

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ  
И МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА

УДК 537.611.45

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СИЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ  
НА ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ ФРУСТРИРОВАННОЙ МОДЕЛИ ПОТТСА  
С ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ СПИНА  $q = 4$

© 2022 г. М. К. Рамазанов<sup>а</sup> \*, А. К. Муртазаев<sup>б</sup>, М. А. Магомедов<sup>а</sup>,  
М. К. Мазагаева<sup>а</sup>, А. А. Муртазаева<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Институт физики ДФИЦ РАН, ул. М. Ярагского, 94, Махачкала, 367003 Россия

<sup>б</sup>Дагестанский федеральный исследовательский центр РАН, ул. М. Гаджиева, 45, Махачкала, 367000 Россия

\*e-mail: sheikh77@mail.ru

Поступила в редакцию 22.11.2021 г.

После доработки 07.12.2021 г.

Принята к публикации 09.12.2021 г.

На основе репличного алгоритма методом Монте-Карло выполнены исследования фазовых переходов и термодинамических свойств двумерной модели Поттса с числом состояний спина  $q = 4$  на гексагональной решетке с учетом взаимодействий первых и вторых ближайших соседей во внешнем магнитном поле. Исследования проведены для значений магнитного поля в интервале  $0.0 \leq h \leq 7.0$  с шагом 1.0. Построены магнитные структуры основного состояния. Обнаружено, что в рассмотренном интервале значений магнитного поля наблюдается фазовый переход первого рода. Показано, что в интервале  $4.0 \leq h \leq 7.0$  магнитное поле снимает вырождение основного состояния и размывается фазовый переход.

*Ключевые слова:* модель Поттса, метод Монте-Карло, фазовый переход, магнитное поле

DOI: 10.31857/S0015323022030081

ВВЕДЕНИЕ

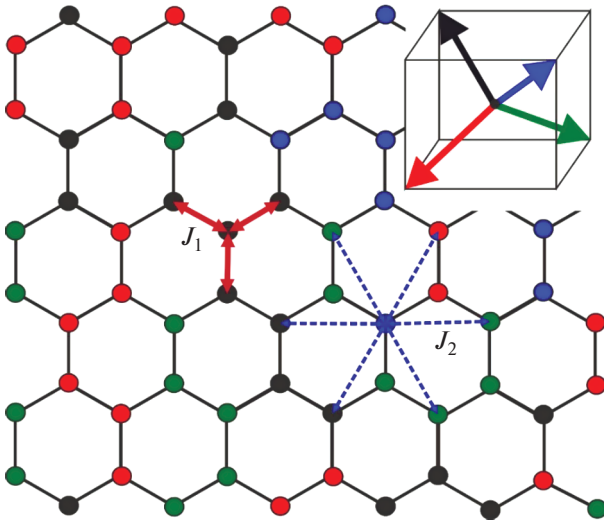
Для исследования фазовых переходов (ФП), магнитных, термодинамических и критических свойств магнитных материалов в современной физике конденсированных сред используют различные решеточные модели. С помощью теоретических методов на простых решеточных моделях удается решить большое количество задач, имеющих широкие перспективы для практического применения [1–3]. Для изучения физических свойств магнитных материалов широко используют модели Изинга, ХУ, Гейзенберга, Поттса и др. Эти модели также описывают большой класс реальных физических систем: слоистые магнетики, пленки жидкого гелия, сверхпроводящие пленки, адсорбированные пленки и др. [1, 4, 5].

В последние годы с использованием этих моделей успешно изучают различные магнитные спиновые системы. Особый интерес представляют исследования, посвященные изучению магнитных спиновых систем с фрустрациями. Такие системы обладают богатой природой ФП и имеют особенности магнитного, термодинамического и критического поведения. Включение возмущений различной природы, таких как внешнее магнитное поле, взаимодействие вторых ближайших соседей, немагнитные примеси, тепловые и кван-

товые флуктуации и др. в магнитных спиновых системах с фрустрациями может привести к совершенно новому физическому поведению таких систем [6–11].

В данной работе мы изучаем влияние внешнего магнитного поля на характер ФП, магнитные и термодинамические свойства спиновых систем с фрустрациями. При решении такого рода задач до сих пор в большинстве случаев ограничивались моделями Изинга и Гейзенберга. В настоящее время влияние внешних возмущающих факторов, в том числе и магнитного поля, в этих моделях достаточно хорошо изучено [12–16].

Для модели Поттса с фрустрациями существует совсем немного надежно установленных фактов. В последние годы исследованию спиновых систем, описываемых моделью Поттса, было посвящено значительное число работ [4, 17–21], в которых были получены ответы на многие вопросы. В работах [17–24] представлены результаты, полученные для двумерной модели Поттса с числом состояний спина  $q = 2$ ,  $q = 3$  и  $q = 4$  на разных типах решеток. Результаты этих работ свидетельствуют, что многие физические свойства модели Поттса зависят от величины взаимодействия следующих за ближайшими соседями, числа состояний спина  $q$  и от геометрии решетки. Исследова-



**Рис. 1.** Модель Поттса с числом состояний спина  $q = 4$  на гексагональной решетке. На вставке для каждого из четырех возможных направлений спина приведено соответствующее цветовое представление.

ний, посвященных изучению влияния внешнего магнитного поля, как возмущающего фактора, на ФП, магнитные и термодинамические свойства модели Поттса с числом состояний спина  $q = 4$  практически нет, и этот вопрос все еще остается открытым и малоизученным. В связи с этим в данной работе нами предпринята попытка на основе метода Монте-Карло (МК) изучить влияние внешнего магнитного поля на ФП, магнитные и термодинамические свойства двумерной модели Поттса с числом состояний спина  $q = 4$  на гексагональной решетке с учетом обменных взаимодействий первых и вторых ближайших соседей. Данная модель интересна и еще и тем, что значение  $q = 4$  является граничным значением интервала  $2 \leq q \leq 4$ , где наблюдается ФП второго рода, и области значений  $q > 4$ , в котором ФП происходит как переход первого рода [20].

Исследование рассматриваемой модели на основе современных методов и идей позволит получить ответ на ряд вопросов, связанных с ФП, магнитными и термодинамическими свойствами низкоразмерных систем с фрустрациями.

## МОДЕЛЬ И МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

Гамильтониан модели Поттса с учетом взаимодействия первых и вторых ближайших соседей, а также внешнего магнитного поля имеет следующий вид [25, 26]:

$$\begin{aligned}
 H &= -J_1 \sum_{\langle i,j \rangle, i \neq j} S_i S_j - J_2 \sum_{\langle i,k \rangle, i \neq k} S_i S_k - h \sum_{\langle i \rangle} S_i = \\
 &= -J_1 \sum_{\langle i,j \rangle, i \neq j} \text{Cos } \theta_{i,j} - J_2 \sum_{\langle i,k \rangle, i \neq k} \text{Cos } \theta_{i,k} - h \sum_{\langle i \rangle} S_i, \quad (1)
 \end{aligned}$$

где  $J_1$  и  $J_2$  – параметры обменных ферро- ( $J_1 > 0$ ) и антиферромагнитного ( $J_2 < 0$ ) взаимодействия соответственно для первых и вторых ближайших соседей,  $\theta_{i,j}$ ,  $\theta_{i,k}$  – углы между взаимодействующими спинами  $S_i - S_j$  и  $S_i - S_k$ ,  $h$  – величина магнитного поля ( $h$  приводится в единицах  $J_1$ ). В данном исследовании рассматривается случай, когда  $|J_1| = |J_2| = 1$ . Величину внешнего магнитного поля меняли в интервале  $0.0 \leq h \leq 7.0$  с шагом 1.0. Магнитное поле направлено вдоль одного из направлений спина.

Схематическое и цветовое представление модели представлено на рис. 1. Спины, обозначенные кружками одного и того же цвета, имеют одинаковое направление. На вставке приведены направления спинов для каждого из 4 значений спина и соответствующее цветовое представление. На рисунке также представлены взаимодействия между первыми и вторыми ближайшими соседями. Как видно на рисунке, у каждого спина есть три ближайших (сплошные жирные линии красного цвета) и шесть следующих ближайших (пунктирные линии синего цвета) соседа.

Направления спинов задается таким образом, чтобы выполнялось равенство:

$$\begin{aligned}
 \theta_{i,j} &= \begin{cases} 0, & \text{если } S_i = S_j \\ 109.47^\circ, & \text{если } S_i \neq S_j \end{cases}; \\
 \text{Cos } \theta_{i,j} &= \begin{cases} 1, & \text{если } S_i = S_j \\ -1/3, & \text{если } S_i \neq S_j \end{cases}. \quad (2)
 \end{aligned}$$

Для модели Поттса с числом состояний спина  $q = 4$  в трехмерном пространстве такое возможно только при ориентации спинов, как показано на рис. 1.

В настоящее время спиновые системы с фрустрациями на основе микроскопических гамильтонианов успешно изучают на основе метода МК [6, 7, 27–29]. В последнее время разработано много новых вариантов алгоритмов метода МК. Одним из наиболее эффективных для исследования подобных систем является репличный обменный алгоритм [30]. Поэтому в данном исследовании нами был использован этот алгоритм.

Репличный обменный алгоритм был использован в следующем виде:

1. Одновременно моделируются  $N$  реплик  $X_1, X_2, \dots, X_N$  с температурами  $T_1, T_2, \dots, T_N$ .

2. После выполнения одного МК-шага/спин для всех реплик производится обмен данными между парой соседних реплик  $X_i$  и  $X_{i+1}$  в соответствии со схемой Метрополиса с вероятностью:

$$w(X_i \rightarrow X_{i+1}) = \begin{cases} 1, & \text{for } \Delta \leq 0, \\ \exp(-\Delta), & \text{for } \Delta > 0, \end{cases}$$

где  $\Delta = (U_i - U_{i+1}) \cdot (1/T_i - 1/T_{i+1})$ ,  $U_i$  и  $U_{i+1}$  – внутренние энергии реплик.

Для анализа природы и характера ФП использован гистограммный метод анализа данных [31, 32]. Для вывода системы в состояние термодинамического равновесия отсекали участок длиной  $\tau_0 = 4 \times 10^5$  шагов МК на спин, что в несколько раз больше длины неравновесного участка. Усреднение термодинамических параметров проводили вдоль марковской цепи длиной до  $\tau = 500\tau_0$  шагов МК на спин. Расчеты проводили для систем с периодическими граничными условиями и линейными размерами  $2 \times L \times L \times L = N$ ,  $L = 12-60$ , где  $L$  – линейный размер решетки,  $N$  – количество спинов в системе.

РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

На рис. 2 представлены схемы магнитных структур основного состояния при разных значениях магнитного поля. На этом рисунке спины, имеющие одинаковое направление, обозначены кружками одного и того же цвета. Магнитное поле направлено вдоль спина, обозначенного черным цветом. Из рисунка видно, что при отсутствии внешнего магнитного поля ( $h = 0.0$ ) в данной модели в основном состоянии реализуется димерная структура, т.е. наблюдается магнитное состояние, при котором спины упорядочиваются парно. Для поля  $h = 2.0$  наблюдается увеличение числа кружков черного цвета. Это связано с увеличением числа спинов, ориентированных вдоль внешнего поля. При этом на рисунке появляются области с частичным упорядочением спинов. При значении поля  $h = 3.0$  в системе наблюдается страйповое упорядочение (полосовая структура). Включение сильных полей ( $h \geq 4.0$ ) приводит к упорядочению всех спинов в системе вдоль направления внешнего магнитного поля. Это свидетельствует о том, что внешнее магнитное поле приводит к изменению типа магнитного упорядочения.

Для наблюдения за температурным ходом поведения теплоемкости  $C$  нами использовано выражение:

$$C = (NK^2)(\langle U^2 \rangle - \langle U \rangle^2), \quad (3)$$

где  $K = |J_1|/k_B T$ ,  $U$  – внутренняя энергия.

На рис. 3 и 4 представлены температурные зависимости теплоемкости  $C$  для различных значений магнитного поля при  $L = 24$ . Из рис. 3 видно, что в интервале  $0.0 \leq h \leq 3.0$  вблизи критической области наблюдаются хорошо выраженные максимумы теплоемкости. Для поля  $h = 2.0$  максимум теплоемкости становится более плавным. Такая картина температурной зависимости теплоемкости обычно наблюдается для фрустрированных спиновых систем [33, 34]. Аналогичное поведение теплоемкости было обнаружено в модели Изинга с фрустрациями на декорированных решетках [35, 36]. Можно предположить, что та-

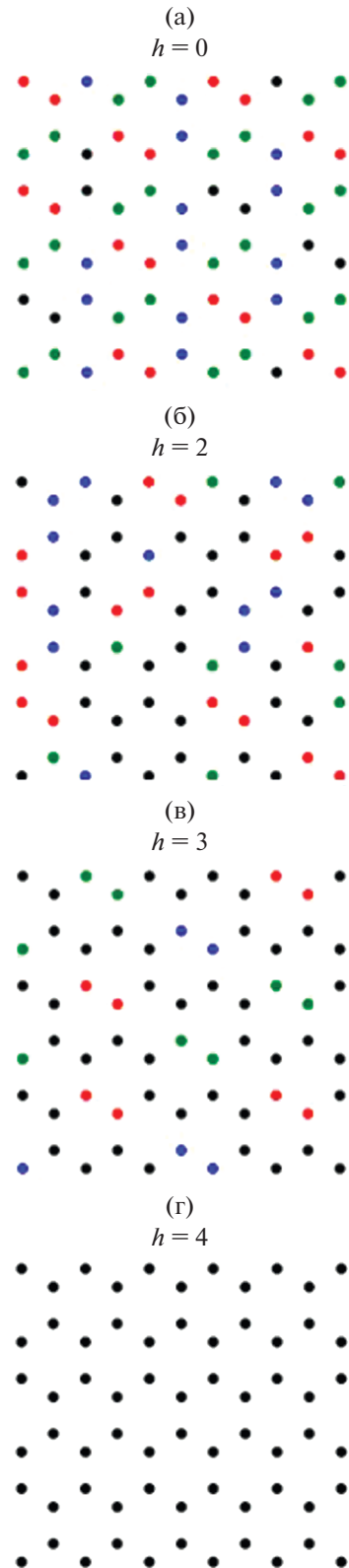


Рис. 2. Магнитные структуры основного состояния.

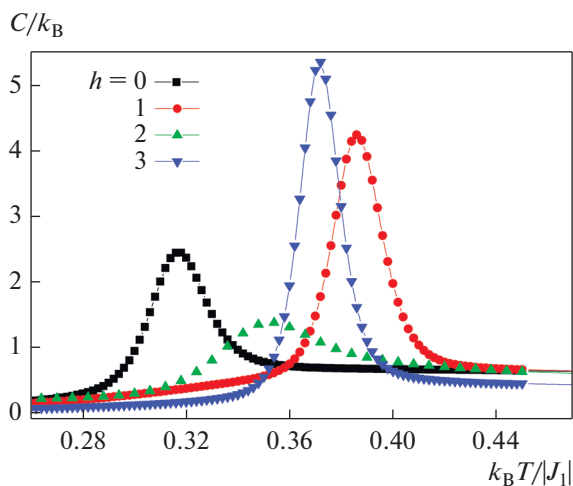


Рис. 3. Температурные зависимости теплоемкости  $C/k_B$  в интервале поля  $0.0 \leq h \leq 3.0$ .

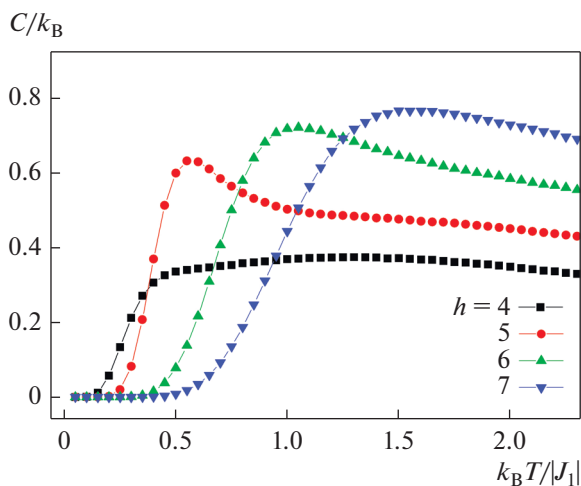


Рис. 4. Температурные зависимости теплоемкости  $C/k_B$  для поля  $h \geq 4.0$ .

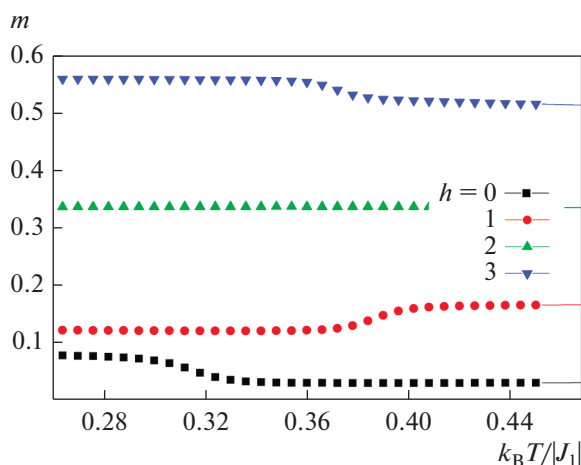


Рис. 5. Температурные зависимости параметра порядка в интервале поля  $0.0 \leq h \leq 3.0$ .

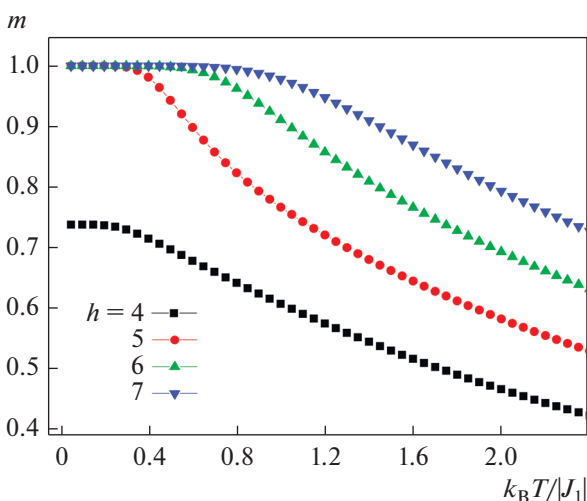


Рис. 6. Температурные зависимости параметра порядка для поля  $h \geq 4.0$ .

кое поведение теплоемкости связано с изменением структуры магнитного упорядочения и появлением частично упорядоченного магнитного состояния (рис. 2). При включении слабого магнитного поля ( $h = 1.0$ ) максимум теплоемкости смещается в сторону высоких температур. Дальнейший рост поля приводит к сдвигу максимума теплоемкости в сторону низких температур. Такое поведение теплоемкости объясняется тем, что увеличение величины магнитного поля приводит к быстрому упорядочению системы, уменьшению флуктуаций и, соответственно, уменьшается температура ФП.

Из рис. 4 видно, что для при значениях магнитного поля  $h \geq 4.0$  характерные пики теплоемкости не наблюдаются. Это говорит о том, что

дальнейшее увеличение магнитного поля приводит к подавлению ФП в системе.

Параметр порядка системы  $m$  вычисляли по формуле:

$$m = \frac{1}{N} \left( \frac{4N_{\max} - N_1 - N_2 - N_3 - N_4}{3} \right), \quad (4)$$

где  $N_1, N_2, N_3, N_4$  — число спинов, соответствующих каждому из 4 направлений спина.

На рис. 5 и 6 представлены графики зависимости параметра порядка  $m$  от температуры для разных значений магнитного поля. При отсутствии магнитного поля, в системе отсутствует порядок, и значение параметра порядка близко к нулю. При включении поля в системе наблюдается частичное упорядочение и параметр порядка в низкотемпературной области имеет отличные от ну-

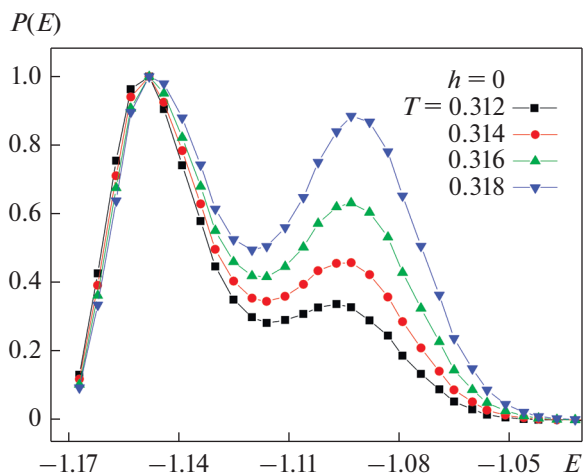


Рис. 7. Гистограммы распределения энергии для  $L = 60$  при различных температурах для поля  $h = 0.0$ . Энергия  $E$  приведена в единицах  $J_1$ .

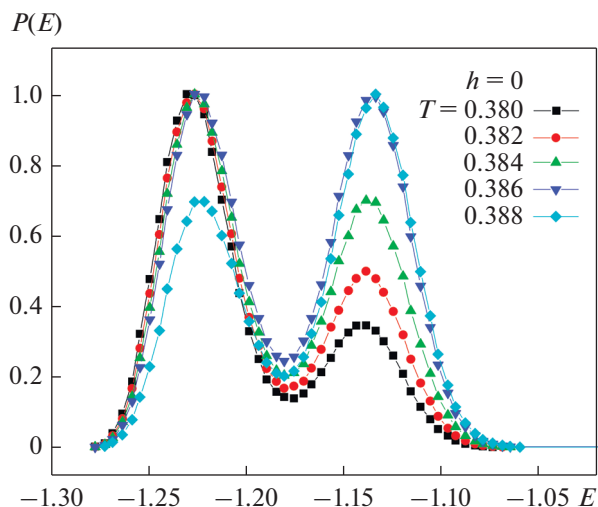


Рис. 8. Гистограммы распределения энергии для  $L = 60$  при различных температурах для поля  $h = 1.0$ .

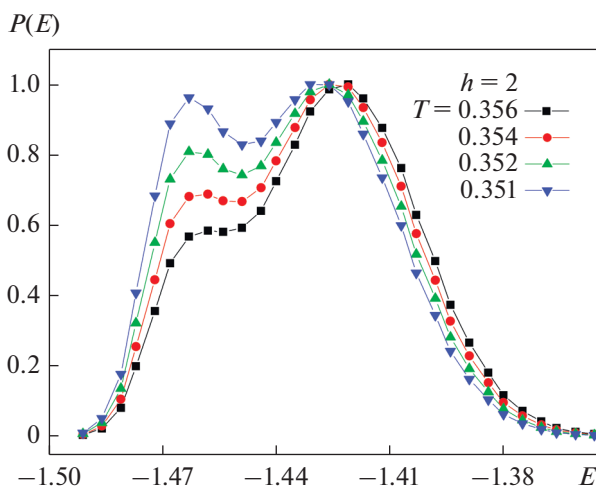


Рис. 9. Гистограммы распределения энергии для  $L = 60$  при различных температурах для поля  $h = 2.0$ .

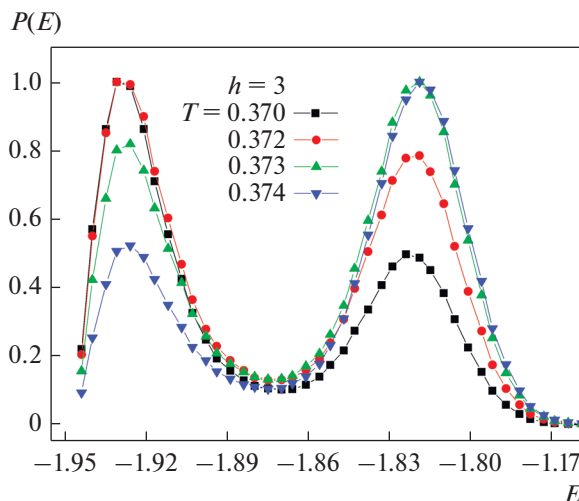


Рис. 10. Гистограммы распределения энергии для  $L = 60$  при различных температурах для поля  $h = 3.0$ .

для значения. Это объясняется тем, что магнитное поле выстраивает спины вдоль своего направления и в системе возникает частичный порядок. С ростом поля увеличивается число спинов, которые выстраиваются вдоль направления поля. Этим обусловлено тем, что параметр порядка в низкотемпературной области растет с увеличением  $h$ . При значениях  $h \geq 5.0$  в низкотемпературной области параметр порядка  $m = 1.0$ . Это свидетельствует о том, что при  $h \geq 5.0$  все спины в системе упорядочены вдоль направления внешнего поля.

Для анализа рода ФП нами использован гистограммный анализ данных метода МК [31, 32]. Этот метод позволяет надежно определить род ФП, методика определения рода ФП подробно описана в работе [13].

Полученные на основе гистограммного анализа данных результаты показывают, что в данной модели для значений магнитного поля в диапазоне  $0.0 \leq h \leq 3.0$  наблюдается ФП первого рода. Это продемонстрировано на рис. 7–10, где представлены гистограммы распределения энергии для системы с линейными размерами  $L = 60$  для значений поля  $h = 0.0, 1.0, 2.0$  и  $3.0$ . Графики построены для различных температур, близких к критической.

Из рис. 7–10 видно, что зависимость вероятности  $P(E)$  от энергии  $E$  для всех рассмотренных значений поля имеет два хорошо выраженных максимума, которые свидетельствуют о ФП первого рода. Наличие двойного пика на гистограммах распределения энергии является достаточным условием для

ФП первого рода. Это позволяет нам утверждать, что в рассмотренном интервале значений поля наблюдаются ФП первого рода. Для значений поля  $h \geq 4.0$  магнитное поле снимает вырождение основного состояния, и ФП размывается.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование влияния магнитного поля на фазовые переходы, магнитные структуры основного состояния и термодинамические свойства двумерной модели Поттса с числом состояний спина  $q = 4$  на гексагональной решетке с взаимодействиями вторых ближайших соседей выполнено с использованием репличного обменного алгоритма метода Монте-Карло. На основе гистограммного метода проведен анализ характера фазовых переходов. Получены магнитные структуры основного состояния в широком интервале значений магнитного поля. Показано, что в интервале значений  $0.0 \leq h \leq 3.0$  наблюдается фазовый переход первого рода. Обнаружено, что в сильных полях  $h \geq 4.0$  магнитное поле снимает вырождение основного состояния и фазовый переход в системе размывается.

Исследование выполнено в рамках госзадания МИНОБРНАУКИ России (тема № АААА-А19-119051490043-5).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Diep H.T.* Frustrated Spin Systems. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore. 2004. P. 624.
2. *Baxter R.J.* Exactly Solved Models in Statistical Mechanics. Academic, N.Y., 1982; Mir, M., 1985.
3. *Wu F.Y.* Exactly Solved Models. A Journey in Statistical Mechanics. World Scientific, New Jersey, 2008.
4. *Wu F.Y.* The Potts model // *Rev. Mod. Phys.* 1982. V. 54. P. 235–268.
5. *Zhang W., Deng Y.* Monte Carlo study of the triangular lattice gas with first- and second-neighbor exclusions // *Phys. Rev. E.* 2008. V. 78. 031103.
6. *Masrour R., Jabar A.* Magnetic properties of mixed spin-5/2 and spin-2 Ising model on a decorated square lattice: a Monte Carlo simulation // *Physica A.* 2019. V. 515. P. 270–278.
7. *Masrour R., Jabar A.* Magnetic properties in stacked triangular lattice: Monte Carlo approach // *Physica A.* 2018. V. 491. P. 926–934.
8. *Коршунов С.Е.* Фазовые переходы в двумерных системах с непрерывным вырождением // *УФН.* 2006. Т. 176. С. 233–274.
9. *Malakis A., Kalozoumis P., Tyraskis N.* Monte Carlo studies of the square Ising model with next-nearest-neighbor interactions // *Eur. Phys. J. B.* 2006. V. 50. P. 63–67.
10. *Сосин С.С., Прозорова Л.А., Смирнов А.И.* Новые магнитные состояния в кристаллах // *УФН.* 2005. Т. 175. С. 92–99.
11. *Kazuaki M., Yukiyasu O.* Dynamical scaling analysis of symmetry breaking for the antiferromagnetic triangular Heisenberg model in a uniform magnetic field // *Phys. Rev. B.* V. 101. P. 184427(7).
12. *Murtazaev A.K., Ramazanov M.K., Kurbanova D.R., Magomedov M.A., Murtazaev K.Sh.* Phase diagrams and ground-state structures of the antiferromagnetic materials on a body-centered cubic lattice // *Mater. Lett.* 2019. V. 236. P. 669–671.
13. *Рамазанов М.К., Муртазаев А.К.* Фазовая диаграмма антиферромагнитной модели Гейзенберга на кубической решетке // *Письма в ЖЭТФ.* 2019. Т. 109. Вып. 9. С. 610–614.
14. *Муртазаев А.К., Рамазанов М.К., Бадиев М.К.* Фазовые переходы в модели Изинга на треугольной решетке с различными взаимодействиями межслойного обменного взаимодействия // *ФНТ.* 2019. Т. 45. Вып. 12. С. 1493–1497.
15. *Бадиев М.К., Муртазаев А.К., Рамазанов М.К., Магомедов М.А.* Критические свойства модели Изинга в магнитном поле // *ФНТ.* 2020. Т. 46. Вып. 7. С. 824–828.
16. *Муртазаев А.К., Курбанова Д.Р., Рамазанов М.К.* Фазовые переходы и критические свойства антиферромагнитной модели Гейзенберга на объемно-центрированной кубической решетке с взаимодействиями вторых ближайших соседей // *ЖЭТФ.* 2019. Т. 156. Вып. 5. С. 980–988.
17. *Nauenberg M., Scalapino D.J.* Singularities and Scaling Functions at the Potts-Model Multicritical Point // *Phys. Rev. Lett.* V. 44. P. 837–840.
18. *Cardy J.L., Nauenberg M., Scalapino D.J.* Scaling theory of the Potts-model multicritical point // *Phys. Rev. B.* 1980. V. 22. P. 2560–2568.
19. *Ramazanov M.K., Murtazaev A.K., Magomedov M.A.* Phase diagrams and ground-state structures of the Potts model on a triangular lattice // *Physica A.* 2019. V. 521. P. 543–550.
20. *Feldmann H., Guttmann A.J., Jensen I., Shrock R., Tsai S.-H.* Study of the Potts model on the honeycomb and triangular lattices: Low-temperature series and partition function zeros // *J. Phys. A.* 1998. V. 31. P. 2287–2310.
21. *Kassan-Ogly F.A., Proshkin A.I.* Frustrations and Ordering in Magnetic Systems of Various Dimensions // *Phys. Solid State.* 2018. V. 60. P. 1090–1097.
22. *Муртазаев А.К., Рамазанов М.К., Мазагаева М.К., Магомедов М.А.* Фазовые переходы и термодинамические свойства модели Поттса с числом состояний спина  $q = 4$  на гексагональной решетке // *ЖЭТФ.* 2019. Т. 156. Вып. 3. С. 502–506.
23. *Муртазаев А.К., Курбанова Д.Р., Рамазанов М.К.* Фазовые переходы и термодинамические свойства модели Поттса с числом состояний спина  $q = 4$  на треугольной решетке // *ФТТ.* 2019. Т. 61. Вып. 11. С. 2195–2198.
24. *Рамазанов М.К., Муртазаев А.К., Магомедов М.А., Мазагаева М.К.* Исследование фазовых переходов и термодинамических свойств модели Поттса с  $q = 4$  на гексагональной решетке с взаимодействиями вторых ближайших соседей // *ФТТ.* 2020. Т. 62. Вып. 3. С. 442–446.

25. *Townsend M.G., Longworth G., Roudaut E.* Triangular-spin, kagome plane in jarosites // *Phys. Rev. B.* 1986. V. 33. P. 4919–4926.
26. *Chiaki Y., Yutaka O.* Three-dimensional antiferromagnetic q-state Potts models: application of the Wang-Landau algorithm // *J. Phys. A: Mathematical and General.* 2001. V. 34. P. 8781–8794.
27. *Муртазаев А.К., Кассан-Оглы Ф.А., Рамазанов М.К., Муртазаев К.Ш.* Исследование фазовых переходов в антиферромагнитной модели Гейзенберга на объемно-центрированной кубической решетке методом Монте-Карло // *ФММ.* 2020. Т. 121. Вып. 4. С. 346–351.
28. *Murtazaev A.K., Kurbanova D.R., Ramazanov M.K.* Phase diagram of the antiferromagnetic Heisenberg model on a bcc lattice with competing first and second neighbor interactions // *Physica A.* 2020. V. 545. P. 123548(6).
29. *Муртазаев А.К., Ф.А. Кассан-Оглы, Рамазанов М.К., Муртазаев К.Ш.* Фазовая диаграмма антиферромагнитной модели Поттса с числом состояний спина  $q = 4$  на гексагональной решетке // *ФММ.* 2021. Т. 122. Вып. 5. С. 460–465.
30. *Mitsutake A., Sugita Y., Okamoto Y.* Generalized-ensemble algorithms for molecular simulations of biopolymers // *Biopolymers (Peptide Science).* 2001. V. 60. P. 96–123.
31. *Wang F., Landau D.P.* Determining the density of states for classical statistical models: a random walk algorithm to produce a flat histogram // *Phys. Rev. E.* 2001. V. 64. P. 056101–1–056101–16.
32. *Wang F., Landau D.P.* Efficient, Multiple-Range Random Walk Algorithm to Calculate the Density of States // *Phys. Rev. Lett.* 2001. V. 86. P. 2050–2053.
33. *Kassan-Ogly F.A., Filippov B.N., Murtazaev A.K., Ramazanov M.K., Badiev M.K.* Influence of field on frustrations in low-dimensional magnets // *J. Mag. Mag. Mater.* 2012. V. 24. P. 3418–3421.
34. *Kassan-Ogly F.A., Murtazaev A.K., Zhuravlev A.K., Ramazanov M.K., Proshkin A.I.* Ising model on a square lattice with second-neighbor and third-neighbor interactions // *J. Mag. Mag. Mater.* 2015. V. 384. P. 247–254.
35. *Proshkin A.I., Kassan-Ogly F.A.* Frustration and Phase Transitions in Ising Model on Decorated Square Lattice // *Physics of Metals and Metallography.* 2019. V. 120. P. 1366–1372.
36. *Kassan-Ogly F.A., Proshkin A.I.* Ising Model on Planar Decorated Lattices. Frustrations and Their Influence on Phase Transitions // *Physics of Metals and Metallography.* 2019. V. 120. P. 1359–1365.