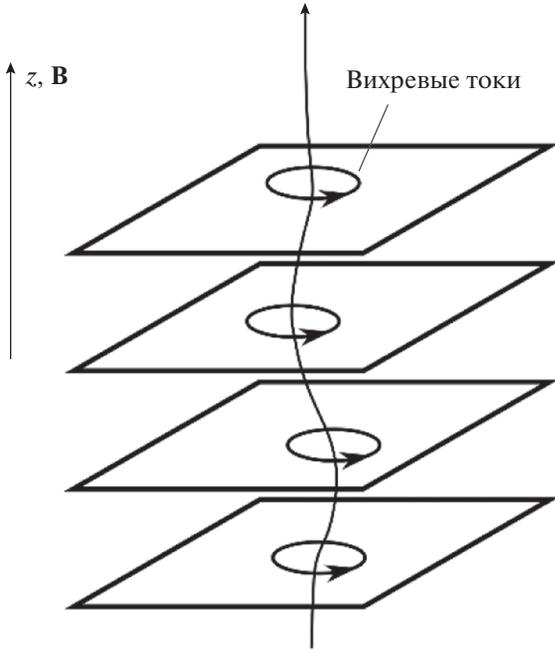


Рис. 9. Вихрь в слоистом сверхпроводнике.

ки взаимодействующих слоевых вихрей – панкейков (рис. 9). Панкейки в соседних слоях связаны джозефсоновским взаимодействием, его величина определяет жесткость вихревой нити. Исследование влияния анизотропии на свойства сверхпроводника приобретает важное значение, поскольку могут быть созданы слоистые структуры, анизотропией которых можно управлять. В классической работе [57] наблюдали 3D–2D-переход в слоистой структуре N–bGe. Систематически увеличивая толщину слоя Ge и определяя температурную зависимость  $H_{c2}$ , авторы выявили следующие случаи: 1) анизотропный 3D-случай,  $H_{c2} \sim (T_c - T)$ ; 2) 2D-случай  $H_{c2} \sim (T_c - T)^{1/2}$ , 3) 3D–2D-переход, при котором  $H_{c2} \sim (T_c - T)$  вблизи  $T_c$  при  $\xi_c \gg d_s$  и переходит в  $H_{c2} \sim (T_c - T)^{1/2}$  при понижении температуры, где  $\xi_c$  становится меньше  $d_s$ . Стоит отметить также работы [58, 59], в которых была продемонстрирована зависимость критической температуры YBCO в слоистой структуре YBCO–PrBCO от толщины изолирующего PrBCO. Аналогичные результаты были получены авторами [58] для сверхпроводящих слоев  $Mo_{77}Ge_{23}$ , разделенных слоями изолирующего Ge.

**Вихревая решетка в слоистом ВТСП в наклонном поле.** Впервые вихрь в одиночном сверхпроводящем слое толщиной много меньше глубины проникновения магнитного поля рассмотрел Pearl [60] в 1964 г. В случае тонкой пленки экранирующие токи могут существовать только в тонком слое толщины  $d \ll \lambda$ , в то время как магнитное поле распре-

делено во всем трехмерном пространстве. Поэтому экранировка оказывается слабее, а эффективная длина экранировки (совпадающая с эффективным размером вихря)  $\Lambda = 2\lambda^2/d$  [51, 61]. Позднее Clem [62] рассмотрел стопку таких плоскостей. Если сверхпроводящий слой содержит один панкейк с квантом потока  $\Phi_0 = \bar{z}\Phi_0$ , то с использованием решения Pearl, можно рассчитать величину сверхпроводящих экранирующих токов  $K_\phi$  (в цилиндрических координатах) и энергию взаимодействия двух панкейков:

$$K_\phi = (c\Phi_0/8\pi\Lambda^2)[H_1(\rho/\Lambda) - Y_1(\rho/\Lambda) - 2/\pi]; \quad (8)$$

$$U_0(\rho) = (\Phi_0^2/8\pi\Lambda)[H_0(\rho/\Lambda) - Y_0(\rho/\Lambda)], \quad (9)$$

где  $H, Y$  – функция Струве и функция Бесселя второго рода соответственно. В предельных случаях энергия взаимодействия принимает вид (10). За  $\rho$  обозначено расстояние между центрами вихрей в плоскости слоя.

Магнитное поле двумерного вихря в тонкой пленке показано на рис. 10а. Для одиночного панкейка в стопке сверхпроводящих плоскостей соответствующий расчет дает уравнение (11) для слоя, в котором находится панкейк ( $n = 0$ ), и уравнение (12) для остальных слоев ( $n \neq 0$ ). Здесь

$$z_n = nd \text{ и } r_n = \sqrt{\rho^2 + z_n^2}.$$

$$U_0(\rho) \approx (\Phi_0^2/4\pi^2\Lambda) \ln(\Lambda/\rho), \quad \rho \ll \Lambda; \quad (10)$$

$$U_0(\rho) \approx \Phi_0^2/4\pi^2\rho, \quad \rho \gg \Lambda;$$

$$K_\phi(\rho, 0) = \frac{c\Phi_0}{4\pi^2\Lambda\rho} \left[ 1 - \frac{\lambda_{ab}}{\Lambda} \left( 1 - \exp\left(-\frac{\rho}{\lambda_{ab}}\right) \right) \right]; \quad (11)$$

$$K_\phi(\rho, z_n) = -\frac{c\Phi_0\lambda_{ab}}{4\pi^2\Lambda^2\rho} \times \left[ \exp(-|z_n/\lambda_{ab}|) - \exp(-r_n/\lambda_{ab}) \right]. \quad (12)$$

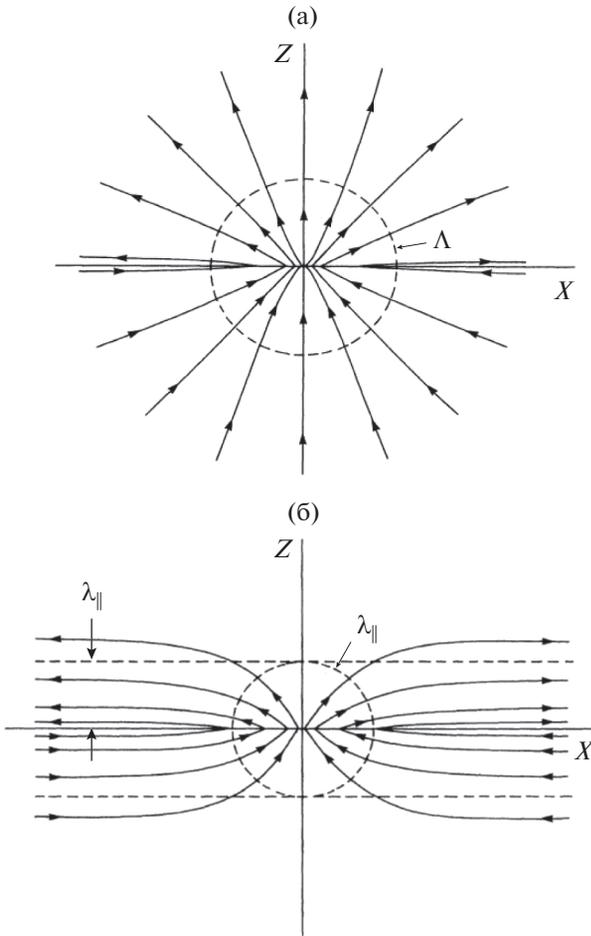
Магнитное поле  $b$ , создаваемое вихрем во всем пространстве, определяется уравнением (13) и показано на рис. 10б. Здесь  $\lambda_{ab}$  – характерная длина, на которой затухают токи, текущие в плоскости сверхпроводящих слоев:

$$b_z(\rho, z) = \frac{\Phi_0}{2\pi\Lambda r} \exp(-r/\lambda_{ab}),$$

$$b_\rho(\rho, z) = \frac{\Phi_0}{2\pi\Lambda\rho} \times \left[ z/|z| \exp(-|z|/\lambda_{ab}) - z/r \exp(-r/\lambda_{ab}) \right], \quad (13)$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}.$$

Магнитные поля отдельных слоевых вихрей (панкейков), просуммированные по бесконечной стопке расположенных строго друг под другом панкейков, дают магнитное поле  $B(r) \sim K_0(r/\lambda)$



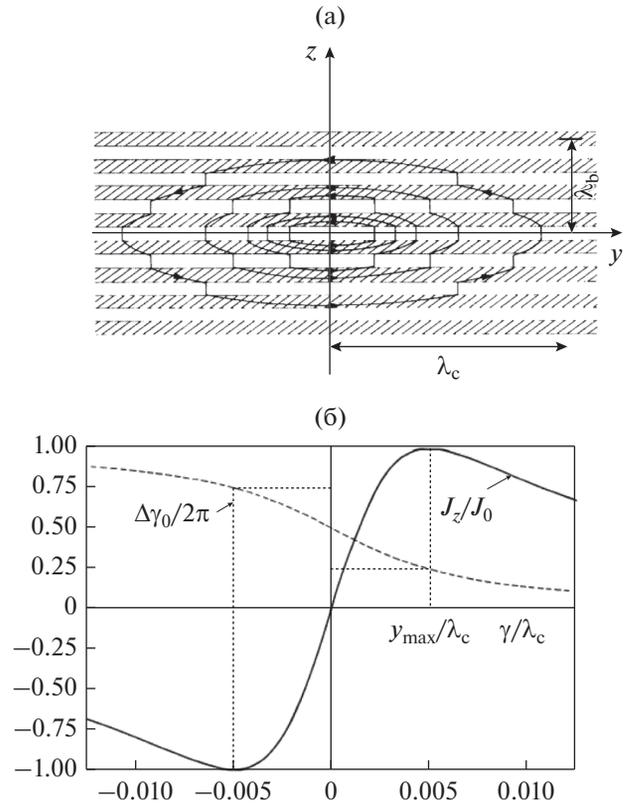
**Рис. 10.** (а) Магнитное поле, создаваемое во всем пространстве уединенным панкейком в тонкой сверхпроводящей пленке, (б) магнитное поле, создаваемое уединенным панкейком в стопке сверхпроводящих плоскостей [62].

( $K_0$  – функция Макдональда), как для прямой вихревой нити;  $r$  – расстояние до центра вихря. В рамках данной модели Слем также рассчитал приращение энергии прямой стопки панкейков при смещении одного из них на расстояние  $r$  от оси вихревой нити (где  $C = 0.5772$  – постоянная Эйлера):

$$U(\rho) = \left(\frac{\Phi_0^2}{4\pi^2 \Lambda}\right) [C + \ln(\rho/2\lambda_{ab}) + K_0(\rho/\lambda_{ab})]. \quad (14)$$

Этот результат использован при моделировании трехмерной вихревой решетки слоистого ВТСП [63–65] в качестве приближенного выражения для энергии межслоевого электромагнитного взаимодействия панкейков.

Если магнитное поле параллельно сверхпроводящим слоям, то в межслоевых промежутках рождаются джозефсоновские вихри (рис. 11а). Слем в работе [66] рассчитал магнитное поле, разность фаз между СП-слоями и экранирующие токи, связанные с этим вихрем (рис. 11б), а также



**Рис. 11.** (а) Схематическое изображение джозефсоновского вихря и (б) зависимость разности фаз между СП-слоями  $\Delta\gamma_0$  и  $z$ -компоненты тока от координаты  $y$ , отсчитанной вдоль СП-слоев [66]. На рис. (а) магнитное поле перпендикулярно плоскости рисунка.

коэффициент вязкости при движении джозефсоновского вихря под действием транспортного тока. Транспортные свойства сверхпроводника с джозефсоновскими вихрями исследовали также в [67, 68]. Рассматривая ВТСП как бесконечную стопку джозефсоновских переходов [66] (см. также [69]), можно получить магнитное поле (на больших расстояниях от оси вихря):

$$b(y, z) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda_b\lambda_c} K_0(\tilde{\rho}), \quad \tilde{\rho}^2 = \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2, \quad (15)$$

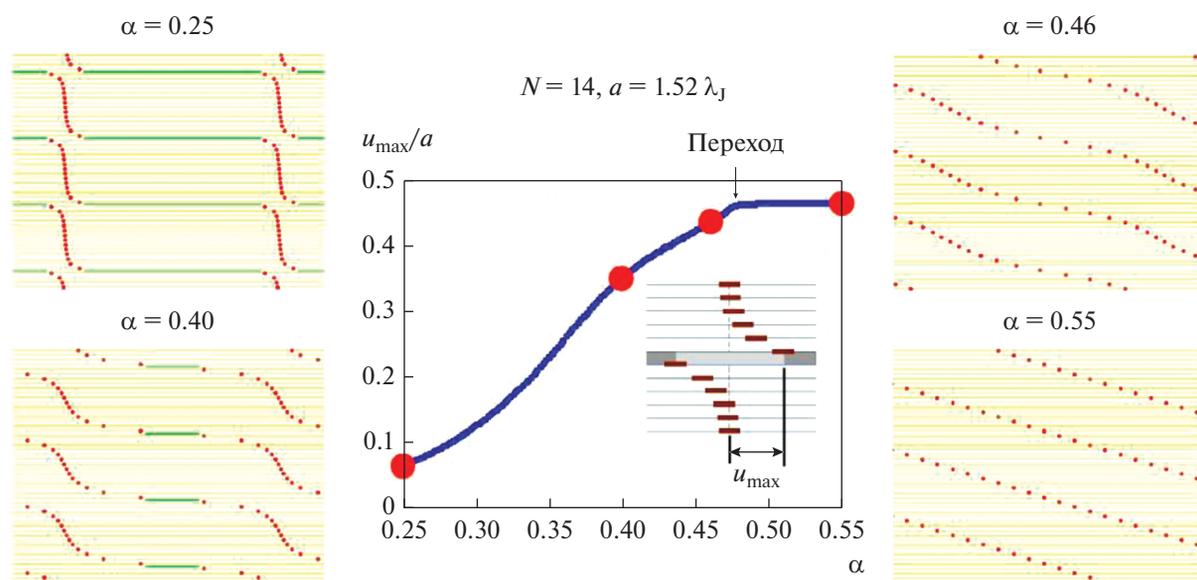
$$\tilde{y} = y/\lambda_c, \quad \tilde{z} = z/\lambda_b, \quad \lambda_b^2 = \frac{s}{d_s} \lambda_s^2,$$

$$\lambda_c^2 = (\gamma s)^2 + \frac{d_s}{s} \lambda_s^2.$$

Слем также рассчитал первое критическое поле и собственную энергию на единицу длины джозефсоновского вихря:

$$H_{c1} = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda_b(T)\lambda_c(T)} \left[ \ln \frac{\lambda_b(T)}{s} + 1.12 \right]; \quad (16)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\Phi_0}{4\pi} H_{c1} = \frac{\Phi_0^2}{16\pi^2\lambda_b(T)\lambda_c(T)} \left[ \ln \frac{\lambda_b(T)}{s} + 1.12 \right].$$



**Рис. 12.** Зависимость максимального смещения панкейков  $u_{\max}$  (определено на вставке) от  $\alpha$ .  $N$  – число слоев. Конфигурации абрикосовских (красные круги) и джозефсоновских вихрей (зеленые горизонтальные линии) при разных  $\alpha$ : слабодеформированная цепочка  $\alpha = 0.25$ , сильнодеформированная цепочка  $\alpha = 0.4$ , модулированная наклонная цепочка  $\alpha = 0.46$ , решетка наклонных вихрей Абрикосова  $\alpha = 0.55$  [71].

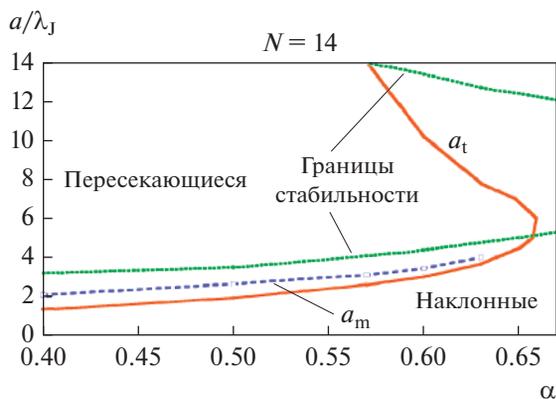
В отсутствие дефектов и абрикосовских вихрей джозефсоновские вихри образуют гексагональную решетку.

Существенно более разнообразные вихревые конфигурации наблюдаются в наклонном магнитном поле [70–76]. В присутствии компоненты поля, параллельной сверхпроводящим плоскостям, может реализоваться решетка изогнутых вихрей (kinked lattice), цепочки наклонных вихрей (tilted vortex chains), пересекающиеся решетки абрикосовских и джозефсоновских вихрей. Цепочка представляет собой двумерный массив панкейков с направлением магнитного потока, перпендикулярным сверхпроводящим слоям. При более сильном магнитном поле в плоскости слоя цепочки могут быть окружены полосами регулярной вихревой решетки. Разнообразие вихревых конфигураций обусловлено существованием двух принципиально различных типов взаимодействия панкейков в соседних слоях – джозефсоновского и электромагнитного. Как показывает расчет [71], структура вихревой решетки в слоистом ВТСП определяется параметром  $\alpha = \lambda/\lambda_J$ , представляющим собой соотношение лондоновской  $\lambda$  и джозефсоновской  $\lambda_J = \gamma d$  длин. Здесь  $\gamma$  – параметр анизотропии,  $d_s$  – расстояние между сверхпроводящими плоскостями [71]. Можно выделить два предельных случая: сильно анизотропный предел ( $\alpha < 0.4$ ) и умеренно анизотропный ( $\alpha > 0.7$ ). При больших  $\alpha$  реализуется решетка наклонных абрикосовских вихрей, при малых – пересекающиеся взаимодействующие решетки аб-

рикосовских и джозефсоновских вихрей. Работа [71] посвящена исследованию вихревой структуры при промежуточных величинах  $\alpha = 0.25–0.4$ , когда один предельный случай переходит в другой и наблюдаются цепочки из джозефсоновских и абрикосовских вихрей. Расчет показывает возможность двух фазовых переходов. Фазовый переход между цепочками вихрей и решеткой наклонных вихрей при уменьшении межвихревого расстояния  $a$  реализуется при  $\alpha \sim \lambda_J$  и  $\alpha = 0.4–0.65$  (рис. 12). При малой плотности вихрей и повышении перпендикулярной слоям компоненты поля оно проникает в сверхпроводник в виде кинков джозефсоновских вихрей. Результаты численных расчетов могут быть суммированы на фазовых диаграммах, одна из них показана на рис. 13 [71].

Теоретические исследования показывают, что между изогнутыми вихрями возникает притяжение [76]. В отдельных случаях наблюдаются более сложные структуры, такие как вихревые молекулы [76].

В магнитном поле, направленном под малым углом к слоям, наблюдается еще один тип фазового перехода: lock-in transition [72]. При определенном критическом значении перпендикулярной компоненты становятся возможны изгибы джозефсоновских вихрей (кинки). В идеальной гексагональной решетке джозефсоновских вихрей одиночный кинк существовать не может, поскольку с ним связана бесконечная энергия. Поэтому элементарным объектом проникновения магнитного поля является сдвиг всей решетки (kink wall). Величина перпендикулярного критического поля,



**Рис. 13.** Фазовая диаграмма [71]. Красная сплошная линия показывает фазовый переход в состояние наклонных цепочек вихрей. Пунктирная линия – максимальное равновесное расстояние.

при котором появляются кинки джозефсоновских вихрей:

$$H_{\text{lock-in}} = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \ln \left[ \frac{\gamma H_{c2}}{H_x} \right], \quad (17)$$

где  $H_x$  – параллельная компонента поля.

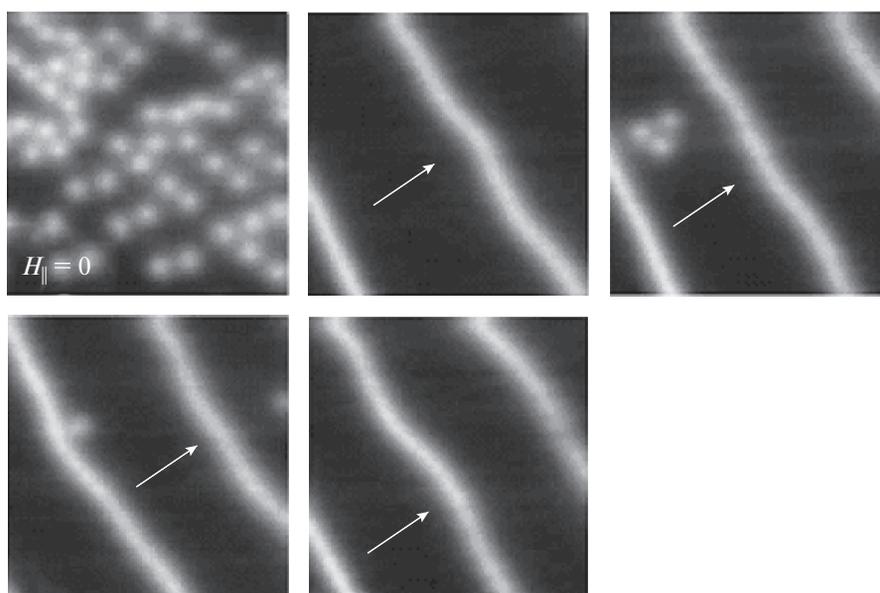
Оценка этого поля для типичных параметров ВТСП на основе висмута составляет  $H_x \sim 10^3$  Э ( $\gamma = 100$ ). Данные результаты получены в работе [72], где в рамках модели Лоренса–Дониака выполнены расчеты энергии вихревой решетки анизотропного сверхпроводника. Цепочки из джо-

зефсоновских и абрикосовских вихрей удалось также наблюдать в экспериментах [61, 77]. На экспериментальных вихревых картинах видно, что абрикосовские вихри располагаются вдоль джозефсоновских, образуя цепочки. Кроме того, наблюдаются и абрикосовские вихри, не закрепленные на джозефсоновских и расположенные вне цепочек. Изображения, полученные в работе [61] с помощью сканирующей холловской магнитометрии, показаны на рис. 14. Моделирование методом молекулярной динамики [61] дало похожие результаты.

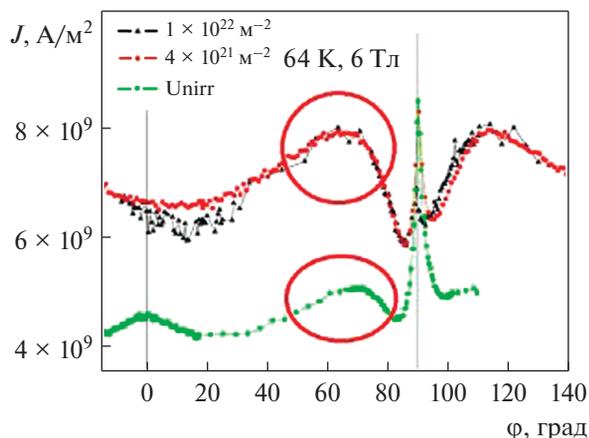
В наклонном поле наблюдаются максимумы на угловых зависимостях критического тока при углах, отличных от 0 и  $\pi/2$  (см, напр., [78]; углы отсчитываются от нормали к поверхности образца, рис. 15) Максимумы при углах 0 и  $\pi/2$  наблюдаются всегда и объясняются, как правило, пиннингом вихрей на колончатых дефектах и межплоскостных промежутках, добавочные максимумы пока не находят однозначного объяснения.

### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ – МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

Одним из наиболее мощных методов, позволяющих моделировать магнитные свойства сверхпроводника в смешанном состоянии, является метод Монте-Карло. С его помощью удается воспроизводить кривые намагниченности сверхпроводника, исследовать плавление вихревой решетки. Также данный метод позволяет моделировать перемагничивание сверхпроводника собствен-



**Рис. 14.** Последовательные вихревые конфигурации, полученные при увеличении поля, параллельного СП-слоям, от 0 до 55 Гс. Размер каждой фотографии  $26 \times 26$  мкм<sup>2</sup> [61]. В нулевом параллельном поле наблюдаются свободные абрикосовские вихри, при увеличении параллельной компоненты появляются джозефсоновские вихри, и абрикосовские располагаются вдоль них, образуя цепочки.



**Рис. 15.** Угловые зависимости критического тока от магнитного поля YBCO при различных флюенсах облучения. Заметим, что направление облучения не совпадает с направлением, в котором наблюдаются дополнительные максимумы [78].

ным полем транспортного тока и рассчитывать вольт-амперные характеристики. При этом расчеты могут быть выполнены при произвольной конфигурации центров пиннинга и произвольном внешнем магнитном поле. Ограничения скорости расчетов определяются только быстродействием и размером оперативной памяти компьютера. Далее будут последовательно рассмотрены работы, посвященные моделированию Монте-Карло, начиная от первых расчетов, использующих  $NVT$ -ансамбль, до современных, моделирующих трехмерный анизотропный ВТСП с переменным числом вихрей.

**$NVT$ -ансамбль.** Впервые метод Монте-Карло для моделирования решетки вихрей в ВТСП был применен в работе [18]. Первые расчеты были выполнены для сверхпроводящей пластины с периодическими граничными условиями по всем направлениям и с фиксированным числом вихрей. В качестве образца выступала двумерная система, имитирующая один слой висмутного ВТСП. Межплоскостное взаимодействие в сверхпроводнике становится несущественным, когда вследствие температуры или под действием магнитного поля вихревая нить распадается на отдельные панкейки в слоях, и в сверхпроводнике наблюдается фазовый 3D–2D переход. В таком состоянии теряется корреляция между панкейками в соседних слоях, и двумерная вихревая система ведет себя достаточно независимо, так что результаты можно считать усредненным откликом всего сверхпроводника. Отказ от межплоскостного взаимодействия не искажает результаты и в другом предельном случае – когда наблюдается близкая к идеальной корреляция между панкейками в вихревых нитях (это прежде всего достижимо в ВТСП с малой анизотропией, таких как YBCO).

В первых расчетах рассматривали двумерную систему абрикосовских вихрей в виде модельных взаимодействующих частиц, расположенных на прямоугольной периодической сетке. Дискретность сетки выбирается таким образом, чтобы ее период был много меньше периода вихревой решетки. Модельный гамильтониан имеет вид:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N H(r_i, r_j) n_i n_j + \sum_{i=1}^N U_p(r_i) n_i, \quad (18)$$

$$H(r_i, r_j) = \frac{\Phi_0^2 d}{8\pi^2 \lambda(T)^2} K_0 \left( \frac{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}{\lambda(T)} \right). \quad (19)$$

Здесь  $U_p(r_i)$  – энергия взаимодействия вихря с дефектом на узле  $i$ ,  $n_i$  – число заполнения вихрей на  $i$ -м узле пространственной сетки,  $d$  – толщина одного сверхпроводящего слоя,  $r_i$  и  $r_j$  – радиус-векторы вихрей,  $\lambda(T) = \lambda(0) / \sqrt{1 - (T/T_c)^{3.3}}$  – глубина проникновения магнитного поля при температуре  $T$ . Метод позволяет вычислять физические величины при фиксированном числе частиц, объеме и температуре ( $NVT$ -ансамбль).

Для определенности в расчетах были выбраны параметры, близкие к параметрам ВТСП на основе висмута  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{7-\delta}$ :  $d = 0.27$  нм,  $\lambda(T=0) = 180$  нм,  $T_c = 84$  К. Величина внешнего поля составляла  $B \sim 0.1$  Т, что соответствует реальным масштабам индукции поля, при которых в висмутовых ВТСП наблюдается плавление вихревой решетки. Расчеты выполнялись на плоской пространственной сетке размером  $200 \times 200$  с периодическими граничными условиями. Реальную концентрацию вихрей, соответствующую данному магнитному полю  $B$ , воспроизводили путем изменения цены деления пространственной сетки. Двумерную концентрацию дефектов выбирали  $\sim (10^{10} - 10^{11}) \text{ см}^{-2}$ . Для исследования плавления вихревой решетки в расчете воспроизводили теплоемкость как функцию температуры, рассчитанную через флуктуацию внутренней энергии:

$$C = \frac{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2}{T^2}. \quad (20)$$

Примеры расчета теплоемкости для определения температуры плавления показаны на рис. 16 [17].

**Двумерная модель с переменным числом вихрей.** Трудности описанной модели были устранены авторами работ [23–25]. В разработанной ими модели границы образца в направлении  $x$  являлись источниками вихрей, на расстоянии глубины проникновения от границы текли меисснеровские токи. Кроме того, авторы отказались от использования пространственной сетки, так что координаты частиц-вихрей в процессе расчета могли меняться непрерывно. Модель включает парное взаимодействие вихрей, а также взаимо-

действие вихрей с дефектами, мейсснеровским и транспортным токами и отражениями вихрей от границы образца. Последние два взаимодействия естественным образом формируют барьер Бина–Ливингстона, позволяя воспроизводить проникновение вихрей с границы без искусственных допущений.

Термодинамический потенциал Гиббса системы с переменным числом вихрей-панкейков с учетом всех взаимодействий имеет следующий вид:

$$G = \sum_z \left\{ N_z \varepsilon + \sum_{i < j} U_{\text{in-plane}}(r_{ij}) + \sum_{i, N_p} U_p(r_{ip}) + \sum_{i, j} U_{\text{surf}}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j^{(\text{image})}) \right\}, \quad (21)$$

где  $\varepsilon = d\varepsilon_0 (\ln[\lambda(T)/\xi(T)] + 0.52)$  – собственная энергия вихря,  $\xi(0)$  – длина когерентности при  $T = 0$ ;  $N_z$  – число панкейков в плоскости  $z$ ; второй член описывает парное взаимодействие вихрей, третий – взаимодействие вихрей с центрами пиннинга, четвертый – с поверхностью и мейсснеровским током;  $r_{ij}$  и  $r_{ip}$  – модули радиус-векторов, соединяющих два вихря и вихрь с центром пиннинга соответственно,  $N_p$  – количество центров пиннинга в образце,  $\varepsilon_0 = \Phi_0^2 / (4\pi\lambda)^2$ , где  $\Phi_0 = \pi\hbar c / e$  – квант магнитного потока. Панкейки в плоскости взаимодействуют с дальнодействующим потенциалом, имеющим вид (19).

Взаимодействие вихря с границей складывается из взаимодействия со своим изображением и изображениями других вихрей и с мейсснеровским и транспортным током. Взаимодействие панкейка, находящегося на расстоянии  $r$  от границы, со своим зеркальным отражением для пластины шириной  $L_x$  записывается в виде:

$$U_{\text{surf}}(r) = d\varepsilon_0 \left\{ 2 \sum_{n=1}^{\infty} K_0 \left( \frac{2nL_x}{\lambda} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \left[ K_0 \left( \frac{2r + nL_x}{\lambda} \right) + K_0 \left( \frac{2(L_x - r) + nL_x}{\lambda} \right) \right] \right\}. \quad (22)$$

Таким же образом учитывается взаимодействие с изображениями других панкейков (выражение справедливо только для достаточно широкой пластины):

$$U_{\text{surf}}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j^{(\text{image})}) = -d\varepsilon_0 K_0 \left( \frac{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j^{(\text{image})}|}{\lambda} \right). \quad (23)$$

Энергия взаимодействия с мейсснеровским током совпадает с работой силы Лоренца по перемещению вихря от границы вглубь образца и в случае присутствия одновременно внешнего магнитного поля и транспортного тока определяется уравнением (24) [26–28].

Выражение для тока  $j$  соответствует случаю, когда образец перематнивается током и внешним полем.  $H_0$  – внешнее магнитное поле,

$C$ , отн. ед.

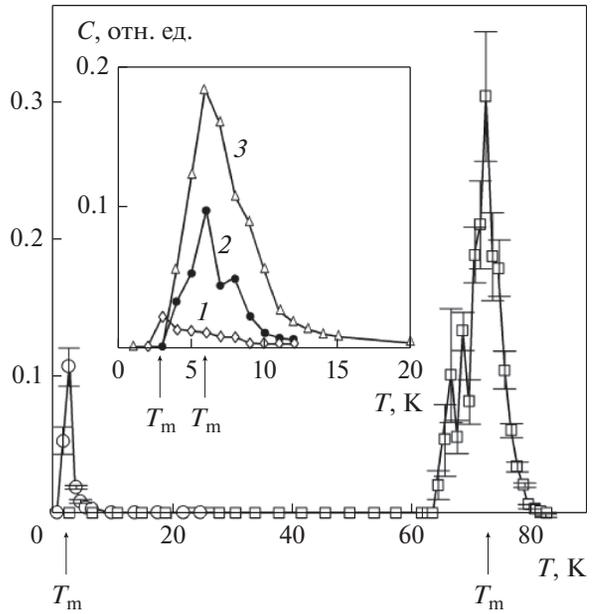


Рис. 16. Зависимость теплоемкости от температуры при различной глубине и концентрации (вставка) дефектов [17].

$H_I = 2\pi I / c$  – поле на поверхности сверхпроводника, созданное транспортным током, начало координат берется в центре симметрии образца [51].

Энергия взаимодействия с центром пиннинга при расчете с использованием пространственной сетки выбрана в виде  $U_p(r_i, T) = -[U_0(T)/8] \delta_{r_i, r_j}$ . При этом  $U_p(r_i, T = 2 \text{ K}) = -3.5 \text{ мЭВ}$ , что близко к реально наблюдаемому в ВТСП значениям [23]. В случае отказа от пространственной сетки энергия взаимодействия вихря с областью с пониженным параметром порядка имеет вид потенциальной ямы размером  $\sim \xi$  [26], определяемой уравнением (25), где  $\alpha$  – параметр, характеризующий глубину потенциальной ямы,  $r_{ij}$  – расстояние между вихрем  $i$  и дефектом  $j$ :

$$U_m = -\frac{1}{4\pi} \int_{\pm L_x/2}^x j \Phi_0 dx = d \frac{\Phi_0}{4\pi} \left( H_0 \left( \frac{\text{ch} \frac{x}{\lambda}}{\text{ch} \frac{L_x}{2\lambda}} - 1 \right) - H_I \left( \frac{\text{sh} \frac{x}{\lambda}}{\text{sh} \frac{L_x}{2\lambda}} \mp 1 \right) \right), \quad j = -\frac{c}{4\pi\lambda} \times \left( H_0 \frac{\text{sh} \left( \frac{x}{\lambda} \right)}{\text{ch} \left( \frac{L_x}{2\lambda} \right)} - H_I \frac{\text{ch} \left( \frac{x}{\lambda} \right)}{\text{sh} \left( \frac{L_x}{2\lambda} \right)} \right), \quad (24)$$

$$U_p(r_{ip}) = -\alpha \frac{1}{1 + r_{ip}/\xi} \exp\left(-\frac{r_{ip}}{2\xi}\right). \quad (25)$$

В данной модели используется стандартный метод Монте-Карло в сочетании с алгоритмом Метрополиса для большого канонического ансамбля. Термодинамический расчет (каким является расчет Монте-Карло) не дает возможности моделировать реальную динамику системы. Однако в ходе воспроизведения процесса перемагничивания система перемещается от одной точки кривой намагниченности к другой за конечное число шагов. Таким образом, каждому шагу Монте-Карло может быть поставлен в соответствие некоторый промежуток времени. Этот факт и позволяет некоторым образом воспроизводить эволюцию системы во времени. В рамках этого подхода можно получить основные экспериментальные результаты: необратимые петли перемагничивания, остаточную намагниченность и т.д.

**Расчет транспортных характеристик.** В модель с фиксированным числом вихрей и периодически граничными условиями по всем направлениям транспортный ток вводили путем добавления в гамильтониан слагаемого, обусловленного действием силы Лоренца на каждый вихрь. При этом при элементарном перемещении вихря вдоль оси  $x$  из общей энергии вычитали слагаемое  $\delta U = \Phi_0 j \Delta x / c$  (если направление перемещения совпадало с направлением силы Лоренца), и такое же слагаемое добавляли, если направление перемещения было противоположно силе Лоренца. Возникающее на границах образца напряжение  $V \sim v_d B$ , где  $v_d = X/\tau$  — дрейфовая скорость вихрей в направлении оси  $x$  (транспортный ток направлен вдоль оси  $y$ ),  $B$  — внешнее магнитное поле,  $X$  — смещение центра масс вихревой нити за единичное время  $\tau$ . За единицу времени условно был выбран один шаг Монте-Карло, т.е. имеется неопределенность в выборе шкалы времени. Эта неопределенность устраняется нормировкой расчетных результатов на реальные экспериментальные ВАХ. Заметим, что данный метод не принимает во внимание вихри, рожденные собственным полем транспортного тока, и содержит допущение, что плотность транспортного тока постоянна вдоль сечения сверхпроводника. Также данный метод не позволяет рассчитывать равновесное число вихрей в сверхпроводнике при данном внешнем поле, т.е. не позволяет рассчитать кривую намагниченности. Данным методом были выполнены расчеты, связанные с плавлением вихревой решетки, а также с переходами из гексагональной решетки во вращающуюся и вращающейся решетки в вихревую жидкость.

Вольт-амперные характеристики в модели с границей рассчитывали методом, развитым авторами работы [26]. Когда величина транспортного

тока превосходит критическую, начинается течение вихрей к центру образца, при этом в сверхпроводнике индуцируется электрическое поле  $E$ . Как только в центре образца происходит аннигиляция пары вихрь — антивихрь, два новых вихря противоположных знаков появляются у противоположных границ. Таким образом, выделяющаяся при аннигиляции, равна работе силы Лоренца по перемещению вихрей от границы к центру. Джоулево тепло  $Q$  можно получить суммированием вкладов всех аннигилировавших за определенное число шагов Монте-Карло пар. Напряженность поля  $E$  определяется из соотношения  $Q = \text{const } jE\Delta t$ . Ввиду отсутствия в расчете реального времени результат необходимо нормировать на экспериментальные вольт-амперные характеристики, причем критический ток соответствует напряженности поля в образце  $E = 1$  мкВ/см. Гистерезисные потери на перемагничивание рассчитываются как площадь петли перемагничивания [27]. В работе [27] были рассчитаны зависимости потерь от амплитуды переменного тока и продемонстрирована точка, в которой происходит смена гистерезисных потерь на транспортные. С помощью моделирования методом Монте-Карло удалось объяснить наблюдаемое в эксперименте (см., напр., [10, 28] и ссылки в них) подавление критического тока при росте концентрации дефектов [28]. Эффект объясняется “выползанием” результирующего потенциала дефектов при перекрытии их потенциальных ям и наблюдается при двумерной концентрации дефектов  $> 10^{12}$  см $^{-2}$ . Также было продемонстрировано, что снижение критической температуры дефектного сверхпроводника уменьшает критический ток, однако не дает экспериментально наблюдаемого существенного его падения (см. [28] и ссылки в ней).

**Трехмерная модель слоистого ВТСП.** Метод расчета для объемного слоистого ВТСП разработан авторами [26–28]. Потенциал Гиббса для трехмерной системы отличается только присутствием слагаемого  $\sum_i U_{\text{inter-plane}}(r_i^{z,z+1})$ , ответственного за межплоскостное взаимодействие. Для описания данного взаимодействия используется форма электромагнитного и джозефсоновского потенциала, рассчитанная в работах [79, 80]. Межплоскостное взаимодействие панкейков, составляющих единую вихревую линию, имеет вид

$$U_{\text{inter-plane}}(r_i^{z,z+1}) = U_{\text{em}}(r_i^{z,z+1}) + U_{\text{Jos}}(r_i^{z,z+1}). \quad (26)$$

Первое и второе слагаемое отвечают электромагнитному и джозефсоновскому взаимодействию соответственно. Электромагнитное взаимодействие связано с взаимодействием одного панкейка с экранирующими токами, индуцированными другими панкейками во всех слоях

сверхпроводника. Форма потенциала электромагнитного взаимодействия получена в работе [62, 81] и представляет собой приращение энергии стопки панкейков при отклонении одного из панкейков на величину  $r_i$  от оси:

$$U_{em}(r_i^{z,z+1}) = 2d_s \epsilon_0 \times [C + \ln(r_i^{z,z+1}/2\lambda) + K_0(r_i^{z,z+1}/2\lambda)], \quad (27)$$

где  $C = 0.5772$  – постоянная Эйлера. Электромагнитным взаимодействием обычно пренебрегают при теоретическом анализе вихревой структуры в иттриевых сверхпроводниках с низким параметром анизотропии; однако при высоких  $\gamma$ , как показывают расчеты, пренебрежение электромагнитным взаимодействием приводит к существенным ошибкам. Джозефсоновское взаимодействие обусловлено джозефсоновскими токами, текущими между двумя сверхпроводниками, разделенными изолятором, в качестве которых выступают сверхпроводящие плоскости  $\text{CuO}_2$ . Этот ток пропорционален разности фаз сверхпроводящих волновых функций. При относительном поперечном смещении панкейков, находящихся в разных плоскостях, между ними возникает взаимодействие притягивающего характера, квадратичное при небольших отклонениях  $< \gamma d$  и линейное, пропорциональное длине “джозефсоновской струны”, при больших расстояниях. Второе слагаемое в (26), соответствующее джозефсоновскому взаимодействию панкейков в соседних слоях, принадлежащих одной вихревой нити и сдвинутых относительно друг друга на расстояние  $r_i$ , имеет вид [82]:

$$U_{Jos}^{z,z+1}(r_i^{z,z+1}) = \epsilon_0 d_s \left[ 1 + \ln\left(\frac{\lambda}{d_s}\right) \right] \times \begin{cases} 0.25 \left(\frac{r_i^{z,z+1}}{r_g}\right)^2 \ln\left(\frac{9r_g}{r_i^{z,z+1}}\right), & r_i^{z,z+1} \leq 2r_g \\ \left[\frac{r_i^{z,z+1}}{r_g} - 0.5\right], & r_i^{z,z+1} > 2r_g \end{cases}, \quad (28)$$

где  $r_g = \gamma d_s$  – характерное расстояние джозефсоновского взаимодействия.

В трехмерной ситуации в качестве элементарного объекта рассматривается не отдельный двумерный панкейк, а вихревая нить как стопка нескольких панкейков, между которыми есть межслоевое взаимодействие. В процессе расчета возможно рождение вблизи границы как полной вихревой нити, так и ее отрезка с числом панкейков от 1 до  $N_L - 1$ . При этом верхний и нижний панкейки образуют межплоскостные связи с границей, т.е. считается, что панкейк, находящийся плоскостью выше (ниже), еще не проник в образец. В алгоритм также вводится дополнительная процедура – перезацепление вихревых нитей, когда в случае высокой анизотропии достаточно ис-

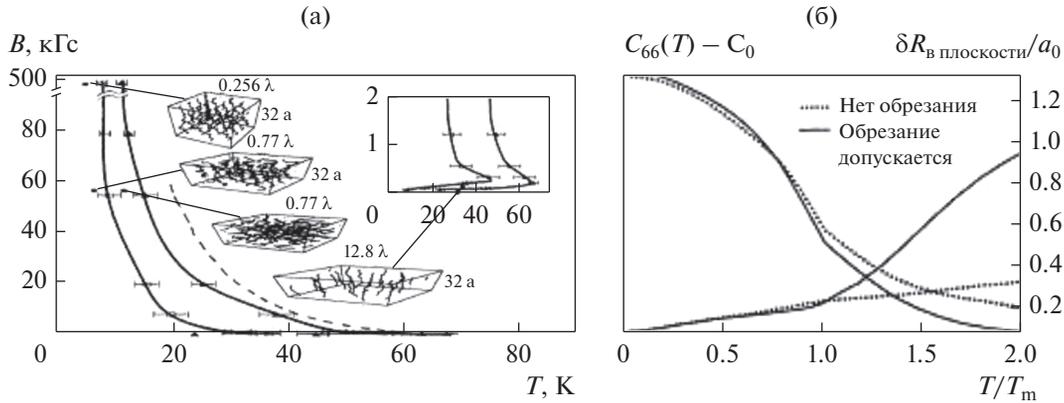
кривленные вихревые нити сближаются и обмениваются межслоевым взаимодействием. Именно такие процессы постоянного перезацепления вихревых нитей происходят в режиме 3D–2D-перехода, когда плотность вихревых нитей достаточно высока, чтобы панкейки могли постоянно обмениваться связями, в результате чего становится невозможно определить связь панкейка с определенной вихревой нитью. Тестирование метода выполняли путем сравнения кривой намагниченности слабоанизотропного ВТСП с колончатými дефектами с кривой намагниченности, рассчитанной в рамках двумерной модели при той же концентрации дефектов. Удовлетворительное совпадение кривых указывает на корректность модели.

В рамках трехмерной модели методом Монте-Карло исследовано плавление трехмерной вихревой решетки [82]. Авторы учитывали только джозефсоновское межплоскостное взаимодействие, алгоритм не допускал рождение и уничтожение вихрей. Фазовая диаграмма и зависимость модуля сдвига вихревой решетки  $S_{66}$  от температуры показаны на рис. 17 [83]. Из рисунка видно, что расчет дает разные результаты при введении в модель перезацепления вихревых нитей и без него.

Авторами [63–65] было учтено джозефсоновское и электромагнитное взаимодействие между слоями, введено в модель проникновение вихревых нитей с границы. Были выполнены расчеты [63] критического тока ВТСП с колончатými дефектами, наклонными по отношению к оси анизотропии ВТСП на некоторый угол  $\phi$  (направление наклона дефектов совпадает с направлением входа вихрей в образец, рис. 18). В расчете Монте-Карло колончатый дефект представляется в виде “стопки” точечных дефектов, расположенных один под другим или со сдвигом, пропорциональным наклону дефекта.

Как показывает расчет, при низких  $\gamma$  ( $< 10$ ) величина критического тока резко падает с ростом угла наклона, причем при  $\gamma \sim 7$  и выше наблюдается начальный горизонтальный участок. С ростом  $\gamma$  горизонтальный участок увеличивается, и при некоторой анизотропии критический ток практически перестает зависеть от наклона дефектов.

При тепловых отклонениях панкейка от оси вихря добавка к энергии, связанная с межслоевым взаимодействием, для бездефектного образца составляет  $\sim kT$ . Для рассмотренных значений температуры такие отклонения оказываются равными  $x_{\max} \sim 0.01 \gamma d$ . При наличии дефектов появляется дополнительная добавка к энергии, обусловленная пиннингом вихря на дефекте. Тогда оценки дают  $x_{\max} \sim 0.2 \gamma d$ . Как показывают расчеты, приблизительно при таком расстоянии между точечными дефектами, составляющими наклон-



**Рис. 17.** (а) Фазовая диаграмма ВТСП. Линия с маркерами в виде прямоугольников (слева) показывает точки, где трансляционный параметр порядка обращается в 0, линия с маркерами в виде треугольников (справа) – параметр порядка, характеризующий изгиб вихрей (bond-angle order parameter). Также показаны типичные вихревые конфигурации. (б) Зависимость модуля сдвига  $C_{66}$  и среднего отклонения панкейков в плоскости от температуры [83]. Расчет сделан при постоянном количестве вихревых нитей, изменение магнитного поля достигалось изменением средней плотности вихрей.

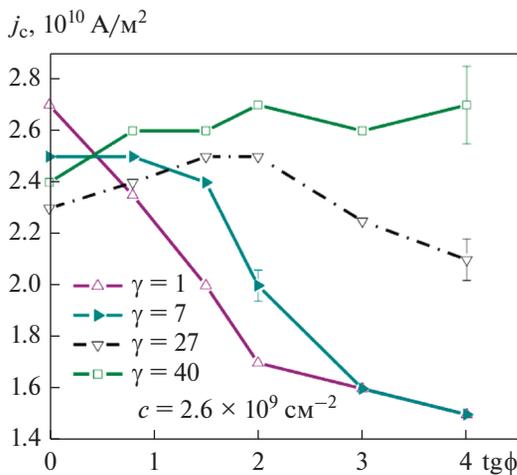
ный и расположенными в соседних слоях, начинается уменьшение критического тока (рис. 18).

Расчеты вихревой решетки ВТСП в наклонном магнитном поле в рамках трехмерной анизотропной 3D-модели на кубической решетке были выполнены в работе [84]. Гамильтониан данной модели определяется выражением:

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle \in xy\text{-plane}} \cos(\phi_i - \phi_j - A_{ij}) - \frac{J}{\gamma^2} \sum_{\langle m,n \rangle || c\text{-axis}} \cos(\phi_m - \phi_n - A_{mn}), \quad (29)$$

$$A_{ij} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_i^j A^{(2)} dr^{(2)}, \quad A_{mn} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_m^n A_c dr_c,$$

$0 \leq \phi < 2\pi$  – фаза параметра порядка.



**Рис. 18.** Зависимости критического тока от наклона дефектов;  $c$  – двумерная концентрация точечных дефектов в плоскости ВТСП-слоя [65].

Также был продемонстрирован фазовый переход между состояниями с преобладающей джозефсоновской и преобладающей абрикосовской решеткой (рис. 19).

### МЕТОД МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ

**Основные уравнения.** В методе молекулярной динамики временная эволюция системы вихрей определяется путем численного интегрирования уравнений движения [85–90]:

$$\eta \mathbf{v}_i = \mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i^{vv} + \mathbf{f}_i^{vp} + \mathbf{f}_i^T, \quad \mathbf{f}_i^{vv} = \sum_{j=1}^{N_v} f_0 K_1 \left( \frac{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}{\lambda} \right) \mathbf{r}_{ij}, \quad f_0 = \frac{\Phi_0^2}{8\pi^2 \lambda^3}, \quad (30)$$

$$\mathbf{f}_i^{vp} = \sum_{k=1}^{N_p} \frac{f_p}{r_p} |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k^{(p)}| \cdot \Theta \left( \frac{r_p - |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k^{(p)}|}{\lambda} \right) \mathbf{r}_{ik}^{(p)}.$$

Здесь  $\mathbf{f}_i$  – суммарная сила, действующая на единицу длины вихря,  $\mathbf{f}_i^{vv}$  – сила попарного взаимодействия вихрей,  $\mathbf{f}_i^{vp}$  описывает взаимодействие вихрей с центрами пиннинга,  $f_p$  – максимальная сила пиннинга. Температура вводится в расчет с помощью стохастического члена  $\mathbf{f}_i^T$ , причем  $\langle \mathbf{f}_i^T(t) \rangle = 0$  и  $\mathbf{f}_i^T(t) \mathbf{f}_j^T(t') \geq 2\eta k_B T \delta_{ij} \delta(t - t')$ ;  $\eta = \Phi_0 H_{c2} / c^2 \rho_n$ ,  $\rho_n$  – удельное сопротивление сверхпроводника в нормальном состоянии. Моделирование осуществляется при фиксированном числе вихрей. При наличии транспортного тока добавляется постоянная сила  $\mathbf{F}_d = [\mathbf{j}\Phi_0]/c$ , где  $\mathbf{j}$  – плотность транспортного тока, принимаемая постоянной.

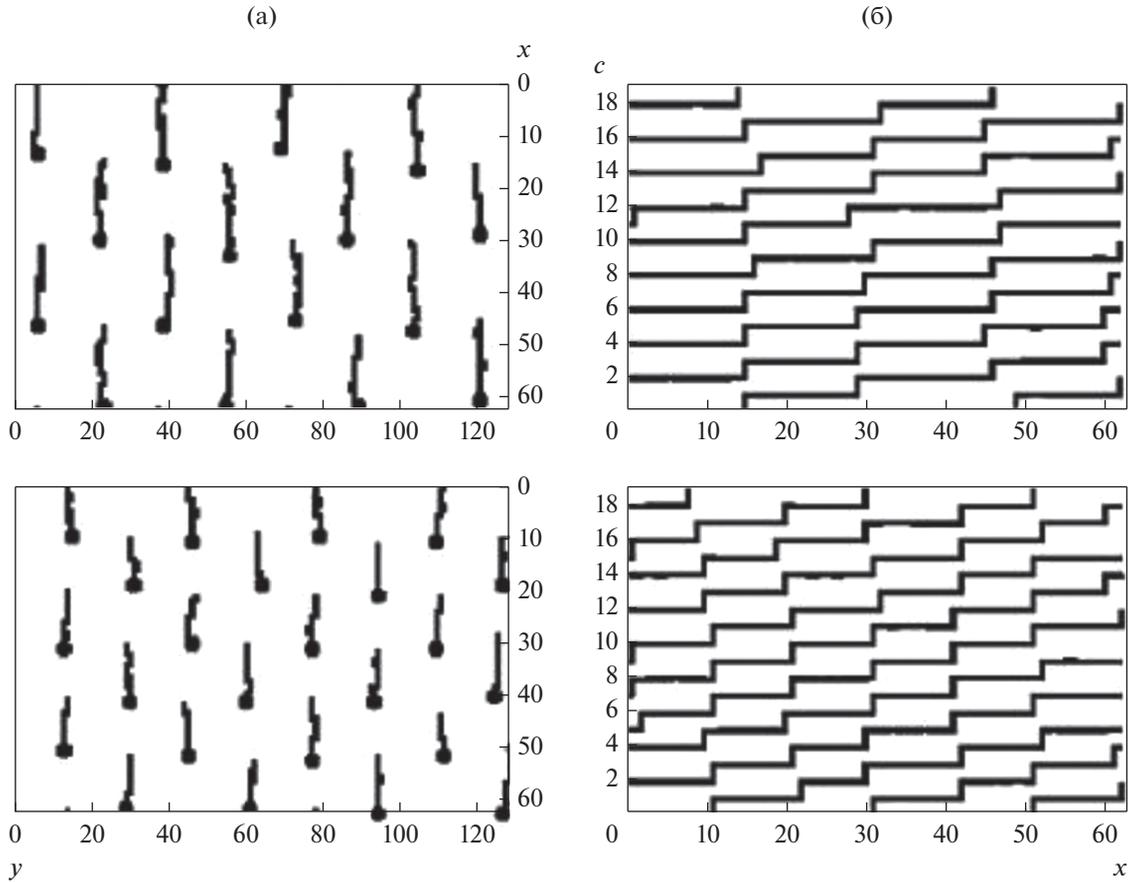


Рис. 19. Конфигурации вихревых нитей в состоянии с преобладающей джоозефсоновской решеткой: в плоскости *ab* (а, в) и в плоскости *ca* (б, г) [84]. Кружками на рисунках слева обозначены панкейки.

**Результаты расчетов.** В работе [85] в 1993 г. были численно рассчитаны профили магнитного потока в рамках одномерной модели с центрами пиннинга. Дефекты были распределены равномерно по образцу, кроме небольшой области, свободной от них. В этой области вихри добавляются в систему или убираются из нее и принимается, что в ней приложено внешнее поле. В системе действуют периодические граничные условия. На рис. 20а показаны профили магнитного потока, рассчитанные при последовательном увеличении внешнего поля. Потенциал межвихревого взаимодействия имеет вид ( $r_v$  – радиус области, где потенциал взаимодействия отличен от нуля):

$$U_{vi} = \sum_{j, i \neq j} A_v \left( |x_i^v - x_j^v| - r_v \right)^2 \Theta \left( r_v - |x_i^v - x_j^v| \right). \quad (31)$$

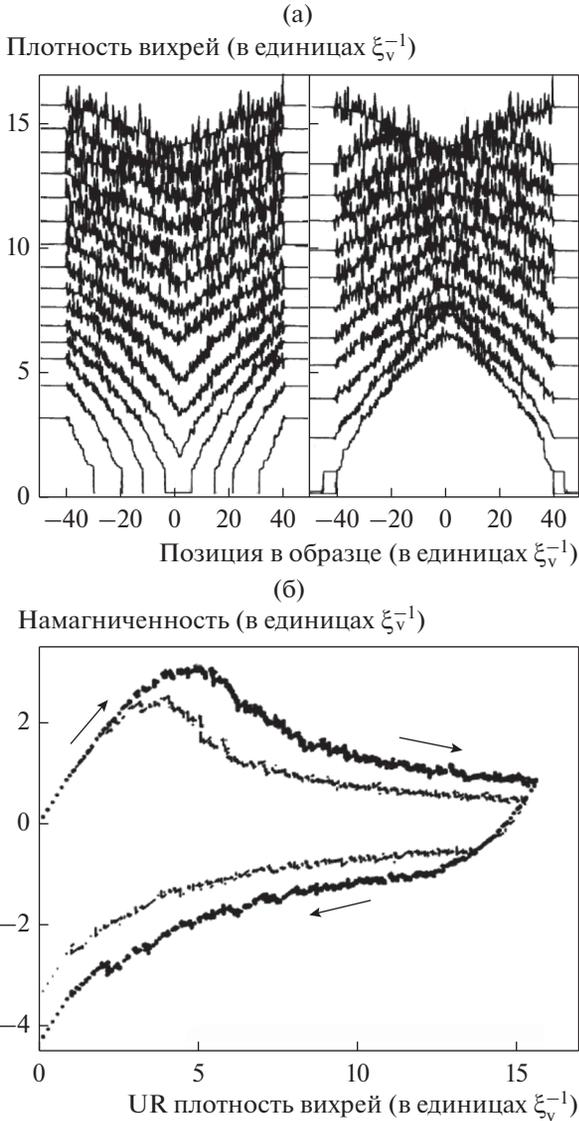
Потенциал взаимодействия с центрами пиннинга:

$$U_{pi} = \sum_j \left( -\frac{f_c r_p}{2} + \frac{f_c}{2r_p} (x_i^v - x_j^p)^2 \right) \times \Theta \left( r_v - |x_i^v - x_j^p| \right). \quad (32)$$

В пренебрежении силой вязкого трения сила, действующая на вихри:  $F_i = -\nabla V_{pi} - \nabla V_{vi}$ .

При увеличении поля в систему добавляются вихри, после чего система приходит в состояние равновесия. Вихри добавляются в бездефектную область, пока не начнут перекрываться. Тогда вихри начинают взаимодействовать и выталкиваться в дефектную область. Алгоритм позволяет воспроизвести перемагничивание системы внешним магнитным полем; на рис. 20б показаны кривые намагниченности для двух значений концентрации дефектов (на единицу длины). Видно, что при более сильном пиннинге начальный участок кривой идет выше, остаточная намагниченность больше.

На практике профили магнитного поля рассчитываются, исходя из измеренных значений намагниченности и критического тока. Более 50 лет для этой цели успешно используется модель Бина, согласно которой величина тока в сверхпроводнике может принимать 3 значения:  $-j_c$ ,  $0$ ,  $j_c$ . Модель Бина не учитывает микроскопическую природу механизма, ответственного за захват магнитного потока; в связи с этим предположе-



**Рис. 20.** (а) Профили магнитного поля в одномерной модели при повышении (слева) и понижении (справа) внешнего поля, (б) кривые намагниченности при разной концентрации дефектов. Концентрации отличаются в 2 раза. Расчет методом молекулярной динамики.  $\xi_v$  – радиус обрезания для потенциала взаимодействия вихрей [85]. На графике показана величина  $-4\mu M$ .

ние  $j_c = \text{const}$  модифицировали [91]. Вид профилей магнитного потока, рассчитанных в работе, указывает на применимость к системе модели Кима, где критический ток связан с локальным магнитным полем следующим соотношением  $\alpha = J_c (B + b_0)$ ,  $\alpha$  и  $b_0$  – постоянные, причем  $\alpha$  не зависит от поля.

Профили магнитного потока, петли перемагничивания (рис. 21а) и критический ток в сверхпроводнике с сильным пиннингом, фазовые переходы в вихревой решетке (в т. ч. при периодиче-

ском пиннинге) рассчитаны в рамках двумерной модели с учетом силы вязкого трения [86–90]. Увеличение или уменьшение поля достигается добавлением или уничтожением вихрей в свободной от дефектов приграничной области шириной  $6\lambda$ . Произведение плотности вихрей в приграничной области на  $\Phi_0$  дает величину поля, приложенного к сверхпроводнику. Введением в систему вихрей разных знаков удается получить полную петлю перемагничивания. С использованием полученных при моделировании профилей магнитного поля  $B$  удается рассчитать локальную плотность тока в сверхпроводнике  $dB/dx = (4\pi/c)J$ . Расчеты при различной плотности  $n_p$  и глубине центров пиннинга  $f_p$  (рис. 21б) подтверждают линейность  $1/j_c(B)$  в широком интервале значений магнитного поля. Величина  $\alpha$ , рассчитанная из наклона зависимостей  $1/j_c(B)$ , оказывается степенной функцией  $f_p$ :  $\alpha \sim f_p^{1.6}$ . Данный результат указывает на то, что вихревая система находится между состоянием, описываемым теорией коллективного пиннинга (Ларкин–Овчинников)  $J_c B \sim n_p f_p^2$ , и состоянием независимых вихрей при сильном пиннинге  $J_c B \sim n_p f_p$ .

В рамках трехмерной модели [47] с учетом эластичности вихревой нити были исследованы различные динамические режимы вихревой системы в присутствии дефектов и границ двойникования. Гамильтониан трехмерной модели описывается уравнением (33), где  $\epsilon$  – жесткость вихревой нити. Уравнения Ланжевена имеют вид (34), где  $L$  – размер системы в направлении оси  $z$ ,  $U_d$  – энергия взаимодействия с центрами пиннинга:

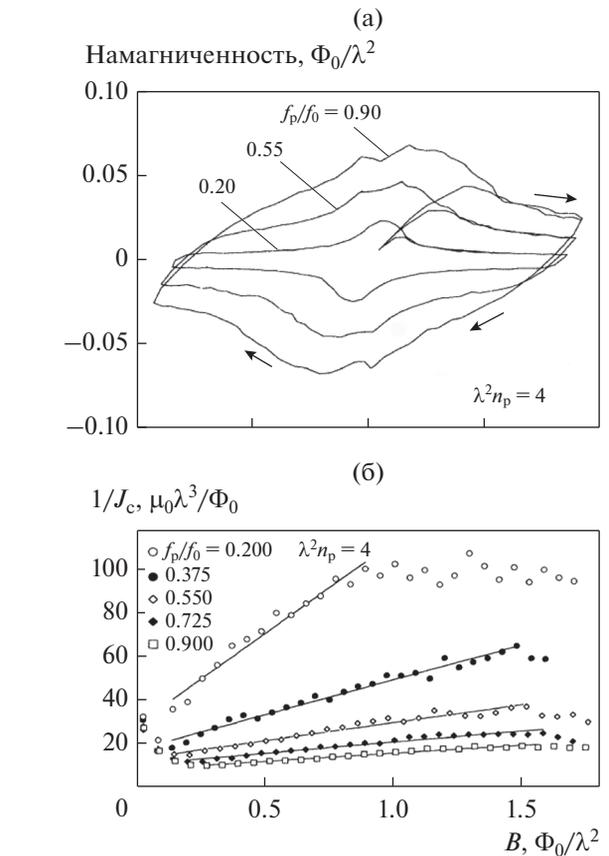
$$H(\mathbf{r}_i) = \sum_{i=1}^N \int_0^L dz \left[ \frac{\epsilon}{2} \left| \frac{d\mathbf{r}_i(z)}{dz} \right|^2 + U_d(\mathbf{r}_i(z)) + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i}^N V(|\mathbf{r}_i(z) - \mathbf{r}_j(z)|) - \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{r}_i(z) \right], \tag{33}$$

$$\eta \frac{\partial \mathbf{r}_i(t, z)}{\partial t} = - \frac{\delta H[\mathbf{r}_i(t, z)]}{\delta \mathbf{r}_i(t, z)} + \mathbf{f}_i(t, z). \tag{34}$$

Метод молекулярной динамики позволяет исследовать временную эволюцию вихревой системы, что дает возможность рассчитать транспортные характеристики без выбора условного промежутка времени и нормировки на эксперимент. Существенным недостатком является необходимость работать с фиксированным числом вихрей. Введение большого числа вихрей на границе, моделирующей внешнее поле, является эффективным решением, но может существенно замедлить расчет.

КОМПОЗИТНЫЕ СТРУКТУРЫ  
ФЕРРОМАГНЕТИК–СВЕРХПРОВОДНИК

**Магнитные наночастицы в качестве центров пиннинга.** Первой работой, в которой ферромагнитные наночастицы были использованы в качестве центров пиннинга в сверхпроводнике второго рода, может считаться классическая работа [92]. Намагниченные до насыщения наночастицы железа (в однодоменном состоянии) помещали в жидкий сплав Hg–13% In. Измерения кривых намагниченности показали повышение эффективности таких центров пиннинга (заключение о силе пиннинга делали по величине остаточной намагниченности). В работе энергия взаимодействия вихря с магнитной частицей предполагается равной энергии магнитного момента частицы в поле, созданном вихрем в ее центре, подавлением сверхпроводимости вблизи ферромагнитной частицы пренебрегают. Таким образом, было показано, что магнитные частицы способны обеспечить существенный гистерезис при перемагничивании сверхпроводника второго рода, исходя не имеющего остаточной намагниченности, за счет взаимодействия магнитного момента примесной частицы с полем вихрей. Также было продемонстрировано усиление пиннинга при возрастании концентрации примесей. Авторы [93], однако, демонстрируют приблизительно одинаковую силу пиннинга, обеспечиваемую ферромагнитными и парамагнитными включениями, и указывают на отсутствие в работе [92] сравнения с пиннингом на немагнитных частицах. В то же время в [93] пиннинг вихрями был обусловлен снижением критической температуры сверхпроводника вблизи примеси за счет эффекта близости; в [92] влияние этих эффектов могло быть пренебрежимо малым по сравнению с магнитным взаимодействием. Кроме того, размеры частиц в [93] составляли порядка нескольких микрометров, что значительно превосходит размер предельной однодоменной частицы Gd (~10 нм); следовательно, магнитный момент частиц в процессе эксперимента не оставался постоянным и зависел от предыстории образца. Интересный механизм пиннинга на магнитных наночастицах рассмотрен в [94]. Смещение вихревой нити сопровождается перемагничиванием примесей (в эффективном объеме, занятом вихрем, помещается достаточно большое их количество); таким образом, сила, возникающая при смещении вихря, связана с гистерезисными потерями на перемагничивание частиц. Эффект наблюдается только в том случае, если предварительно на образец наложено внешнее поле, достаточное для насыщения частиц и большее второго критического, затем поле быстро уменьшается до нуля. В [95] было показано, что величина критического тока больше для магнитной примеси, поскольку из-за подавления параметра порядка су-

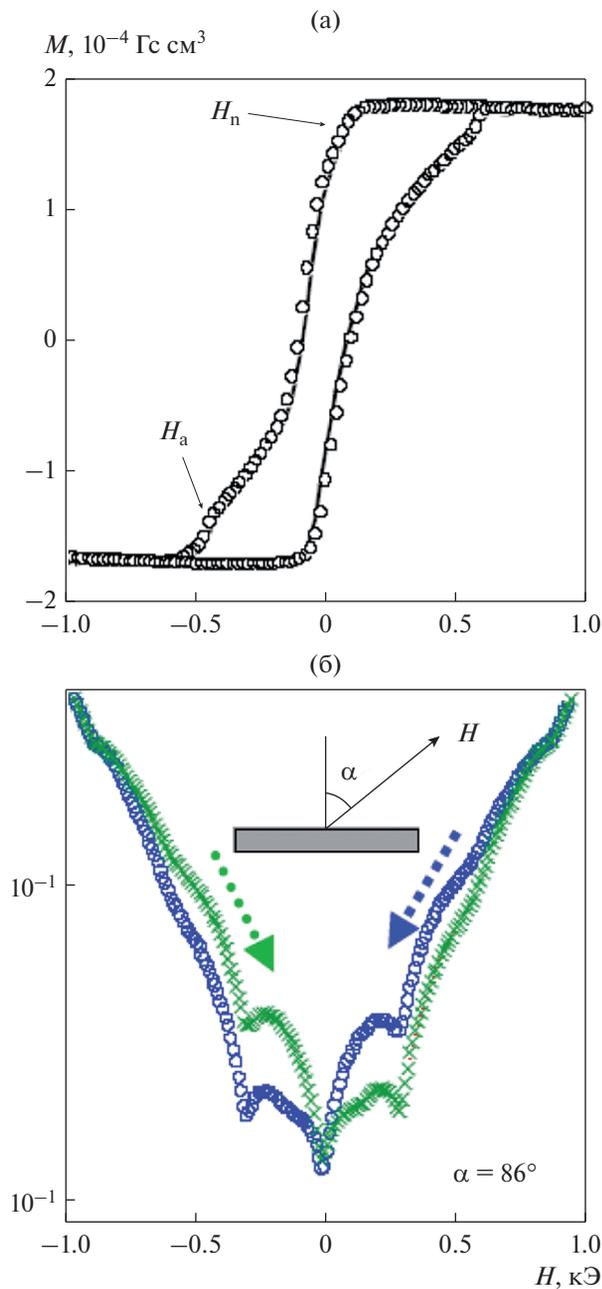


**Рис. 21.** (а) Кривые намагниченности (по вертикальной оси – величина  $-4\pi M = H - B$ ) и (б) зависимости критического тока от магнитного поля при различной силе пиннинга и концентрации дефектов. Расчет методом молекулярной динамики в рамках двумерной модели [86].

ществено возрастает эффективный объем дефекта.

Наблюдаются и другие особенности, такие как эффекты рождения и аннигиляции пар вихрь-антивихрь вблизи магнитного диполя, появление пиков на вольт-амперной характеристике, связанное с периодическим рождением таких пар вихрь-антивихрь [96, 97]. В работах [98–103] исследовали различной формы массивы магнитных точек, с различным направлением намагниченности, в частности параллельно и перпендикулярно плоскости сверхпроводящего слоя. Наблюдали формирование вихрей вблизи магнитного диполя, было продемонстрировано появление вихрей противоположного знака на разных полюсах диполя, лежащего в плоскости пленки. Наблюдали также появление вихрей с магнитным потоком, кратным  $\Phi_0$ , в зависимости от величины магнитного момента диполя.

Существенная часть исследований относится к вихревым структурам в тонких пленках с нане-



**Рис. 22.** (а) Кривая намагниченности магнитной точки; (б) магнитосопротивление в поле, наклонном к плоскости пленки [104].

сенным на них массивом магнитных точек и в многослойных структурах ферромагнетик-сверхпроводник. Первые исследования такого рода начались, когда должное развитие получили методы создания микро- и нанокомпонитных структур, такие как литография, молекулярно-лучевая эпитаксия, и методы их исследования с помощью атомно-силового и магнито-силового микроскопа, а также магнитооптики. Экспериментально исследуют вихревые конфигурации, возникаю-

щие в сверхпроводящих пленках вблизи магнитных точек. Часто наблюдаемой особенностью является наличие минимумов на зависимости магнитосопротивления от внешнего магнитного поля (рис. 22 [104]). Поля  $H_a$  и  $H_n$  (рис. 22а) соответствуют полям рождения и аннигиляции магнитных вихрей и дополнительным минимумам на кривой магнитосопротивления (рис. 22б).

Разнообразные эффекты наблюдаются в случае, когда намагниченность магнитных точек (или магнитных дисков) перпендикулярна сверхпроводящему слою. Экспериментально наблюдали конфигурации из объединенных вокруг магнитной точки 1, 2 и более вихрей [105]. Одна из возможных серий конфигураций вихрей на магнитном диске, полученная численным расчетом, показана на рис. 23 [102].

В [104, 106] исследована угловая зависимость магнитосопротивления сверхпроводящей пленки с магнитными наноточками, в [104] сравнивали эффекты пиннинга вихрей при различных магнитных конфигурациях наноточек — частицы были в однодоменном состоянии или в состоянии магнитного вихря. Наблюдаемые минимумы на зависимости сопротивления слоя от величины нормальной компоненты приложенного поля объясняли резким усилением пиннинга абрикосовских вихрей на решетке магнитных точек. Было показано, что рост силы пиннинга обусловлен подавлением сверхпроводимости вблизи кора магнитного вихря. Наблюдаемый гистерезис магнитосопротивления связан с перемагничиванием массива магнитных точек, которое также происходит необратимо. Авторы [106] исследовали периодические массивы упорядоченных (т.е. все магнитные моменты направлены в одну сторону, и система таким образом намагничена) и разупорядоченных (система размагничена) магнитных диполей на поверхности сверхпроводящего слоя. Была также получена зависимость магнитосопротивления от внешнего поля для различных магнитных конфигураций массива. Если массив был упорядоченным, то минимумы сопротивления наблюдали при значениях внешнего поля  $H_s \approx 0.5\Phi_0/a^2$  и  $H = H_s \pm H_1$ ,  $H_1 = \Phi_0/a^2$ , где  $a$  — период решетки. При этих полях вихри располагаются на магнитных точках (если их намагниченности совпадают) либо в промежутках между магнитными точками (если направления намагниченности противоположны) и, таким образом, имеет место подстройка решетки вихрей под решетку дефектов (как и в предыдущей работе, частицы находятся в состоянии магнитного вихря). Если же массив магнитных вихрей разупорядочен, то никаких эффектов подстройки не наблюдается и зависимость сопротивления симметрична относительно  $H = 0$ .

Кроме того, показана возможность появления наведенной полем сверхпроводимости (field-induced superconductivity) в промежутках между магнитными диполями, что обусловлено аннигиляцией квантов магнитного потока, рожденных магнитными точками и внешним полем.

**Двойные и более слои ферромагнетик–сверхпроводник.** Особое внимание следует уделить численным расчетам магнитного поля и сверхпроводящего параметра порядка в композитных F/S структурах. Для большинства приложений ВТСП требуется в виде тонких пленок, поэтому большая часть таких исследований выполнена именно для случая сверхпроводящей пленки, находящейся в контакте с ферромагнетиком. Одной из задач является повышение критического тока в пленке, находящейся в смешанном состоянии. В этом случае также рассматривается 2 механизма взаимодействия ферромагнетика с вихревой структурой: через подавление параметра порядка в сверхпроводнике из-за эффекта близости и электромагнитное взаимодействие. В некоторых экспериментах для исключения подавления магнитного и сверхпроводящего параметров порядка за счет эффекта близости и спиновой диффузии слои ферромагнетика и сверхпроводника разделяют тонкой оксидной пленкой.

В случае, когда преобладает электромагнитное взаимодействие, важным механизмом пиннинга вихрей является пиннинг на доменной стенке. В [107] численно исследовали формирование вихревой структуры в двойном слое ферромагнетик-сверхпроводник. Конфигурация, когда ферромагнитный слой намагничен однородно и намагненность перпендикулярна плоскости слоя, может быть неустойчивой из-за появления вихрей в сверхпроводнике. Данная неустойчивость приводит к формированию доменной структуры в ферромагнетике, причем магнитный поток вихрей, как и намагненность соседних доменов, меняет знак. Размер доменов много больше глубины проникновения магнитного поля  $\Lambda = \lambda^2/2d$ , в свою очередь  $\lambda$  много больше толщины сверхпроводящего слоя  $d$ . Равновесная конфигурация получается минимизацией магнитной энергии системы. В последующей работе [108] авторы получили цепочки вихрей противоположных знаков, формирующиеся на полосовых доменах в ферромагнитном слое. Как показывает расчет, сначала вихри формируются по одному на домене, при росте намагненности — по два (рис. 24).

Несимметричные вольт-амперные характеристики гетероструктуры  $\text{La}_{0.66}\text{Sr}_{0.33}\text{MnO}_3/\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$  были получены в [109], эффект может быть объяснен вкладом магнитного момента ферромагнетика в магнитное поле у краев пленки. Эффект наблюдается, когда намагненность ферромагнитной пленки перпендикулярна току и парал-

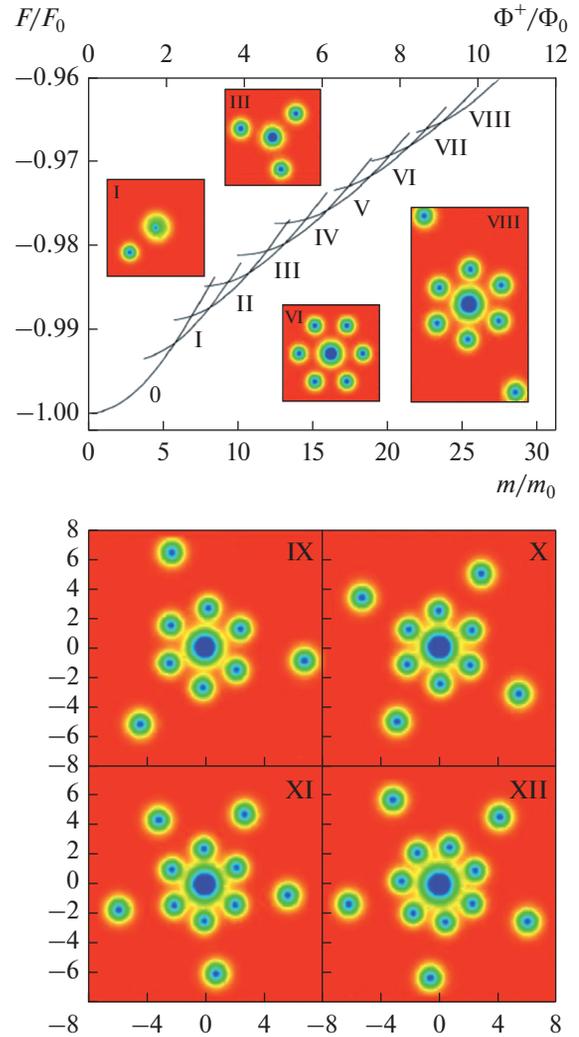


Рис. 23. Вихри вблизи магнитного диска. Цветом показана плотность куперовских пар. График — зависимость свободной энергии от относительной величины магнитного момента диска [102].

лельна плоскости пленки. В работе [110] было теоретически показано, что в мультислой ВТСП-ферромагнетик энергия пиннинга одиночного вихря на доменной структуре ферромагнетика может на 2 порядка превосходить энергию пиннинга немагнитным столбчатым дефектом.

Разнообразные эффекты наблюдаются и в том случае, когда ферромагнетик и сверхпроводник находятся в непосредственном контакте и их взаимодействие осуществляется через эффект близости [111–118]. Одно из проявлений эффекта близости состоит в изменении критической температуры сверхпроводника. Различают два механизма взаимодействия сверхпроводящего и магнитного параметров порядка: электромагнитный (взаимодействие куперовской пары с полями, созданными магнитными моментами) и обменное

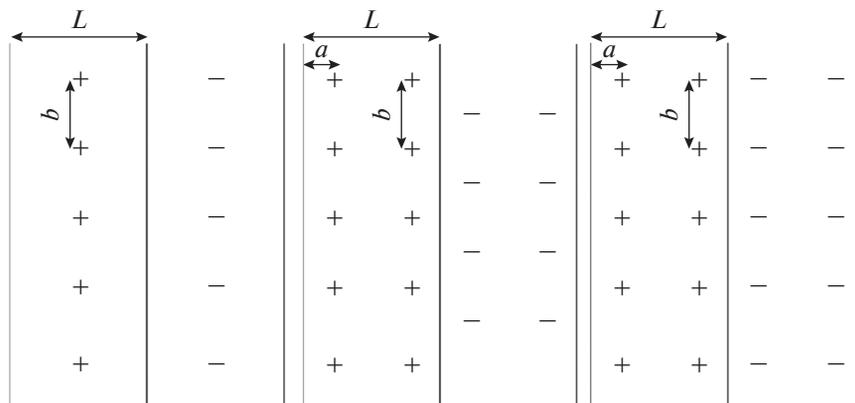


Рис. 24. Некоторые из возможных конфигураций вихрей вблизи доменных стенок (вертикальные линии) [108]. “+” и “-” соответствуют вихрям противоположного знака.

взаимодействие магнитных моментов и электронов, составляющих куперовскую пару. При формировании доменной структуры ферромагнетика наблюдается появление сверхпроводимости вблизи доменных стенок (domain wall superconductivity DWS, [111–113]). В [114] существование DWS было подтверждено экспериментально. Эффект имеет место как в композитных структурах, так и в ферромагнитных сверхпроводниках, таких как  $UGe_2$ ,  $URhGe$ . В FS-комposite обменное поле, действующее на куперовские пары, ниже вблизи доменной стенки, чем внутри домена. В работе [111] наблюдали локальное повышение  $T_c$  сверхпроводника (пониженной в сверхпроводнике из-за присутствия ферромагнетика), если длина когерентности превосходила толщину сверхпроводящего слоя. В [115] рассчитана критическая температура сверхпроводника, находящегося в контакте с FM-слоем со спиральной магнитной структурой. В [116, 117] эффект близости с ферромагнитным диэлектриком исследовали экспериментально, показано существенное снижение критической температуры сверхпроводника. Расчеты показывают также [118], что вдоль доменной стенки сверхпроводимость может проникать в ферромагнетик на глубину, существенно превышающую  $\xi_N = \sqrt{D/2\pi T}$  в нормальном металле ( $D$  – коэффициент диффузии).

В [119] экспериментально получены вольт-амперные характеристики двойного SF-слоя при разной величине внешнего магнитного поля, показано, что критический ток в этом случае меньше критического тока одиночного сверхпроводящего слоя, что связано с подавлением параметра порядка вблизи ферромагнетика. Экспериментально и теоретически магнитные и транспортные свойства двойных и более слоев ферромагнетик–сверхпроводник исследовали также в работах [120–124], получены серии вольт-амперных

характеристик. Необходимыми также являются исследования, связанные со структурой доменных стенок в отдельном ферромагнитном слое [123].

#### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОМПОЗИТНЫХ НАНОСТРУКТУР ФЕРРОМАГНЕТИК–СВЕРХПРОВОДНИК: МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

**Моделирование ВТСП с магнитными наночастицами в качестве центров пиннинга.** В работах [23–28] на основе континуального метода Монте-Карло была разработана методика, позволяющая самосогласованно рассчитывать вихревые конфигурации и намагниченность трехмерных образцов ВТСП с ферромагнитными наночастицами в качестве центров пиннинга. Следует отметить, что магнитный момент частицы, находящейся внутри образца, не является постоянной величиной и зависит от локального магнитного поля, созданного находящимися в образце вихрями. Поэтому простое выражение для потенциала взаимодействия частицы с вихрем, как в работах [23–28], не может быть использовано и необходимо учитывать в модели самосогласованное взаимодействие магнитных моментов частиц с вихревой решеткой. Также представляют интерес ферромагнитные включения произвольной формы и размера.

При движении электрона в случайном примесном потенциале  $U(r)$ , если он не меняется при обращении времени, возможно одновременное существование двух комплексно-сопряженных электронных состояний (образующих куперовскую пару). В низкотемпературных сверхпроводниках это условие выполняется для немагнитных примесей, которые таким образом слабо влияют на величину щели и, следовательно, критическую температуру (теорема Андерсона, [125]). Магнитные же примеси взаимодействуют со спином электрона, поэтому симметрия состояний при

обращении времени нарушается, что приводит к резкому падению  $T_c$  с ростом концентрации таких дефектов. В ВТСП теорема Андерсона, как правило, не выполняется [126], так что магнитные и немагнитные примеси зачастую одинаково влияют на  $T_c$ . Таким образом, при небольших концентрациях ферромагнетика можно пренебречь эффектом близости и исследовать эффекты, связанные с взаимодействием магнитных моментов примесей с полем вихрей. В работах [23–28] анализируют влияние электромагнитного взаимодействия вихрей и примесных частиц. Взаимодействие, обусловленное эффектом близости, приближенно учитывают в виде т.н. немагнитной части взаимодействия, имеющей вид потенциальной ямы размером  $\sim \xi$ . С учетом этого потенциал магнитных примесей записывается в виде:

$$U_p = U_{pm} + U_{pn}, \quad U_{pm} = -\mu H_v, \quad (35)$$

$\mu$  – проекция магнитного момента примесной частицы на направление внешнего поля (совпадающее с направлением поля вихря). Второе соотношение справедливо, поскольку размер частицы выбран малым по сравнению с  $\lambda$ . При расчете выбирается значение  $\mu \sim (10^3 - 10^4) \mu_b$ , что близко к реальным экспериментальным данным для магнитных частиц:

$$H_v = \begin{cases} \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0 \left( \frac{r}{\lambda} \right), & r > \xi \\ \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} (\ln \kappa - 0.28), & r < \xi \end{cases}. \quad (36)$$

Второе соотношение соответствует полю в центре вихря. Пусть магнитные примеси находятся внутри образца. Частица становится однодоменной, если ее радиус оказывается меньше некоторого критического значения, определяемого соотношением величины поверхностной энергии доменной стенки и энергии магнитного поля однородно намагниченной частицы. Также квантованием момента частицы можно пренебречь, учитывая большое количество магнитных атомов, слагающих частицу. Ансамбль таких частиц может быть представлен в виде совокупности магнитных моментов, абсолютная величина которых постоянна. Изменение намагниченности такой системы достигается вращением вектора намагниченности отдельной частицы во внешнем поле. Предполагается также, что концентрация примесей такова, что среднее расстояние между ними больше или порядка  $\lambda$ , т.е. каждый магнитный диполь экранирован друг от друга сверхпроводящими областями.

Перемагничивание ферромагнитной примеси в расчете реализуется введением в алгоритм Монте-Карло дополнительного подпроцесса – переориентации ее магнитного момента. Энергия  $U$

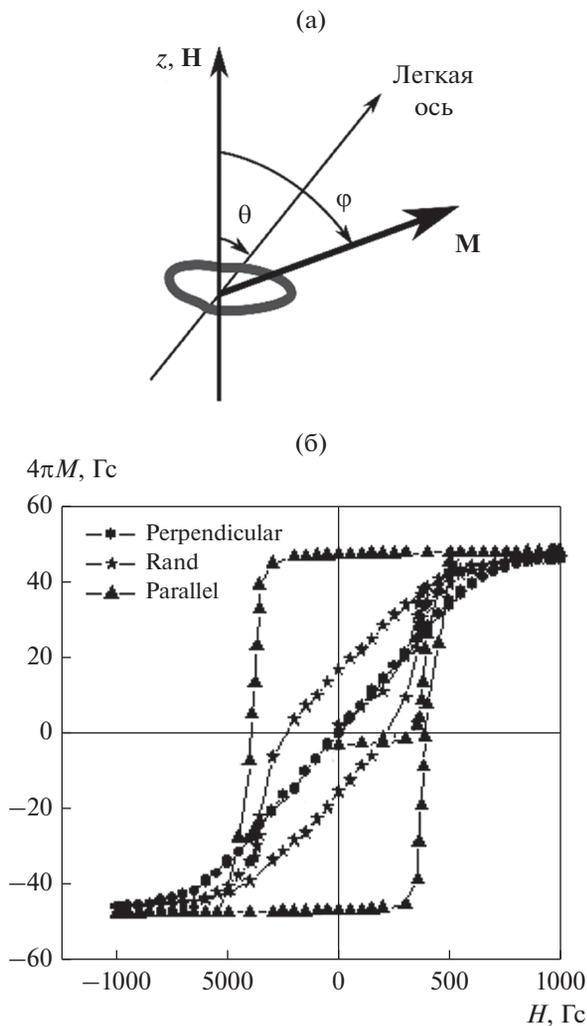
частицы складывается из энергии момента в поле вихрей и их отражений, во внешнем поле с учетом мейсснеровского тока (транспортного в случае перемагничивания током) и энергии магнитной анизотропии (одноосного кристалла – для простоты [127, 128]), так что часть энергии магнитной примеси имеет вид:

$$U = KV \sin^2(\phi - \theta) - \mu(H_m + H_v) \cos \phi, \quad (37)$$

где  $\mu$  – магнитный момент частицы,  $H_m$  – поле, обусловленное мейсснеровским и транспортным током,  $K = \beta M^2/2$  – параметр анизотропии [128],  $\phi$  и  $\theta$  – углы между направлением внешнего поля,  $\mu$  и осью легкого намагничивания,  $M = \mu/V$  – модуль намагниченности,  $V$  – объем примеси (рис. 25; для магнитной наночастицы для определенности полагаем  $V \approx \xi^3$ ,  $\beta \sim 1$ ). Очевидно, что форма кривой перемагничивания ансамбля таких частиц зависит от ориентации их осей легкого намагничивания относительно направления внешнего поля. Температуры, для которых производится расчет, достаточно низки, так что суперпарамагнетизм [129] таких частиц практически не проявляется. Возможны 3 предельных случая:  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi/2$  и случай, когда оси легкого намагничивания ориентированы случайно. В первом случае петля перемагничивания имеет прямоугольную форму, во втором процесс перемагничивания является строго обратимым, что воспроизводится расчетом Монте-Карло (рис. 25) [39].

При расчете [39, 130, 131] исходная полная намагниченность примесей равна нулю и для определенности все магнитные моменты направлены под прямым углом к внешнему полю. Когда магнитные частицы находятся внутри сверхпроводника, среднее поле, действующее на них, равно нулю, пока вихри не проникли в образец, и становится  $\sim n\Phi_0$  при конечной двумерной концентрации  $n$  вихрей. Для магнитных частиц рассмотрим упоминавшиеся выше 3 случая:

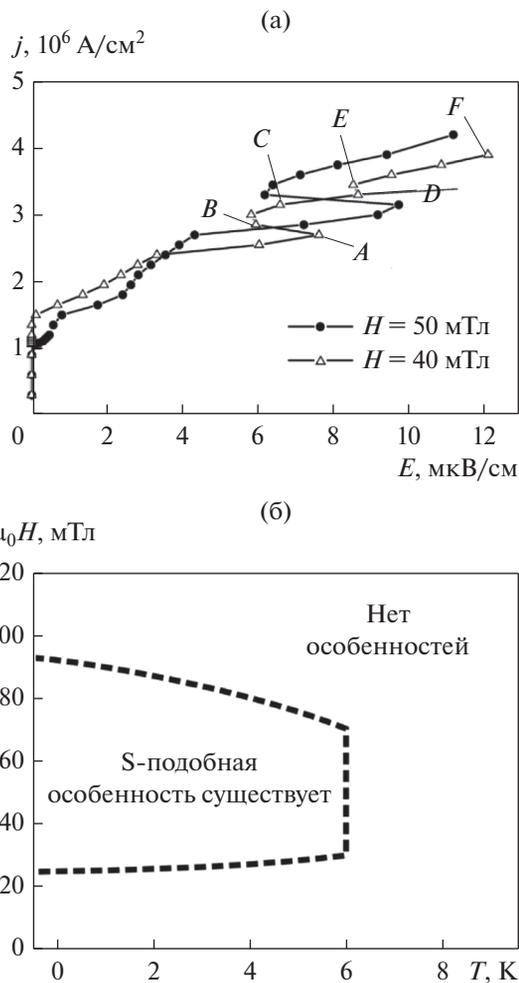
1)  $\theta = 0$ . При небольших полях число частиц с  $\phi = 0$  и  $\phi = \pi$  оказывается примерно одинаковым. Переориентация моментов происходит теперь, когда поле в образце  $n\Phi_0$  (всегда  $n\Phi_0 \leq \mu_0 H$ ) достигает величины коэрцитивной силы. То же самое – при смене знака внешнего поля. Таким образом, присутствие сверхпроводника не меняет качественно поведения магнитных частиц. Расчет показывает уширение петли перемагничивания частиц. Переориентации магнитных моментов не происходит, если  $K > K_c = MH_{\max}$  ( $\mu_0 H_{\max} = 100$  мТл – амплитуда перемагничивающего поля). В этом случае вихри не закрепляются на противоположно направленных магнитных моментах, и число эффективных центров пиннинга



**Рис. 25.** (а) Ферромагнитная наночастица, (б) типичные петли перемагничивания ансамбля ферромагнитных частиц внешним магнитным полем при различной ориентации осей легкого намагничивания: параллельно магнитному полю (parallel), перпендикулярно (perpendicular) и случайное распределение (rand) [39].

(и, следовательно, ширина петли) сокращается примерно вдвое.

2)  $\theta = \pi/2$ . Расчет показывает, что присутствие сверхпроводника делает процесс перемагничивания примесей необратимым. При уменьшении внешнего поля от максимального значения до нуля вихри остаются закрепленными на дефектах, и магнитный момент примеси, захватившей вихрь, повернут в соответствии с полем в его центре, а не с внешним полем — результат нелинейного взаимодействия сверхпроводника и ферромагнитного ансамбля. Коэрцитивная сила же остается постоянной и равной  $\approx 45$  мТл. Именно при таком поле начинается проникновение в образец вихрей противоположного знака и их аннигиляция с вихрями, закрепленными на дефектах.



**Рис. 26.** (а) ВАХ ВТСП с ферромагнитными наночастицами во внешнем поле  $H$  [135], (б) “фазовая диаграмма” существования S-образной особенности [65].

3) При случайной ориентации осей легкого намагничивания также наблюдается уширение петли для системы примесей.

При пропускании через ВТСП, находящийся в магнитном поле, транспортного тока наблюдается S-образная особенность ВАХ (рис. 26а) [132–135], обусловленная самосогласованным взаимодействием магнитных моментов примесей с вихревой системой. Во внешнем поле пластина заполняется сначала вихрями одного знака, параллельно которым поворачиваются все магнитные моменты (точка 1 на рис. 26а). Проникновение вихрей противоположного с внешним полем знака для  $\mu_0 H = 40$  мТл начинается при поле тока  $\mu_0 H_j = 85$  мТл, причем они сразу занимают почти половину образца, а их средняя плотность много меньше плотности вихрей, заходящих справа. Поля, создаваемого этими вихря-

ми, недостаточно для перемагничивания примесей, вихри беспрепятственно проходят в образец, и напряженность растет. Когда начинается переориентация магнитных моментов, вихри захватываются дефектами и напряженность падает. В соответствии с этим область аннигиляции смещается из центра образца к левой границе при  $\mu_0 H_f = 85$  мТл, далее снова к центру (точки 3–6). При немагнитных дефектах область аннигиляции с ростом тока перемещается монотонно к середине пластины. При уменьшении тока ВАХ особенностей не имеет, поэтому наблюдается гистерезис.

При повышении температуры  $T$  нелинейный участок смещается влево (в сторону меньшего напряжения), одновременно выпрямляясь до полного исчезновения. Граничное значение температуры соответствует случаю, когда  $kT$  становится сравнимой с энергией магнитной анизотропии, т.е. существенную роль начинают играть тепловые флуктуации магнитных моментов. Имеем  $KV \sim kT$  ( $V$  – объем примеси), откуда при выбранном значении параметра анизотропии  $T \approx 6$  К (рис. 266). При расчете в рамках трехмерной модели эффект сохраняется, хотя и становится менее ярко выраженным.

Образец, имеющий падающий участок (участок с отрицательной дифференциальной проводимостью) на ВАХ, можно использовать как активный элемент в цепи генератора электромагнитных колебаний. Также в области неустойчивости происходит расслоение образца на участки (домены) с различным током или электрическим полем (такие эффекты характерны для полупроводников с  $S$ - и  $N$ -образными ВАХ) [136].

**ВТСП с цилиндрическими магнитными дефектами.** Также на практике можно использовать включения ферромагнетика в виде цилиндров произвольного радиуса (для определенности намагниченных до насыщения) [137, 138]. Для расчетов методом Монте-Карло [139–141] в рамках модели слоистого ВТСП необходимо получить энергию взаимодействия вихря с таким дефектом. Пусть бесконечный ферромагнитный цилиндр имеет радиус  $R$ , намагниченность  $\mathbf{M}$  и расположен внутри сверхпроводника, содержащего прямые вихревые нити. По аналогии с [12], необходимо решить уравнение Лондонов для векторного потенциала  $\mathbf{A}$  внутри сверхпроводника и уравнение Максвелла внутри магнитной частицы в цилиндрических координатах:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial r} - A_\phi \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{\lambda^2} \right) = 0, & r \geq R \\ \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial r} - A_\phi \frac{1}{r^2} = 0, & r < R \end{cases}. \quad (38)$$

С учетом граничных условий:

$$A_\phi^{\text{SC}}|_R = A_\phi^{\text{m}}|_R, \quad \text{rot } \mathbf{A}^{\text{SC}}|_R = (\text{rot } \mathbf{A}^{\text{m}} - 4\pi\mathbf{M})|_R, \quad (39)$$

$$\begin{cases} A_\phi = 4\pi M \frac{\frac{1}{R} K_1\left(\frac{R}{\lambda}\right)}{\frac{2}{R} K_1\left(\frac{R}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda} K_0\left(\frac{R}{\lambda}\right)} r, & r < R \\ A_\phi = \frac{4\pi M}{\frac{2}{R} K_1\left(\frac{R}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda} K_0\left(\frac{R}{\lambda}\right)} K_1\left(\frac{r}{\lambda}\right), & r \geq R \end{cases}, \quad (40)$$

где  $K_0, K_1$  – функции Макдональда нулевого и первого порядка. Тогда экранирующий ток вокруг магнитной частицы имеет только одну компоненту  $(0, j_\phi(r), 0)$  и определяется выражением

$$j_\phi = -\frac{cM}{\lambda^2} \frac{K_1\left(\frac{r}{\lambda}\right)}{\frac{2}{R} K_1\left(\frac{R}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda} K_0\left(\frac{R}{\lambda}\right)}. \quad (41)$$

Энергия взаимодействия вихря с частицей рассчитывается как работа силы Лоренца  $F$  по перемещению вихря из бесконечности в данную точку, взятая с обратным знаком:

$$U = -\int_{\infty}^x F dx = -d \frac{\Phi_0 M}{R \left( \frac{2\lambda}{R} K_1\left(\frac{R}{\lambda}\right) + K_0\left(\frac{R}{\lambda}\right) \right)} K_0\left(\frac{r}{\lambda}\right). \quad (42)$$

Заметим, что при  $R \ll \lambda$  данное выражение переходит в выражение для энергии точечного диполя в поле вихря. Радиус ферромагнитных частиц составляет  $0.1\lambda - 2\lambda$ , намагниченность принята характерной для ферромагнетиков и равной  $10^2 - 10^3$  Гс. В процессе перемагничивания сверхпроводника абсолютная величина и направление намагниченности магнитного дефекта остаются постоянными (т.е. принимается, что величина коэрцитивной силы ферромагнетика существенно превышает амплитуду перемагничивающего поля). Расчет показывает в этом случае почти нулевую остаточную намагниченность при поле, противоположном магнитному моменту примеси. Это связано с отталкиванием вихря от магнитного момента противоположного знака. Зависимости  $j_c$  от радиуса  $R$  цилиндров при фиксированной объемной концентрации ферромагнетика (так что  $N\pi R^2 = \text{const}$ ,  $N$  – число дефектов, рис. 27) имеют максимум (2 максимума при  $M > 1.6 \times 10^3$  А/м) при определенном размере дефекта. Высота и положение максимума определяются характеристиками дефектов – их концентрацией и намагниченностью. Данные максимумы обусловлены подстройкой решетки вихрей под решетку дефектов. Первый максимум появляется, когда на всех дефектах закреплено по одному вихрю, второй –

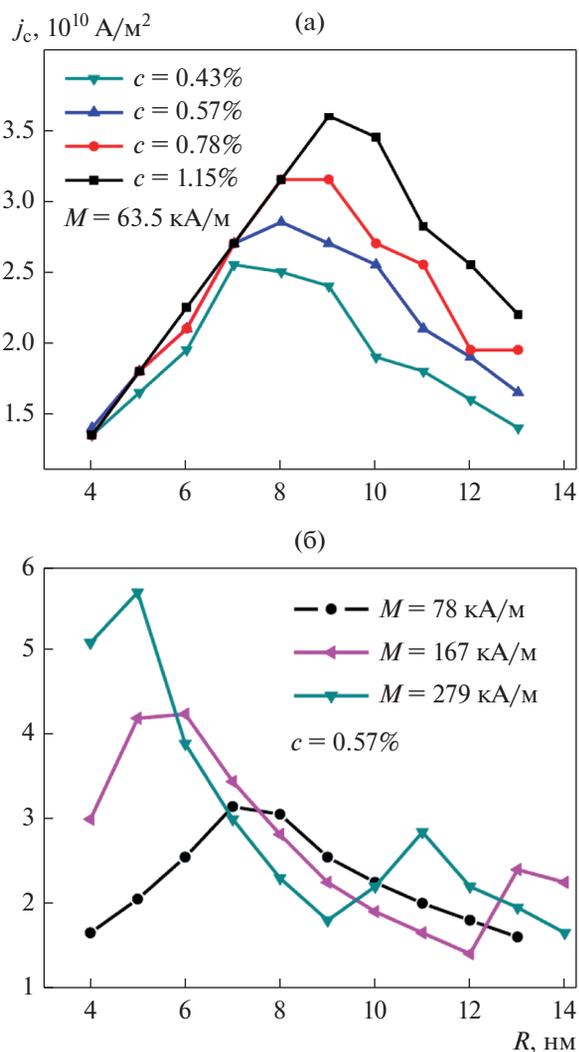


Рис. 27. Серии зависимостей критического тока от радиуса дефектов при различной концентрации (а) и намагниченности ферромагнетика (б) [140].

когда на каждом из дефектов оказывается возможным закрепление двух вихрей.

Далее учитывается, что в условиях эксперимента сверхпроводник может быть нанесен на подложку из ферромагнитного материала. Подложка вводится в расчет в виде ансамбля наноразмерных частиц – “примесей”, магнитный момент которых оценивается из эксперимента. Действительно, магнитная подложка – это фактически внешние поля, пронизывающие сверхпроводник, и с учетом того, что сверхпроводник тонкий, можно предположить, что несмотря на экранировку, по крайней мере пограничные слои ВТСП находятся в поле ферромагнитной подложки. Моделирование одной подложки совокупностью магнитных частиц оправдано тем, что суммарная намагниченность частиц в итоге однородна при тех концентрациях, которые используют в расче-

тах. Магнитные поля частиц многократно перекрываются, образуя практически постоянное значение. Так как эти частицы находятся вне сверхпроводника, то влиянием магнитного поля вихрей можно пренебречь и считать, что перемагничивание подложки осуществляется только внешним полем. По этой же причине не нужно учитывать немагнитную часть взаимодействия вихря с ферромагнитной “примесью”. Кривая намагниченности подложки является обратимой, известна из эксперимента и напрямую вводится в расчет.

Для ВТСП на магнитной подложке продемонстрировано нелинейное взаимодействие ферромагнетика и сверхпроводника (кривая намагниченности композита не совпадает с суммой кривых намагниченности сверхпроводника и подложки) и “парамагнитный эффект” (кривая намагниченности при высоких полях заходит в область отрицательных значений намагниченности  $-4\pi M$ ) [142]. Оба эффекта имеют экспериментальное подтверждение [143].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Слоистые ВТСП в настоящее время представляют существенный научный и практический интерес. Большинство известных ВТСП таковы, что при температурах, обычно используемых на практике, выполняется условие  $\xi_c < d$ , т.е. вихревая нить может быть представлена в виде стопки плоских слоев вихрей – панкейков. Такой сверхпроводник имеет богатую фазовую диаграмму в магнитном поле. Перпендикулярная слоям компонента магнитного поля рождает плоские слоевые вихри – панкейки, параллельная слоям – джозефсоновские вихри в межплоскостных промежутках. Панкейки в соседних слоях взаимодействуют, взаимодействие состоит из двух компонент – электромагнитного и джозефсоновского. В наклонном магнитном поле формируются различные вихревые структуры – вихревые цепочки, вихревые молекулы, решетки наклонных абрикосовских вихрей, пересекающиеся решетки абрикосовских и джозефсоновских вихрей. Характер вихревой конфигурации определяется параметром  $\alpha = \lambda/\lambda_j$ .

Для численного моделирования вихревой решетки используются методы молекулярной динамики и Монте-Карло. Метод молекулярной динамики позволяет моделировать временную эволюцию системы, но все существующие в данный момент алгоритмы позволяют работать только с постоянным числом вихрей либо искусственно вводить вихри на границе, моделирующее внешнее поле. Методом молекулярной динамики рассчитаны профили магнитного поля в сверхпроводнике и необратимые кривые намагниченности, показано уширение петли намагниченности

при росте концентрации дефектов. Перспективным направлением для дальнейших исследований может быть применение метода к расчету отклика вихревой решетки на кратковременные импульсы тока и магнитного поля. Метод Монте-Карло позволяет работать с переменным числом вихрей. Недавно разработанные алгоритмы позволяют естественным образом воспроизводить проникновение вихрей в сверхпроводник с границы через барьер Бина–Ливингстона и таким образом воспроизводить перемагничивание сверхпроводника как внешним магнитным полем, так и собственным полем транспортного тока. Методом Монте-Карло было исследовано плавление решетки вихрей в дефектном сверхпроводнике, продемонстрированы фазовые переходы гексагональная решетка–вращающаяся решетка и вращающаяся решетка–вихревая жидкость, инверсная кристаллизация вихревой системы. Рассчитаны вольт-амперные характеристики, гистерезисные и транспортные потери на перемагничивание. Качественно объяснен эффект подавления критического тока при росте концентрации дефектов. Для трехмерного анизотропного сверхпроводника получены спадающие зависимости критического тока сверхпроводника с колончатыми дефектами от наклона дефектов к оси анизотропии. Существенным недостатком метода является, однако, отсутствие в расчете реального времени.

Создание композитных структур ферромагнетик–сверхпроводник существенно расширяет круг наблюдаемых явлений. Теоретически предсказаны такие эффекты как подстройка вихревой решетки под решетку магнитных дефектов, наведенная полем сверхпроводимость, сверхпроводимость вблизи доменной стенки, S-образные вольт-амперные характеристики (получены в результате расчета Монте-Карло, выполненного для сверхпроводника с ферромагнитными наночастицами в качестве центров пиннинга, самосогласованно взаимодействующими с вихревой системой). Большинство эффектов имеют надежное экспериментальное подтверждение. Образец с S-образной ВАХ может использоваться в качестве активного элемента в цепи генератора электрических колебаний. Эффекты, наблюдающиеся при взаимодействии сверхпроводника и ферромагнетика, могут быть использованы при создании логических элементов и магнитной памяти.

Авторы выражают благодарность РФФИ, гранты № 20-08-00811 (Р.И.А. и Ма.А.Н.) и 20-21-00085 (К.В.А. и Мо.А.Н.). Работа также выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект государственного задания № 0723-2020-0036).

## СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

1.  $\Phi_0 = \frac{\pi\hbar c}{e}$  – квант магнитного потока.
2.  $\lambda$  – лондоновская глубина проникновения магнитного поля.
3.  $\xi$  – длина когерентности.
4.  $\kappa = \frac{\lambda}{\xi}$  – параметр Гинзбурга–Ландау.
5.  $H_{c1}, H_{c2}, H_{c3}$  – 1, 2 и 3 критические поля.
6.  $d$  – толщина сверхпроводящего слоя.
7.  $d_s$  – расстояние между сверхпроводящими слоями.
8.  $c$  – скорость света.
9.  $\hat{c}$  – направление, перпендикулярное сверхпроводящим слоям.
10.  $\lambda_{ab}, \lambda_c$  – глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводящих слоях и в направлении  $\hat{c}$ .
11.  $\xi_{ab}, \xi_c$  – то же для длины когерентности.
12.  $m$  – масса электрона.
13.  $m_{ab}, m_c$  – эффективная масса электрона в сверхпроводящих слоях и в направлении  $\hat{c}$ .
14.  $\gamma$  – параметр анизотропии.
15.  $\alpha$  – параметр в уравнениях Гинзбурга–Ландау. Также на стр. 11, 12 и на рис. 12  $\alpha = \frac{\lambda}{\lambda_J}$  – отношение лондоновской и джозефсоновской длин.
16.  $\Lambda = \frac{2\lambda^2}{d}$  – эффективная длина экранирования в сверхпроводящей пленке.
17.  $C$  – теплоемкость вихревой решетки. Также на стр. 16  $C$  – постоянная Эйлера.
18.  $U_p$  – эффективная глубина ямы дефекта.
19.  $J_c$  – критический ток.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Weber H.W. Neutron irradiation effects in high-T single crystals // *Physica C*. 1991. V. 185–189. P. 309–314.
2. Kulikov D.V., Trushin Yu.V., Sauerzopf F.M., Zehetmayer M., Weber H.W. Changes in the transition temperature after irradiation and annealing in single crystalline  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$  // *Physica C*. 2001. V. 355. P. 245–250.
3. Kujur A., Asokan K., Behera D. The effect of 200 MeV Ag ions on the transport property of yttrium barium copper oxide/silver composite thin film // *Thin Solid Films*. 2013. V. 536. P. 256–260.
4. Strickland N.M., Talantsev E.F., Long N.J., Xia J.A., Searle S.D., Kennedy J. Flux pinning by discontinuous columnar defects in 74 MeV Ag-irradiated  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  coated conductors // *Physica C*. 2009. V. 469. P. 2060–2067.

5. *Kujur A., Asokan K., Behera D.* Critical current density enhancement by ion irradiation for thick  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$  films prepared by diffusion reaction technique // *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. B.* 2015. V. 343. P. 94–100.
6. *Li G.Z., Wang M., Yang W.M.*, Enhanced superconducting properties in infiltration processed Y–Ba–Cu–O single-grain superconductor with nano-sized pinning centers // *J. Alloys Compd.* 2015. V. 649. P. 559–563.
7. *Ben Salem M.K., Almessiere M.A., Al-Otaibi A.L., Ben Salem M., Ben Azzouz F.* Effect of  $\text{SiO}_2$  nano-particles and nano-wires on microstructure and pinning properties of  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$  // *J. Alloys Compd.* 2016. V. 657. P. 286–295.
8. *Sauerzopf F.M., Wiesinger H.P., Frischher M.C., Gerstenberg T., Gerstenberg H.* Fast neutron irradiation and flux pinning in single crystalline high temperature superconductors // *Cryogenics.* 1993. V. 33. № 1. P. 8–13.
9. *Sen P., Bandyopadhyay S.K., Nambissan P.M.G., Ganguly R., Barat P., Mukherjee P.* The study of inter and intragranular pinning behavior of oxygen irradiated textured polycrystalline  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$  and  $\text{Bi}_{1.84}\text{Pb}_{0.34}\text{Sr}_{1.91}\text{Ca}_{2.03}\text{Cu}_{3.06}\text{O}_{10+\delta}$  superconductors // *Physica C.* 2004. V. 407. № 1–2. P. 55–61.
10. *Troitskii A.V., Demikhov T.E., Antonova L.Kh., Kuz'michev S.A., Skuratov V.A., Semina V.K., Mikhailova G.N.* Effect of Ion Irradiation of the Second-Generation HTSC  $\text{GdBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$  Ribbons on the Critical Parameters of Superconductor // *Phys. Met. Metall.* 2019. V. 120. № 2. P. 133–137.
11. *Вальков В.В., Злотников А.О.* Аномальные свойства и сосуществование антиферромагнетизма со сверхпроводимостью вблизи квантовой критической точки в редкоземельных интерметаллидах // *ЖЭТФ.* 2013. Т. 143. № 5. С. 941–947.
12. *Вальков В.В., Злотников А.О.* О реализации фазы сосуществования антиферромагнетизма и сверхпроводимости в тяжелофермионных интерметаллидах // *ЖЭТФ.* 2012. Т. 95. № 7. С. 390–396.
13. *Snezhko A., Prozorov T., Prozorov R.* Magnetic nanoparticles as efficient bulk pinning centers in type-II superconductors // *Phys. Rev. B.* 2005. V. 71. P. 024527(1–6).
14. *Huang C., Yong H., Zhou Y.* Effect of magnetic nanoparticles on the mechanical properties of type-II superconductors // *Acta Mech. Sol.* 2014. V. 27. № 1. P. 65–72.
15. *Alden T.H., Livingston J.D.* Ferromagnetic particles in a type-II superconductor // *J. Appl. Phys.* 1996. V. 37. P. 3551–3556.
16. *Koch C.C., Love G.R.* Superconductivity in niobium containing ferromagnetic gadolinium or paramagnetic yttrium dispersions // *J. Appl. Phys.* 1969. V. 40. P. 3582–3587.
17. *Кашурников В.А., Руднев И.А., Грачева М.Е., Никитенко О.А.* Фазовые переходы в двумерной вихревой системе с дефектами: моделирование методом Монте-Карло // *ЖЭТФ.* 2000. Т. 117. № 1. С. 196–206.
18. *Грачева М.Е., Кашурников В.А., Руднев И.А.* Особенности динамики плавления вихревой решетки в ВТСП при наличии центров пиннинга // *Письма в ЖЭТФ.* 1997. Т. 66. № 4. С. 269–275.
19. *Rudnev I.A., Kashurnikov V.A., Gracheva M.E., Nikitenko O.A.* Phase transitions in a two-dimensional vortex lattice with defects: Monte Carlo simulation // *Physica C.* 2000. V. 332. P. 383–388.
20. *Lozovik Yu.E., Mandelshtam V.A.* Classical and quantum melting of a Coulomb cluster in a trap // *Phys. Lett. A.* 1992. V. 165. P. 469–472.
21. *Лозовик Ю.Е., Ракоч Е.А.* Двумерные микрокластеры вихрей: оболочечная структура и плавление // *Письма в ЖЭТФ.* 1997. Т. 65. С. 268–273.
22. *Rudnev I.A., Kashurnikov V.A., Gracheva M.E., Nikitenko O.A.* Phase Transitions in a Two Dimensional Vortex Lattice with Defects: Monte Carlo Simulation // *Physica C.* 2000. V. 332. № 1–4. P. 383–388.
23. *Кашурников В.А., Руднев И.А., Зюбин М.В.* Намагниченность двумерных сверхпроводников с дефектами // *ЖЭТФ.* 2002. Т. 121. № 2. С. 442–452.
24. *Зюбин М.В., Руднев И.А., Кашурников В.А.* Упорядоченные состояния и структурные переходы в системе вихрей Абрикосова с периодическим пиннингом // *ЖЭТФ.* 2003. Т. 123. № 6. С. 1212–1226.
25. *Зюбин М.В., Руднев И.А., Кашурников В.А.* Инверсная кристаллизация системы вихрей Абрикосова при периодическом пиннинге // *Письма в ЖЭТФ.* 2002. Т. 76. № 4. С. 263–266.
26. *Одинцов Д.С., Руднев И.А., Кашурников В.А.* Динамика вихревой системы и энергетические потери в двумерной сверхпроводящей пластине с током // *ЖЭТФ.* 2006. Т. 130. № 1. С. 77–88.
27. *Одинцов Д.С., Руднев И.А., Кашурников В.А.* К вопросу о механизмах транспортных потерь в высокотемпературных сверхпроводниках // *ЖЭТФ.* 2007. Т. 132. № 1. С. 287–289.
28. *Rudnev I.A., Odintsov D.S., Kashurnikov V.A.* Critical current suppression in high- $T_c$  superconductors and its dependence on the defects concentration // *Phys. Lett. A.* 2008. V. 372. P. 3934–3936.
29. *Brandt E.H.* Ideal and distorted vortex lattice in bulk and film superconductors (Review) // *Low Temp. Phys.* 2010. V. 36. P. 2–12.
30. *Vagov A., Wolf S., Croitoru M.D., Shanenko A.A.* Universal flux patterns and their interchange in superconductors between types I and II // *Commun. Phys.* 2020. V. 3. P. 58.
31. *Valsecchi J., White J.S., Bartkowiak M., Treime W., Kim Y., Lee S.W., Gokhfeld D.M., Harti R.P., Morgano M., Strobl M., Grünzweig C.* Visualization of compensating currents in type-II/1 superconductor via high field cooling // *Appl. Phys. Lett.* 2020. V. 116. P. 192602.
32. *Выков А.А., Гокхфельд Д.М., Савитская Н.Е., Терентьев К.Ю., Попков С.И., Мистонов А.А., Григорьева Н.А., Зakhidov A., Grigoriev S.V.* Flux pinning mechanisms and a vortex phase diagram of tin-based inverse opals // *Supercond. Sci. Technol.* 2019. V. 32. P. 115004.
33. *Smith A.W., Jaeger H.M., Rosenbaum T.F., Petrean A.M., Kwok W.K., Crabtree G.W.* Vortex flow and transverse flux screening at the Bose glass transition // *Phys. Rev. Lett.* 2000. V. 84. № 21. P. 4974.

34. *Fuchs D. T., Zeldov E., Tamegai T., Ooi S., Rappaport M., Shtrikman H.* Possible new vortex matter phases in  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$  // *Phys. Rev. Lett.* 1998. V. 80. № 22. P. 4971.
35. *Greer A.L.* Too hot to melt // *Nature.* 2000. V. 44. P. 134.
36. *Yeshurun Y., Salamon M.B., Rao K.V., Chen H.S.* Spin-glass-ferromagnetic critical line in amorphous Fe-Mn alloys // *Phys. Rev. Lett.* 1980. V. 45. № 16. P. 1366.
37. *Avraham N., Khaykovich B., Myasoedov Y., Rappaport M., Shtrikman H., Feldman D.E., Tamegai T., Kesik P.H., Lik M., Konczykowski M., van der Beek K., Zeldov E.* ‘Inverse’ melting of a vortex lattice // *Nature.* 2001. V. 411. P. 451.
38. *Reichhardt C., Olson C.J., Nori F.* Commensurate and incommensurate vortex states in superconductors with periodic pinning arrays // *Phys. Rev. B.* 1997. V. 57. № 13. P. 7937.
39. *Каушурников В.А., Максимова А.Н., Руднев И.А.* Процессы перемагничивания в слоистых ВТСП с ферромагнитными примесями // *ФТТ.* 2014. Т. 56. № 5. С. 861–877.
40. *Mola M.M., Hill S., Brooks J.S., Qualls J.S.* Quantum melting of the quasi-two-dimensional vortex lattice in  $\kappa\text{-(ET)}_2\text{Cu(NCS)}_2$  // *Phys. Rev. Lett.* 2001. V. 86. № 10. P. 2130.
41. *Eltsev Yu., Rapp O.* Flux lattice melting and nonlocal electrodynamics in  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$  single crystal in a magnetic field parallel to  $\text{CuO}_2$  layers // *Phys. Rev. B.* 1999. V. 60. № 21. P. 14621.
42. *Ryu S., Hellerqvist M., Doniach S., Kapitulnik A., Stroud D.* Dynamical Phase Transition in a Driven Disordered Vortex Lattice // *Phys. Rev. Lett.* 1996. V. 77. № 25. P. 5114.
43. *Grundberg S., Rammer J.* Self-consistent theory of vortex dynamics in disordered superconductors // *Phys. Rev. B.* 2000. V. 61. № 1. P. 699.
44. *Pal D., Dasgupta D., Sarma B.K., Bhattacharya S., Ramakrishnan S., Grover A.K.* Amorphization of vortex matter and indication of a reentrant peak effect in  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$  // *Phys. Rev. B.* 2000. V. 62. № 10. P. 6699.
45. *Goldschmidt Y.Y.* Molecular dynamics of pancake vortices with realistic interactions: Observing the vortex lattice melting transition // *Phys. Rev. B.* 2005. V. 72. P. 064518.
46. *Fily Y., Olive E., Soret J.C.* Driven flux-line lattices in the presence of weak random columnar disorder: Finite-temperature behavior and dynamical melting of moving Bose glass // *Phys. Rev. B.* 2009. V. 79. P. 212504.
47. *Chaturvedi H., Galliher N., Dobramysl U., Pleimling M., Tauber U.C.* Dynamical regimes of vortex flow in type-II superconductors with parallel twin boundaries // *Eur. Phys. J. B.* 2018. V. 91. P. 294.
48. *Maniv A., Zhuravlev V., Maniv T., Ofer O., Rommel R., Muller J., Sonier J.E.* Partially ordered vortex lattices in the high-field low-temperature mixed state of quasi-two-dimensional organic superconductors // *Phys. Rev. B.* 2015. V. 91. P. 134506.
49. *Миц П.Г., Рахманов А.Л.* Неустойчивости в сверхпроводниках. М.: Наука, 1984. 262 с.
50. *Bardeen J., Stephen M.J.* Theory of the motion of vortices in superconductors // *Phys. Rev. Lett.* 1965. V. 140. № 4A. P. 1197.
51. *Шмидт В.В.* Введение в физику сверхпроводников. изд. 2-е, испр. и доп. М.: МЦНМО, 2000. 402 с.
52. *Suhl H.* Inertial mass of a moving fluxoid // *Phys. Rev. Lett.* 1965. V. 14. № 7. P. 226.
53. *Chudnovsky E.M., Kuklov A.B.* Inertial mass of the Abrikosov vortex // *Phys. Rev. Lett.* 2003. V. 91. № 6. P. 067004.
54. *Yeshurun Y., Malozemoff A.P., Shaulov A.* Magnetic relaxation in high-temperature superconductors // *Rev. Mod. Phys.* 1996. V. 68. № 3. P. 911.
55. *Tinkham M.* Introduction to superconductivity. 2nd ed., N.Y.: MGH. 1996. 454 pp.
56. *Lawrence W.E., Doniach S.* in Proceedings of LT 12, Kyoto, 1970, edited by E.Kanda (Keigaku, Tokyo, 1971). P. 361.
57. *Ruggiero S.T., Barbee T.W., Beasley M.R.* Superconductivity in quasi-two-dimensional layered composites // *Phys. Rev. Lett.* 1980. V. 45. P. 1299.
58. *White W.R., Kapitulnik A., Beasley M.R.* Model system for vortex motion in coupled two-dimensional type-II superconductors // *Phys. Rev. Lett.* 1991. V. 66. P. 2826.
59. *Lowndes D.H., Norton D.P., Budai J.D.* Superconductivity in nonsymmetric epitaxial  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ / $\text{PrBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$  superlattice: The superconducting behavior of Cu–O bilayers // *Phys. Rev. Lett.* 1990. V. 65. P. 1160.
60. *Pearl J.* Current distribution in superconducting films carrying quantized fluxoids // *Appl. Phys. Lett.* 1964. V. 5. № 4. P. 65–66.
61. *Cole D., Neal J.S., Connolly M.R., Bending S.J., Savel'ev S., Nori F., Tokunaga M., Tamegai T.* Vortex pumps in the crossing lattices regime of highly anisotropic layered superconductors // *Physica C.* 2006. V. 437–438. P. 52–56.
62. *Clem J.R.* Two-dimensional vortices in a stack of thin superconducting films: A model for high-temperature superconducting multilayers // *Phys. Rev. B.* 1991. V. 43. P. 7837–7846.
63. *Каушурников В.А., Максимова А.Н., Руднев И.А., Одинцов Д.С.* Намагниченность и транспортные характеристики слоистых ВТСП с различным параметром анизотропии // *ФТТ.* 2016. Т. 58. № 8. С. 1457–1464.
64. *Kashurnikov V.A., Maksimova A.N., Rudnev I.A., Odintsov D.S.* The magnetization processes in layered high-temperature superconductors: the effect of anisotropy // *IEEE Transactions on applied superconductivity.* 2016. V. 26. № 3. P. 8200404(1–4).
65. *Kashurnikov V.A., Maksimova A.N., Rudnev I.A., Odintsov D.S.* Effect of anisotropy on the current-voltage characteristics of layered high-temperature superconductors with internal ferromagnetic defects // *J. Phys. Conf. Ser.* 2016. V. 738. № 1. P. 012074(1–4).
66. *Clem J.R., Coffey M.W.* Viscous flux motion in a Josephson-coupled layer model of high-Tc superconductors // *Phys. Rev. B.* 1990. V. 42. P. 6209.

67. *Uji S., Terashima T., Konoike T., Yamaguchi T., Yasuzuka S., Kobayashi A., Zhou B.* Internal field effect on vortex states in the layered organic superconductor  $\lambda$ -(BETS)<sub>2</sub>Fe<sub>1-x</sub>GaxCl<sub>4</sub> ( $x = 0.37$ ) // *Phys. Rev. B.* 2017. V. 95. P. 165133.
68. *Sheikhzada A. Gurevich A.* Dynamic transition of vortices into phase slips and generation of vortex-antivortex pairs in thin film Josephson junctions under dc and ac currents // *Phys. Rev. B.* 2017. V. 95. P. 214507.
69. *Clem J.R., Coffey M.W., Hao Z.* Lower critical field of a Josephson-coupled layer model of high-Tc superconductors // *Phys. Rev. B.* 1991. V. 44. P. 2732.
70. *Burlachkov L.I.* Structure of vortex lattice in biaxial superconductor // *Europhys. Lett.* 1989. V. 8. № 7. P. 673–677.
71. *Koshelev A.E.* Vortex-chain phases in layered superconductors // *Phys. Rev. B.* 2005. V. 71. P. 174507.
72. *Koshelev A.E.* Kink walls and critical behavior of magnetization near the lock-in transition in layered superconductors // *Phys. Rev. B.* 1993. V. 48. № 2. P. 1180.
73. *Koshelev A.E.* Crossing lattices, vortex chains, and angular dependence of melting line in layered superconductors // *Phys. Rev. Lett.* 1999. V. 83. № 1. P. 187.
74. *Koshelev A.E.* Josephson vortices and solitons inside pancake vortex lattice in layered superconductors // *Phys. Rev. B.* 2003. V. 68. P. 094520.
75. *Beleggia M., Pozzi G., Tonomura A., Kasai H., Matsuda T., Harada K., Akashi T., Masui T., Tajima S.* Model of superconducting vortices in layered materials for the interpretation of transmission electron microscopy images // *Phys. Rev. B.* 2004. V. 70. P. 184518.
76. *Samokhvalov A.V., Mel'nikov A.S., Buzdin A.I.* Attraction between pancake vortices and vortex molecule formation in the crossing lattices in thin films of layered superconductors // *Phys. Rev. B.* 2012. V. 85. P. 184509.
77. *Grigorenko A., Bending S., Tamegai T., Ooi S., Henini M.* A one-dimensional chain state of vortex matter // *Nature.* 2001. V. 414. P. 728.
78. *Chudy M., Eisterer M., Weber H.W.* angular dependence of Jc in coated conductors prior to and after fast neutron irradiation // *Physica C.* 2010. V. 470. P. 1300–1303.
79. *Van Bael M.J., Lange M., Raedts S., Moshchalkov V.V.* Local visualization of asymmetric flux pinning by magnetic dots with perpendicular magnetization // *Phys. Rev. B.* 2003. V. 68. P. 014509(1–4).
80. *de Souza Silva C.C., Silhanek A.V., Van de Vondel J.* Dipole-induced vortex ratchets in superconducting films with arrays of micromagnets // *Phys. Rev. Lett.* 2007. V. 98. P. 117005(1–4).
81. *Tyagi S., Goldschmidt Y.Y.* Flux melting in Bi<sub>2</sub>Sr<sub>2</sub>CaCu<sub>2</sub>O<sub>8+δ</sub>: Incorporating both electromagnetic and Josephson couplings // *Phys. Rev. B.* 2004. V. 70. P. 024501(1–14).
82. *Goldschmidt Y.Y., Tyagi S.* Interpolation of the Josephson interaction in highly anisotropic superconductors from a solution of the two-dimensional sine-Gordon equation // *Phys. Rev. B.* 2005. V. 71. P. 014503(1–9).
83. *Ryu S., Doniach S., Deutscher G., Kapitulnik A.* Monte Carlo simulation of flux lattice melting in a model high-Tc superconductor // *Phys. Rev. Lett.* 1992. V. 68. P. 710–713.
84. *Nonomura Y., Hu X.* Phase transition between two kinds of flux-line lattice in high-Tc superconductors in a tilted field // *Physica C.* 2004. V. 412–414. P. 385–390.
85. *Richardson R.A., Pla O., Nori F.* Confirmation of the modified Bean model from simulations of superconducting vortices // *Phys. Rev. Lett.* 1994. V. 72. № 8. P. 1268.
86. *Reichhardt C., Olson C.J., Groth J., Field S., Nori F.* Microscopic derivation of magnetic-flux-density profiles, magnetization hysteresis loops, and critical currents in strongly pinned superconductors // *Phys. Rev. B.* 1995. V. 52. № 14. P. 10441.
87. *Reichhardt C., Olson C.J., Groth J., Field S., Nori F.* Vortex plastic flow, local flux density, magnetization hysteresis loops, and critical current, deep in the Bose-glass and Mott-insulator regimes // *Phys. Rev. B.* 1996. V. 53. № 14. P. R8898.
88. *Reichhardt C., Olson C.J., Nori F.* Dynamic phases of vortices in superconductors with periodic pinning // *Phys. Rev. Lett.* 1997. V. 78. № 13. P. 2648.
89. *Reichhardt C., Groth J., Olson C.J., Field S.B., Nori F.* Spatiotemporal dynamics and plastic flow of vortices in superconductors with periodic arrays of pinning sites // *Phys. Rev. B.* 1997. V. 54. № 22. P. 16108.
90. *Reichhardt C., Olson C.J., Nori F.* Commensurate and incommensurate vortex states in superconductors with periodic pinning arrays // *Phys. Rev. B.* 1998. V. 57. № 13. P. 7937.
91. *Kim Y.B., Hempstead C.F., Strnad A.R.* Magnetization and Critical Supercurrents // *Phys. Rev.* 1963. V. 129. P. 528
92. *Alden T.H., Livingston J.D.* Ferromagnetic particles in a type-II superconductor // *J. Appl. Phys.* 1996. V. 37. P. 3551–3556.
93. *Koch C.C., Love G.R.* Superconductivity in niobium containing ferromagnetic gadolinium or paramagnetic yttrium dispersions // *J. Appl. Phys.* 1969. V. 40. P. 3582–3587.
94. *Palau A., Parvaneh H., Stelmashenko N.A., Wang H., Macmanus-Driscoll J.L., Blamire M.G.* Hysteretic vortex pinning in superconductor-ferromagnet nanocomposites // *Phys. Rev. Lett.* 2007. V. 98. P. 117003(1–4).
95. *Rizzo N.D., Wang J.Q., Prober D.E., Motowidlo L.R., Zeitlin B.A.* Ferromagnetic artificial pinning centers in superconducting Nb<sub>0.36</sub>Ti<sub>0.64</sub> wires // *Appl. Phys. Lett.* 1996. V. 69. P. 2285–2287.
96. *Lima C.L.S., de Souza Silva C.C., Aguiar J.A.* Ac-driven vortex-antivortex dynamics in nanostructured superconductor-ferromagnetic hybrids // *Physica C.* 2012. V. 479. P. 147–150.
97. *Lima C.L.S., de Souza Silva C.C.* Dynamics of vortex-antivortex matter in nanostructured ferromagnet-superconductor bilayers // *Phys. Rev. B.* 2009. V. 80. P. 054514(1–5).
98. *Van Bael M.J., Bekaert J., Temst K.* Local observation of field polarity dependent flux pinning by magnetic dipoles // *Phys. Rev. Lett.* 2001. V. 86. P. 155–158.
99. *Kramer R.B.G., Silhanek A.V., Van de Vondel J., Raes B., Moshchalkov V.V.* Symmetry-induced giant vortex state in a superconducting Pb film with a fivefold Penrose

- array of magnetic pinning centers // *Phys. Rev. Lett.* 2009. V. 103. P. 067007(1–4).
100. *Chen Q., Carballeira C., Moshchalkov V.V.* Symmetry-breaking effects and spontaneous generation of vortices in hybrid superconductor-ferromagnet nanostructures // *Phys. Rev. B.* 2006. V. 74. P. 214519(1–6).
  101. *De Souza Silva C.C., Aguiar J.A., Moshchalkov V.V.* Linear ac dynamics of vortices in a periodic pinning array // *Phys. Rev. B.* 2003. V. 68. P. 134512(1–6).
  102. *Milosevic M.V., Peeters F.M.* Superconducting Wigner vortex molecule near a magnetic disk // *Phys. Rev. B.* 2003. V. 68. P. 024509(1–4).
  103. *Lange M., Van Bael M.J., Bruynseraede Y., Moshchalkov V.V.* Nanoengineered magnetic-field-induced superconductivity // *Phys. Rev. Lett.* 2003. V. 90. P. 197006(1–4).
  104. *Hoffmann A., Fumagalli L., Jahedi N., Sautner J.C., Pearson J.E., Mihajlović G., Metlushko V.* Enhanced pinning of superconducting vortices by magnetic vortices // *Phys. Rev. B.* 2008. V. 77. P. 060506(R)(1–4).
  105. *Shapoval T., Metlushko V., Wolf M., Holzapfel B., Neu V., Schultz L.* Direct observation of superconducting vortex clusters pinned by a periodic array of magnetic dots in ferromagnetic/superconducting hybrid structures // *Phys. Rev. B.* 2010. V. 81. P. 092505(1–4).
  106. *Villegas J.E., Smith K.D., Huang L., Zhu Y., Morales R., Schuller I.K.* Switchable collective pinning of flux quanta using magnetic vortex arrays: Experiments on square arrays of Co dots on thin superconducting films // *Phys. Rev. B.* 2008. V. 77. P. 134510(1–5).
  107. *Erdin S., Lyuksyutov I.F., Pokrovsky V.L., Vinokur V.M.* Topological textures in a ferromagnet-superconductor bilayer // *Phys. Rev. Lett.* 2002. V. 88. P. 017001(1–4).
  108. *Erdin S.* Vortex chain states in a ferromagnet/superconductor bilayer // *Phys. Rev. B.* 2006. V. 73. P. 224506.
  109. *Touitou N., Bernstein P., Hamet J.F., Simon Ch., Méchin L., Contour J.P., Jacquet E.* Nonsymmetric current-voltage characteristics in ferromagnet/superconductor thin film structures // *Appl. Phys. Lett.* 2004. V. 85. P. 1742.
  110. *Bulaevskii L.N., Chudnovsky E.M., Maley M.P.* Magnetic pinning in superconductor-ferromagnet multilayers // *Appl. Phys. Lett.* 2000. V. 76. P. 2594–2596.
  111. *Houzet M., Buzdin A.I.* Theory of domain-wall superconductivity in superconductor/ferromagnet bilayers // *Phys. Rev. B.* 2006. V. 74. P. 214507.
  112. *Buzdin A.I., Mel'nikov A.S.* Domain wall superconductivity in ferromagnetic superconductors // *Phys. Rev. B.* 2003. V. 67. P. 020503.
  113. *Aladyshkin A.Yu., Buzdin A.I., Fraerman A.A., Mel'nikov A.S., Ryzhov D.A., Sokolov A.V.* Domain-wall superconductivity in hybrid superconductor-ferromagnet structures // *Phys. Rev. B.* 2003. V. 68. P. 184508.
  114. *Flokstra M., Aarts J.* Domain-wall enhancement of superconductivity in superconductor/ferromagnet hybrids: Case of weak ferromagnets // *Phys. Rev. B.* 2009. V. 80. P. 144513.
  115. *Champel T., Eschrig M.* Effect of an inhomogeneous exchange field on the proximity effect in disordered superconductor-ferromagnet hybrid structures // *Phys. Rev. B.* 2005. V. 72. P. 054523.
  116. *Yagovtsev V.O., Pugach N.G.* Magnetization Induced in a Superconductor Due to the Effect of Proximity with a Ferromagnetic Dielectric // *Phys. Met. Metallogr.* 2020. V. 121. № 3. P. 242–247.
  117. *Uspenskaya L.S., L'vov D.S., Penzyakov G.A., Skryabina O.V.* Nonreciprocity in Yttrium-Iron Garnet-Superconductor Structures // *Phys. Met. Metallogr.* 2020. V. 121. № 5. P. 469–475.
  118. *Volkov A.F., Efetov K.B.* Proximity effect and its enhancement by ferromagnetism in high-temperature superconductor-ferromagnet structures // *Phys. Rev. Lett.* 2009. V. 102. P. 077002.
  119. *Ilyina E.A., Cirillo C., Attanasio C.* I–V characteristics and critical currents in superconducting/ferromagnetic bilayers // *Physica C.* 2010. V. 470. P. 877–879.
  120. *Duron J., Grilli F., Dutoit B., Stavrev S.* Modelling the E–J relation of high- $T_c$  superconductors in an arbitrary current range // *Physica C.* 2004. V. 401. P. 231–235.
  121. *Otabe E.S., Komatsu S., Vyatkin V.S., Kiuchi M., Kawahara T., Yamaguchi S.* Numerical estimation of AC loss in superconductors with ripple current // *Physica C.* 2013. V. 494. P. 173–176.
  122. *Zhao Y., Fang J., Zhang W., Zhao J., Sheng L.* Comparison between measured and numerically calculated AC losses in second-generation high temperature superconductor pancake coils // *Physica C.* 2011. V. 471. P. 1003–1006.
  123. *Semenov V.S.* Analytical Representation of the Vortex Structure of a Bloch Domain Wall // *Phys. Met. Metallogr.* 2020. V. 121. № 8. P. 781–788.
  124. *Stavrev S., Yang Y., Dutoit B.* Modelling and AC losses of BSCCO conductors with anisotropic and position-dependent  $J_c$  // *Physica C.* 2002. V. 378–381. P. 1091–1096.
  125. *Де Жен П.* Сверхпроводимость металлов и сплавов. М.: Мир, 1968. 279 с.
  126. *Елесин В.Ф., Кашурников В.А., Подливаев А.И.* Влияние магнитных и немагнитных примесей на энергию связи носителей в кластерах Cu–O // *ЖЭТФ.* 1993. Т. 104. № 5(11). С. 3835–3847.
  127. *Prozorov R., Yeshurun Y., Prozorov T., Gedanken A.* Magnetic irreversibility and relaxation in assembly of ferromagnetic nanoparticles // *Phys. Rev. B.* 1999. V. 59. P. 6956–6965.
  128. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VIII Электродинамика сплошных сред. изд. 4-е. М.: Физматлит, 2005. 656 с.
  129. *Stoner E.C., Wohlfarth E.P.* A mechanism of magnetic hysteresis in heterogeneous alloys // *Philos. Trans. R. Soc. A.* 1948. V. 240. № 826. P. 599–642.
  130. *Kashurnikov V.A., Maksimova A.N., Rudnev I.A.* Ferromagnetic nanoparticles as efficient bulk pinning centers in HTSC // *J. Phys. Conf. Ser.* 2014. V. 507. P. 022017(1–4).
  131. *Кашурников В.А., Максимова А.Н., Руднев И.А.* Влияние ферромагнитных примесей на процессы переманичивания в слоистых сверхпроводниках второго рода // *Вестник НИЯУ МИФИ.* 2014. Т. 3. № 2. С. 158–166.

132. *Кашурников В.А., Максимова А.Н., Руднев И.А.* Нелинейные эффекты при перемагничивании слоистых ВТСП с ферромагнитными примесями под действием тока и внешнего магнитного поля // Письма в ЖЭТФ. 2014. Т. 100. № 7. С. 494–500.
133. *Kashurnikov V.A., Maksimova A.N., Rudnev I.A.* The peculiarities of magnetization processes in layered high-temperature superconductors with ferromagnetic defects under applying of transport current and external magnetic field // J. Phys. Conf. Ser. 2015. V. 574. P. 012129(1–4).
134. *Kashurnikov V.A., Maksimova A.N., Rudnev I.A., Odintsov D.S.* The Formation of magnetic flux domain in the type II superconductors with ferromagnetic defects // Phys. Procedia. 2015. V. 65. P. 97–100.
135. *Кашурников В.А., Максимова А.Н., Руднев И.А., Одинцов Д.С.* Домен магнитного потока в сверхпроводниках с ферромагнитными центрами пиннинга // ФТТ. 2015. Т. 57. № 9. С. 1685–1689.
136. *Бонч-Бруевич В.Л., Калашиков С.Г.* Физика полупроводников. изд. 2-е. М.: Наука, 1990. 672 с.
137. *Blamire M.G., Dinner R.B., Wimbush S.C., MacManus-Driscoll J.L.* Critical current enhancement by Lorentz force reduction in superconductor–ferromagnet nanocomposites // Supercond. Sci. Technol. 2009. V. 22. P. 025017(1–6).
138. *Tsai C.H., Huang J., Lee J.H., Khaikhatay F., Chen L., Chen A., Su Q., Wang H.* Tunable flux pinning landscapes achieved by functional ferromagnetic  $\text{Fe}_2\text{O}_3 : \text{CeO}_2$  vertically aligned nanocomposites in  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$  thin films // Physica C. 2015. V. 510. P. 13–20.
139. *Kashurnikov V.A., Maksimova A.N., Rudnev I.A.* Magnetization of layered high-temperature superconductors with extended ferromagnetic defects // Phys. Procedia. 2015. V. 71. P. 384–388.
140. *Kashurnikov V.A., Maksimova A.N., Rudnev I.A.* Magnetization of layered superconductors with ferromagnetic nanorods // J. Phys. Conf. Ser. 2015. V. 633. P. 012108(1–4).
141. *Kashurnikov V.A., Maksimova A.N., Rudnev I.A., Odintsov D.S.* The critical current density in the layered superconductors with ferromagnetic nanorods // Physica C. 2016. V. 528. P. 17–22.
142. *Кашурников В.А., Максимова А.Н., Руднев И.А., Сотникова А.П.* Нелинейное взаимодействие ферромагнетика и высокотемпературного сверхпроводника // ЖЭТФ. 2013. Т. 143. № 3. С. 546–556.
143. *Philippe M.P., Fagnard J.F., Kirsch S., Xu Z., Dennis A.R., Shi Y.H., Cardwell D.A., Vanderheyden B., Vanderbemden P.* Magnetic characterisation of large grain, bulk Y–Ba–Cu–O superconductor–soft ferromagnetic alloy hybrid structures // Physica C. 2014. V. 502. P. 20–30.