

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПЛАЗМЫ В ПРОЕКТАХ МОРОЗОВА

© 2019 г. К. В. Брушлинский*

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

**e-mail: brush@keldysh.ru*

Поступила в редакцию 29.05.2018 г.

После доработки 05.07.2018 г.

Принята в печать 02.08.2018 г.

Представлен обзор математических моделей и расчетов плазменных процессов в научно-технических проектах, предложенных и в значительной степени реализованных А.И. Морозовым. Плазменно-динамические модели основаны на уравнениях магнитной газодинамики и ее обобщениях и посвящены исследованиям течений плазмы в каналах-соплах плазменных ускорителей. Результаты расчетов внесли заметный вклад в теорию МГД-аналога сопла Лавала и содействовали успешной разработке и созданию квазистационарного сильноточного плазменного ускорителя большой мощности. Плазмостатические модели в терминах краевых задач с уравнением Грэда–Шафранова реализованы в расчетах равновесных магнитоплазменных конфигураций в ловушках с погруженными в плазму токонесущими проводниками. А.И. Морозов назвал такие ловушки галатеями. Результаты расчетов относятся к геометрии, количественным характеристикам рассмотренных конфигураций и ряду закономерностей в вопросах удержания плазмы магнитным полем. Обсуждаются также общие вопросы, касающиеся математических моделей взаимодействия процессов реакции и диффузии. Проведены расчеты геометрии магнитного поля в вакууме, образующего магнитные поверхности, предназначенные для удержания плазмы в ловушках.

DOI: 10.1134/S0367292119010025

1. ВВЕДЕНИЕ

Алексей Иванович Морозов (1928–2009) – один из выдающихся советских физиков первого послевоенного поколения выпускников Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. Он внес существенный вклад в возникшую в 1940–1950-е годы новую область науки – физику плазмы, интерес к которой был вызван надеждами получить дешевый источник энергии управляемого термоядерного синтеза (УТС), широкими возможностями плазменной техники, увлекательными проблемами астрофизики. Им предложены и по его инициативе разработаны и внедрены в практику несколько поколений плазменных ускорителей с широкой перспективой применения. В исследованиях термоядерной проблемы значительное место занимают ловушки для удержания плазмы магнитным полем – единственно возможным “материалом”, способным контактировать со сжатой плазмой, нагретой до температур, исчисляемых десятками миллионов градусов. Здесь А.И. Морозов уделил серьезное внимание ловушкам сложной геометрии с расположенными внутри плазмы токонесущими проводниками и инициировал целое на-

правление разработки и исследований специального класса этих ловушек, названных им галатеями.

Физика за все время своего существования – с античных времен до наших дней традиционно имеет дело с двумя основными группами методов исследований – теоретическими и экспериментальными. И те и другие используют язык математики – уравнения, формулы, обработку результатов наблюдений. Однако в середине XX в. сложность теории, громоздкость и дороговизна экспериментов, а иногда и принципиальная невозможность их осуществления потребовали более широкого и глубокого применения математики в виде приближенного решения больших задач в немалых ранее объемах. Это стало возможным благодаря созданию в тех же целях новой вычислительной техники: электронно-вычислительные машины (ЭВМ) и составленные из них высокопроизводительные комплексы повысили скорость расчетов на много порядков по сравнению с ручными или электромеханическими средствами. Постановка задач, численные методы их решения, программирование и расчеты на ЭВМ, анализ результатов составили новую – третью,

наряду с теорией и экспериментом, группу методов исследований, получившую название математическое (или численное) моделирование исследуемых процессов. Подготовлено большое число успешно работающих здесь специалистов. Однако для эффективного исследования какого-либо явления в целом естественно взаимодействие всех трех групп методов, и для этого необходимо, чтобы его возглавил специалист, хорошо ориентирующийся во всех методах, знающий и понимающий возможности каждого из них. Примером успешного применения больших объемов расчетов наряду с традиционными подходами являются решение атомной проблемы в СССР под руководством И.В. Курчатова, Ю.Б. Харитона, Я.Б. Зельдовича, И.Е. Тамма и работы на ту же тему в США.

В физике плазмы одной из первых работ с применением расчетов на ЭВМ была математическая модель динамики Z-пинча опубликованная С.И. Брагинским, И.М. Гельфандом и Р.П. Федоренко в 1958 г. [1]. Систематическому внедрению прикладной математики в эту область способствовал А.И. Морозов. Физик-теоретик по образованию, он хорошо владел логикой экспериментов и не только раньше многих оценил необходимость численного решения задач физики плазмы, но и сумел организовать взаимодействие всех трех групп методов в реализации предложенных им научно-технических проектов.

В 1960 году он инициировал в Отделении прикладной математики МИАН СССР (ныне ИПМ — Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН) работы по расчетам магнитных поверхностей и их устойчивости в вакууме, которым предназначалась роль магнитного каркаса в тороидальных ловушках для удержания плазмы. Эти работы возглавил и принял в них личное участие И.М. Гельфанд. Полученные нетривиальные и представляющие интерес за пределами упомянутого приложения результаты опубликованы в серии журнальных статей 1961–63 годов [2–5] и составили содержание обзора [6]. Они же послужили основой для большой серии исследований плазменных конфигураций в магнитных ловушках, проведенных впоследствии Л.С. Соловьевым, Н.М. Зуевой и др. (см. [7]).

Постоянной темой работ ИПМ являются численные исследования ускорения плазмы, инициированные А.И. Морозовым в связи с разработками предложенных им мощных установок, в которых плазма — проводник с током — ускоряется в магнитном поле осесимметричного канала, образованного двумя коаксиальными электродами. Идея такой установки возникла у А.И. Морозова во время его педагогической работы в техникуме г. Людиново [8]. После его перехода на работу в Институт атомной энергии (ныне РНЦ “Курча-

товский институт”) она была опубликована [9] и поддержана Л.А. Арцимовичем, под руководством которого в том же году проведены первые эксперименты по ускорению плазмы [10].

Расчеты динамики плазмы в каналах велись параллельно с разработкой ускорителей начиная с 1961 года. Математические модели основаны на численном решении начально-краевых задач с уравнениями магнитной газодинамики с последующим ее расширением за счет конечной электропроводности, эффекта Холла, моделей процесса ионизации. Цикл работ на эту тему облегчил и ускорил разработку плазменных ускорителей, составил существенную главу вычислительной плазмодинамики, способствовал созданию теории магнитного аналога сопла Лаваля. Итогом разработки коаксиальных ускорителей стало создание к началу 1990-х годов квазистационарного сильноточного плазменного ускорителя (КСПУ) кооперацией ряда институтов Москвы, Ленинграда, Троицка, Харькова и Минска, организованной А.И. Морозовым и поддержанной А.П. Александровым, который в 1980-е годы руководил одновременно Академией Наук СССР и ИАЭ им. И.В. Курчатова. КСПУ продемонстрировал рекордные параметры скорости и энергии выходящего из него потока (сила тока 1 МА, напряжение 20 кВ, скорость 500 км/с [11]) и рассчитан на многоцелевое применение. В частности, он может быть мощным маршевым электрореактивным двигателем, если удастся создать адекватный его возможностям компактный источник электроэнергии и разместить его на спутнике. Основными публикациями по тематике коаксиальных ускорителей являются обзор [11] и книги [12, 13] А.И. Морозова, теоретический обзор [14], серия статей в журнале “Физика плазмы” вып. 2 1990 года. Работы по численному моделированию обобщены в обзоре [15] и монографии [16].

Тематика плазменных ускорителей представляет интерес и в настоящее время. Уделяется внимание течениям в каналах в присутствии продольного магнитного поля, которое дополнительно создается с помощью, например, соленоида, окружающего установку. На эту тему известны экспериментальные результаты В.Б. Тихонова и Г.А. Дьяконова [17], а математические модели представлены серией работ, выполненных К.В. Брушлинским с учениками в последние годы и цитированных в [18]. Развитию численных моделей и расчетов течения ионизирующегося газа в канале посвящены работы А.Н. Козлова (см. [19, 20] и библиографию в них).

На противоположном КСПУ конце диапазона мощностей находятся компактные стационарные плазменные ускорители (СПД) малой тяги, но с длительным ресурсом работы. С 1971 года они по-

стоянно используются в качестве двигателей для корректировки орбит спутников Земли [21]. За изобретение СПД А.И. Морозов награжден памятными медалями международного Сообщества, занятого электроракетными двигателями, и Французской национальной академии атмосферы и космоса. Принципы работы СПД сложнее, и теория физических процессов в них менее разработана. Цикл работ, посвященных началам теории и численным моделям выполнен А.И. Морозовым и В.В. Савельевым (см. обзоры [22, 23]).

Численные модели магнитных ловушек связаны с исследованием геометрии и расчетами параметров конфигураций плазмы, удерживаемых в равновесии магнитным полем. Здесь широко распространены плазмостатические МГД-модели строго равновесных конфигураций. Если конфигурации допускают симметрию (плоскую, осевую, винтовую), математический аппарат моделей сводится к двумерным краевым задачам с одним скалярным уравнением типа Грэда—Шафранова [24, 25] для функции магнитного потока. Эти задачи приближенно описывают квазиравновесие, поскольку они не учитывают конечную проводимость плазмы, которая способствует разрушению строгого равновесия в процессе медленной диффузии магнитного поля. Они также не дают ответа на вопрос о том, каким образом может сформироваться та или иная конфигурация. Более полное исследование требует плазмодинамических моделей, в которых нестационарные МГД задачи с учетом конечной, хотя и высокой, проводимости решаются численно. Они позволяют исследовать условия, при которых формируются конфигурации нужного типа, существующие в квазиравновесном режиме.

В серии работ подробно исследованы конфигурации в нескольких тороидальных ловушках-галатеех и их распрямленных в цилиндр аналогах. На перспективность галатей А.И. Морозов обратил внимание в статье [26]. Результаты первых расчетов равновесных конфигураций в “стелларатор-галатее” (СГ) опубликованы в [27]. Обзор теоретических, численных и экспериментальных работ 1990-х годов содержится в [28]. Из работ последнего времени по численным исследованиям равновесия в галатеех укажем на статью [29] с необходимой библиографией. Вопросы, связанные с задачами о равновесии и примеры плазмодинамических моделей формирования магнитоплазменных конфигураций рассмотрены в [30, 31].

2. МОРФОЛОГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Ранние работы по численному моделированию магнитных ловушек связаны с исследованиями конструкционного материала для “сосудов”, удерживающих плазму, т.е. поверхностей, образованных силовыми линиями магнитного поля.

Структуру этих поверхностей естественно рассмотреть сначала в вакууме до заполнения их плазмой. Объектом исследования являются форма поверхностей и ее изменение при возмущении поля. Рассмотрим их на одном из простейших примеров безвихревого трехзаходного магнитного поля \mathbf{H} в прямом цилиндре, описываемое скалярным потенциалом

$$\mathbf{H} = \nabla\Phi; \quad \Phi = z + 3I_3(3r)\sin 3(\varphi - z) + h_0 I_0(3r)\sin 3z \quad (1)$$

в цилиндрической системе координат (r, φ, z) . Здесь I_n – функции Бесселя мнимого аргумента. При $h_0 = 0$ поле обладает винтовой симметрией с шагом $L = 2\pi$, сечение магнитных поверхностей плоскостью $z = \text{const}$ представлено на рис. 1. Третье слагаемое в (1) при $h_0 \neq 0$ описывает гофрированное возмущение поля, при котором их структура перестраивается. Выяснить это аналитическими методами не удалось, поэтому исследование проведено посредством численного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений для силовых линий

$$\frac{dr}{H_r} = \frac{rd\varphi}{H_\varphi} = \frac{dz}{H_z}$$

методом Рунге–Кутты с высокой точностью. Каждая силовая линия прослежена на протяжении $0 \leq z \leq 2\pi N$, где N достаточно велико. Чтобы построить магнитную поверхность, отрезки рассчитанной силовой линии в интервалах $2\pi(k-1) \leq z \leq 2\pi k$ сдвинуты в отрезок $0 \leq z \leq 2\pi$. На рис. 2 представлено сечение возмущенной поверхности при значении $h_0 = 0.1$. Система вложенных друг в друга поверхностей вокруг одной магнитной оси (рис. 1) превратилась здесь в трилистник, каждый лист которой имеет волокистую структуру: волокна окоружают особые точки эллиптического типа, чередующиеся с гиперболическими. При дальнейшем возрастании коэффициента h_0 структура становится чрезвычайно сложной: магнитные поверхности разрушаются и теряют способность удерживать плазму. Другие примеры и проблема в целом изложены в обзоре [6] и цитированных в нем работах. Основной результат всех расчетов состоит в том, что магнитные поверхности в вакууме весьма чувствительны к даже небольшим возмущениям, вызывающим их разрушение. Это становится причиной того внимания, которое традиционно уделяется различным проявлениям неустойчивости плазменных конфигураций в магнитных ловушках, поскольку она может рассматриваться в качестве основного препятствия на пути к реализации управляемого термоядерного синтеза. Ценность полученных результатов в том, что в отличие от большинства работ по устойчивости в линейном

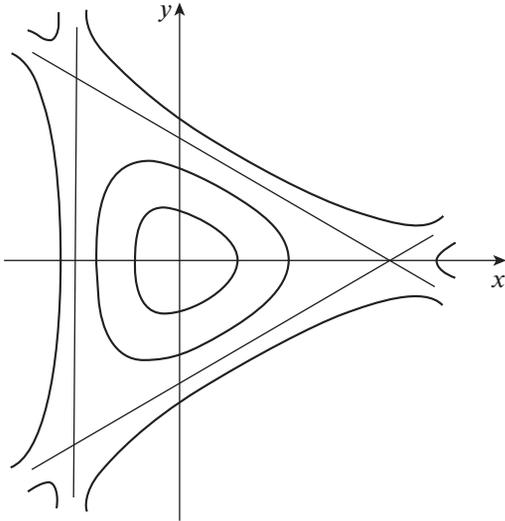


Рис. 1. Магнитные поверхности невозмущенного ($h_0 = 0$) трехзаконного поля.

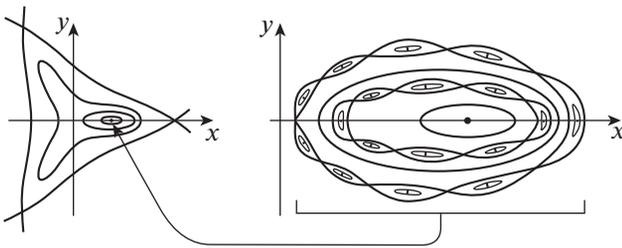


Рис. 2. Трехзаконное поле с гофрированным возмущением ($h_0 = 0.1$).

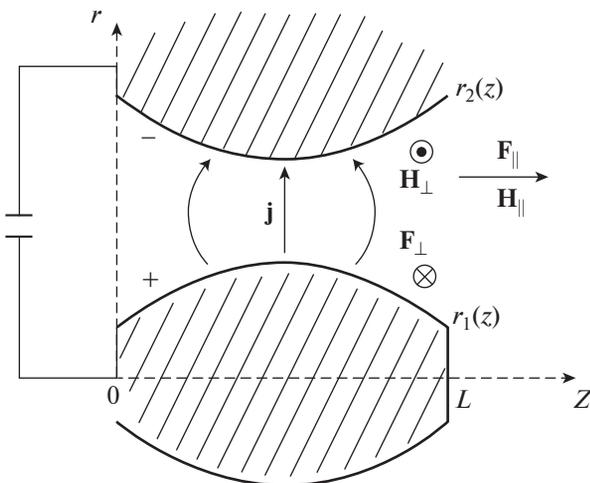


Рис. 3. Схема плазменного ускорителя. Сечение канала плоскостью $\phi = \text{const}$.

приближении, они используют нелинейный математический аппарат неустойчивости. Кроме того, полученные результаты представляют интерес за пределами обсуждаемых приложений и связаны с фундаментальными проблемами устойчивости движений в классической небесной механике [32].

3. ПЛАЗМОДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УСКОРЕНИЯ ПЛАЗМЫ В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Значительную часть обсуждаемых работ по численному моделированию плазмы составили расчеты МГД-течений в коаксиальных каналах плазменных ускорителей. Схема основного процесса ускорения представлена на рис. 3. Канал образован двумя коаксиальными электродами, включенными в сеть с источником питания. Плазма подается в него слева, электрический ток радиального направления в ней взаимодействует с азимутальным магнитным полем, созданным продольным током в центральном электроде, и ускоряет плазму в осевом направлении. Канал имеет форму сопла, что обеспечивает ускорение с переходом через скорость быстрого магнитного звука. В результате скорость и энергия плазменного потока на выходе могут существенно превосходить их значения в жидкостных и газовых реактивных двигателях, поскольку в кинетическую энергию здесь переходит не только тепловая, но и магнитная энергия системы. Диапазон характерных параметров плазмы в рассматриваемых ускорителях позволяет толковать ее как сплошную среду, поэтому в основе математического аппарата моделей исследуемых явлений лежат уравнения магнитной газодинамики

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0 \\ \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p &= \mathbf{j} \times \mathbf{H} \\ \rho \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} + p \nabla \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{j}^2 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) - \nabla \times (\mathbf{v} \mathbf{j}),$$

где $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)$, $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon = \frac{\beta}{2}\rho T$, $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{H}$,

$$\beta = \frac{8\pi p_0}{H_0^2}, \quad \nu = \frac{c^2}{4\pi \sigma_0 r_0} = \frac{1}{\text{Re}_m}.$$

Уравнения приведены в безразмерной форме: единицы измерения всех величин, а также безразмерные параметры β и ν составлены из характерных размерных величин, участвующих в постановке задач [15, 16]. Из диссипативных процессов уравнения учитывают “магнитную вязкость” ν ,

обратно пропорциональную проводимости σ , поскольку в некоторых вопросах она принципиально необходима, а гидродинамическая вязкость и теплопроводность в рассматриваемых задачах несущественны.

Течения плазмы в канале ускорителя (рис. 3) допускают осевую симметрию, поэтому рассматриваемые задачи двумерны: $\partial/\partial\varphi \equiv 0$ в цилиндрических координатах (z, r, φ) . Время разряда имеющихся источников питания на порядки превосходит пролетное время установки, поэтому основной интерес представляет стационарный режим течения, который устанавливается в процессе решения нестационарных задач.

Основной объем расчетов относится к исследованиям течений плазмы в собственном поперечном по отношению к направлению потока магнитном поле. В этом случае

$$\mathbf{H} = (0, 0, H), \quad \mathbf{v} = (u, v, 0), \quad (3)$$

где $H = H_\varphi$, $u = v_z$, $v = v_r$. Смешанная краевая задача с уравнениями (2) ставится для $t > 0$ в области переменных (z, r) на рис. 3. Граничными условиями на входе являются

$$z = 0: \quad \rho = 1, \quad T = 1, \quad H = \frac{r_0}{r}, \quad (4)$$

где r_0 характерное значение радиуса во входном сечении. Кроме того, задано направление v/u предполагаемых траекторий. На выходе из канала ($z = Z$) в предположении установления трансзвукового течения гидродинамические граничные условия не нужны, а четвертое уравнение системы (2), параболическое при $v > 0$, требует задать какую-либо связь магнитного поля H с током $j_r = -\partial H/\partial z$. Боковые стенки канала предполагаются сплошными и эквипотенциальными, откуда следуют граничные условия

$$r = r_1(z) \quad \text{и} \quad r = r_2(z): \quad v_n = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial n} = 0.$$

Начальными условиями в задачах об установлении стационарного течения могут быть любые значения искомым функций при $t = 0$, которые обеспечивают разгон плазмы в направлении оси z , например, монотонно убывающие значения давлений — газового p и магнитного H^2 , согласованные с граничными условиями.

Для численного решения задач уравнения (2) используются в консервативной форме. Чтобы избавиться от криволинейных границ $r_1(z)$ и $r_2(z)$ вводятся координаты (z, y) :

$$z = z; \quad r = (1 - y)r_1(z) + yr_2(z),$$

которые превращают расчетную область в прямоугольник $0 < z < Z$, $0 < y < 1$. Численное ре-

шение проведено в разное время несколькими разностными методами, в частности, при $v \equiv 0$ удалось реализовать известный в газодинамике метод Годунова в решении двумерных МГД-задач с поперечным магнитным полем при двух значениях показателя адиабаты $\gamma = 5/3$ и $\gamma = 2$ [33]. В последнее время в основном используется метод коррекции потоков в вариантах Бориса—Бука и Залесака [34].

Результаты численного решения поставленной задачи и ее модификаций можно систематизировать следующим образом.

1. Большая часть расчетов выполнена первоначально в предположении бесконечно проводящей плазмы ($\sigma = \infty$, $v = 0$), исходя из того, что оценки электропроводности плазмы в ускорителе типа КСПУ $v = 1/\text{Re}_m \lesssim 10^{-3}$ позволяют считать ее влияние несущественным. Результаты относятся к основным простейшим свойствам течений.

— Стационарные течения получены в процессе установления за время порядка пролетного $t \sim Z/u$, где Z — длина канала, u — характерное значение установившейся продольной скорости. Это говорит об устойчивости течения относительно возмущений той же размерности, т.е. двумерных, которые могут оказаться наиболее опасными. Некоторые результаты о затухании трехмерных возмущений в линейном приближении представлены в работе [35].

— Исследован разброс скорости $u(Z, r)$ по радиусу на выходе из канала, который характеризует свойства ускорителя. В слабом магнитном поле (большие значения параметра β) этот разброс незначителен, при возрастании поля он увеличивается, но при этом всегда остается слабее, чем разброс на входе напряженности поля $H(0, r) \sim 1/r$.

— В каналах с сильно профилированными электродами плотность плазмы может оказаться немонотонно убывающей вдоль траекторий течения, а распределение электрического тока может содержать вихри, т.е. участки с обратным направлением тока, препятствующим ускорению. Эти результаты нашли теоретическое объяснение в работах А.И. Морозова и Л.С. Соловьева [14]. В последнее время упомянутые явления подробно исследованы в каналах с сильно профилированными электродами [18, 36].

— В каналах с укороченным центральным электродом плазма выходит на ось системы, где образуется зона компрессии — область с высокими значениями плотности и температуры, которые возрастают скачком на конической ударной волне. Распределение плотности и поля скоростей в канале, представленные на рис. 4, получены в расчетах методами Годунова [33] и коррекции потоков [37].

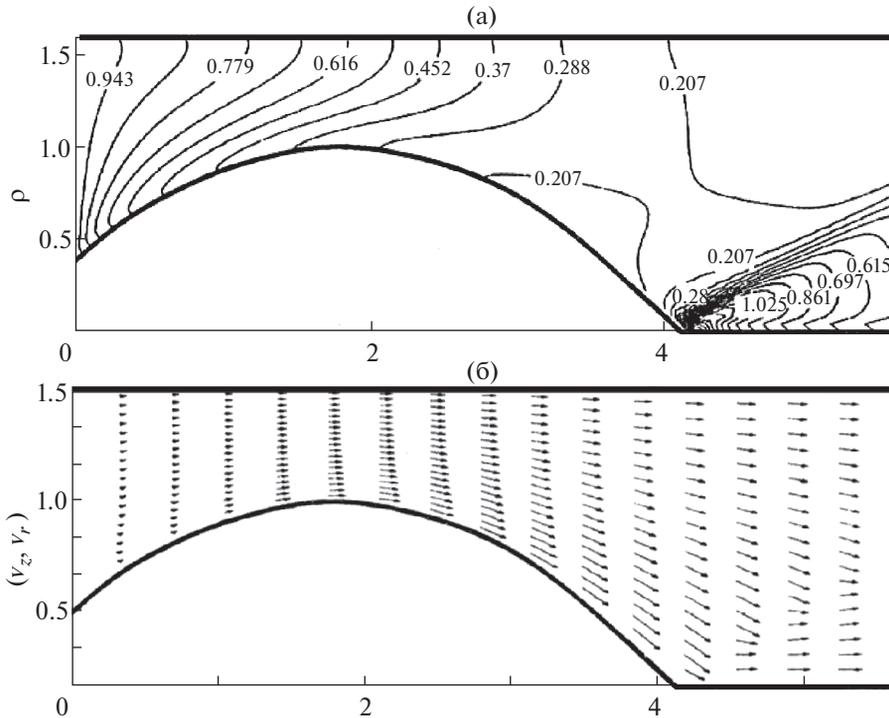


Рис. 4. Стационарное МГД-течение и зона компрессии на оси канала: линии уровня плотности (а), поле скоростей (б).

2. При повышении мощности ускорителя для адекватного описания течений плазмы в каналах изложенной МГД-модели оказалось недостаточно. Ожидаемые ускорительные свойства течения по-прежнему воспроизводятся в расчетах, однако они не совпадают с экспериментальными данными. Эксперименты показали, что процессы в прилегающих к электродам слоях, во-первых, зависят от полярности электродов, которую не учитывает МГД-модель, и во-вторых, препятствуют ускорению: здесь электрический ток отклоняется от радиального направления и скользит вдоль поверхности электрода, где образуются скачки потенциала. Исследовать эти процессы удалось в терминах модифицированной МГД-модели, включающей эффект Холла. Она допускает конечное различие скоростей ионов и электронов

$$\rho(\mathbf{v}^i - \mathbf{v}^e) = \xi \mathbf{j}$$

и связанное с ним взаимодействие тока с магнитным полем в законе Ома [13–16]. В модифицированной системе уравнений (2) два последних уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + p \nabla \cdot \mathbf{v} &= v_j^2 + \frac{\xi}{2} \mathbf{e}_j \cdot \nabla s \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) - \nabla \times (\mathbf{v} \mathbf{j}) - \\ &- \xi \nabla \times \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{H} - \nabla p / 2}{\rho}, \end{aligned} \quad (5)$$

в которых эффект Холла представлен последними слагаемыми в правых частях. Его количественной мерой является безразмерный параметр обмена

$$\xi = \frac{cm_i}{er_0 \sqrt{4\pi\rho_0}},$$

где m_i – масса иона, e – величина заряда электрона, r_0, ρ_0 – характерные значения размера области и плотности, плазмы.

В расчетах течений плазмы в изложенной МГД-модели с учетом эффекта Холла стационарный режим устанавливается только при ограничении на параметр обмена

$$\xi < \xi^{cr}(\nu). \quad (6)$$

Результаты расчетов отражают упомянутое выше отклонение тока от радиального направления, сильно выраженное вблизи электродов. Если неравенство (6) нарушено, течение носит взрывной характер в первую очередь у анода (“анодные взрывы”). При $\nu \equiv 0$ течение оказалось неустойчивым, и при его анализе обнаружена возможная некорректность задачи Коши с модифицированными МГД-уравнениями [15]. Строгий анализ задачи, критерий ее корректности и примеры расчетов устойчивых и неустойчивых течений изложены в [16, 38, 39].

3. Другой пример выхода за пределы классической МГД связан с моделированием процесса

ионизации газа в каналах. В экспериментальных исследованиях течений ионизирующегося газа, например, в каналах ускорителей первой ступени КСПУ, наблюдаются как квазистационарные с ярко выраженным фронтом, так и нестационарные пульсирующие режимы с сильными колебаниями температуры. Последние имеют, по-видимому, общую природу с явлениями при расширении плазменного цилиндра и ускорения плазмы в установках рельсотронного типа: периодически возникающие высокотемпературные слои обнаружены в численных экспериментах группой авторов под руководством А.Н. Тихонова и А.А. Самарского и составили предмет открытия, названного Т-слоем [40]. Анализу указанных явлений в коаксиальных каналах посвящены работы по их численному моделированию, в которых существенную роль играет нелинейная зависимость проводимости плазмы от температуры. Рассмотрено несколько постепенно усложняющихся математических моделей, которые предполагают втекающий в канал газ слегка ионизованным. Простейшая из них использует скачкообразную зависимость проводимости среды от температуры

$$\sigma(T) = \begin{cases} \sigma_1 \ll 1, & T < T^* \\ \sigma_2 \gg \sigma_1, & T > T^*, \end{cases} \quad (7)$$

где σ_1 – низкая проводимость газа, σ_2 – реальная проводимость плазмы, а T^* – условное значение температуры ионизации [15, 16]. В расчетах стационарные режимы устанавливаются при определенном ограничении сверху на разность $\sigma_2 - \sigma_1$, а периодические – при больших ее значениях.

Последующие модели имеют дело с трехкомпонентной сплошной средой, состоящей из электронов, ионов и нейтральных атомов. Отношение концентраций этих компонент, т.е. степень ионизации подчиняется законам локально-термодинамического равновесия (ЛТР) и описывается формулой Саха.

В расчетах здесь также устанавливаются либо стационарные либо пульсирующие режимы течения, которые отличаются друг от друга отношением J^2/M квадрата разрядного тока к потоку массы в канале, выраженному в токовых единицах: в стационарных режимах этот параметр выше, чем в пульсирующих [19, 41]. Это значит, что поддержание стационарного процесса ионизации в потоке заданной величины требует достаточно сильного электрического тока.

В упомянутых моделях фронт ионизации размыт по сравнению с имеющимися экспериментальными наблюдениями. Относительно узкий фронт, более соответствующий экспериментам, удалось получить в моделях, учитывающих кине-

тику ионизации и рекомбинации с отклонениями от термодинамического равновесия [42].

В работах последних лет обращено внимание на сильные колебания температуры в пульсирующих режимах, в связи с чем в математическую модель включены процессы теплопроводности и излучения [19, 43]. Основным результатом расчетов состоит в том, что излучение не оказывает принципиального влияния на процесс ионизации, но излучение определенного диапазона может глубоко проникать в объем поступающего в канал газа и способствовать его предварительной ионизации [20].

4. ТЕЧЕНИЯ ПЛАЗМЫ В КАНАЛАХ В ПРИСУТСТВИИ ПРОДОЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Теоретические и численные исследования течений плазмы в каналах-соплах направлены также на выяснение влияния продольного магнитного поля на природу стационарных течений. Продольное поле может быть создано дополнительно, например, с помощью внешних проводников с током или соленоида, окружающих установку (рис. 3). Очевидно, что поле осевого направления, взаимодействуя с радиальным током, вращает плазму вокруг оси симметрии. Общая картина течения и количественные характеристики его особенностей составляют объект исследований, проведенных в МГД-модели невязкой нетеплопроводной бесконечно проводящей плазмы. Некоторые результаты о стационарных течениях в узких трубках течения упомянуты в обзоре А.И. Морозова и Л.С. Соловьева [14], где приведены первые интегралы МГД-уравнений в квазиодномерном приближении и обращено внимание на существенное различие между сверхальфвеновскими и доальфвеновскими (“до- и закритическими” [14]) течениями.

Подробное исследование квазиодномерных стационарных течений в канале с постоянным средним радиусом $R(z) = \text{const}$ и переменной площадью сечения $S(z)$ выполнено в терминах обыкновенных дифференциальных уравнений (безразмерных):

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dz} &= -\frac{(u^2 - C_A^2)}{(u^2 - C_s^2)(u^2 - C_f^2)} \frac{\rho u^2 dS}{S dz} \\ \frac{du}{dz} &= \frac{\gamma p (u^2 - C_A^2) + u^2 H_\phi^2}{(u^2 - C_s^2)(u^2 - C_f^2)} \frac{u dS}{\rho S dz} \\ \frac{dH_\phi}{dz} &= -\frac{H_\phi u^4}{(u^2 - C_s^2)(u^2 - C_f^2)} \frac{dS}{S dz} \\ \frac{dw}{dz} &= \frac{H_z}{\rho u} \frac{dH_\phi}{dz}; \quad \frac{d}{dz} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0; \quad \frac{dH_z S}{dz} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где $u = v_z$, $w = v_\phi$, C_s , C_f , C_A – медленная, быстрая и альфвеновская скорости магнитного звука в направлении оси z [16, 44]. В отличие от известных течений в газодинамическом сопле Лавалья и аналогичных течений плазмы в поперечном поле [16, 45] эти уравнения имеют не одну, а две особенности при $u = C_s$ и $u = C_f$. Следовательно, их непрерывные решения, вообще говоря, могут описывать либо до- либо сверхзвуковые течения относительно каждой из скоростей C_s и C_f . Трансзвуковые течения (с ускорением или замедлением) возможны только, если переход через любую из этих скоростей происходит в минимальном сечении сопла, где $S'(z) = 0$. Еще одно специфическое свойство течений связано с альфвеновской скоростью C_A . Из уравнений (8) следует, что производная разности $d(u^2 - C_A^2)/dz$ пропорциональна ей самой, т.е. если $u = C_A$ хоть в одном сечении z , обе скорости совпадают тождественно, а плотность плазмы $\rho = \rho^{cr}$ постоянна согласно первому уравнению (8). Таким образом, трансальфвеновские течения в рассмотренной геометрии вообще невозможны, а для всех теоретически возможных стационарных течений установлена следующая классификация [16, 44], схематически представленная на рис. 5. Девять типов течения различаются между собой отношением скорости течения u к скоростям C_s , C_A , C_f : первые четыре типа – сверхальфвеновские сверхзвуковые по отношению к C_s , тип 5 – альфвеновский [46], типы 6–9 – доальфвеновские, дозвуковые относительно C_f и с разными значениями отношения u/C_s . Основные характеристики каждого из перечисленных типов легко определяются с помощью первых интегралов стационарных МГД-уравнений в квазиодномерном приближении или установлением во времени численного решения нестационарных задач [16, 44].

Более полное исследование МГД-течений в каналах проведено в терминах численного решения двумерных нестационарных задач [18, 37, 47]. В качестве результатов получены примеры уста-

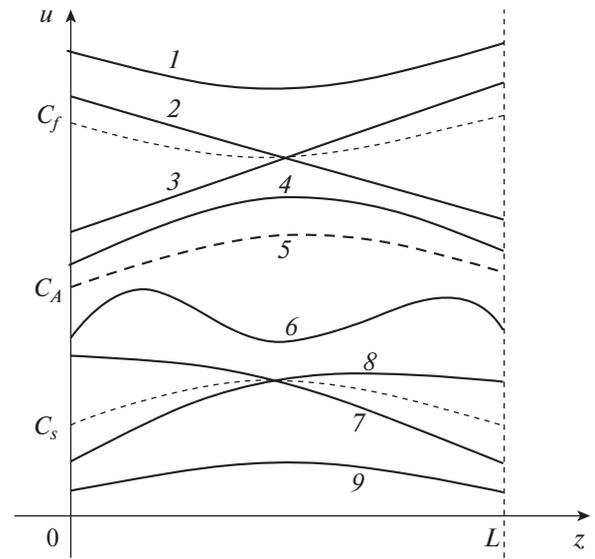


Рис. 5. Классификация стационарных течений плазмы в каналах-соплах в присутствии продольного магнитного поля: графики скорости течений различных типов (сплошные линии) и скоростей магнитного звука (штриховые линии).

новившихся течений сверх- и доальфвеновских типов, а также комбинированных, т.е. разных типов в разных частях канала. Специальное внимание уделено трансзвуковым сверхальфвеновским течениям в каналах с заметно выраженной кривизной электродов. На рис. 6–7 представлено распределение плотности плазмы и электрического тока (линии уровня $H_\phi r = \text{const}$) в каналах с выпуклыми внутрь отдельно центральным и внешним электродами в присутствии продольного поля и без него. Здесь видно, что процесс ускорения выглядит более равномерным и эффективным в первом варианте геометрии, который реализован в КСПУ. Второй вариант характеризуется немонотонным распределением плотности вдоль внешнего электрода, что дополнительно усиливается продольным полем. В обоих вариантах геометрии присутствие продольного поля отклоняет электрический ток от радиального направления, что может оказаться полезным для нейтрализации отклонения тока в противоположную сторону, обязанного упомянутому выше эффекту Холла.

Некоторые результаты расчетов течений плазмы в каналах с продольным полем в модифицированных моделях с учетом эффекта Холла и конечной проводимости изложены в [48].

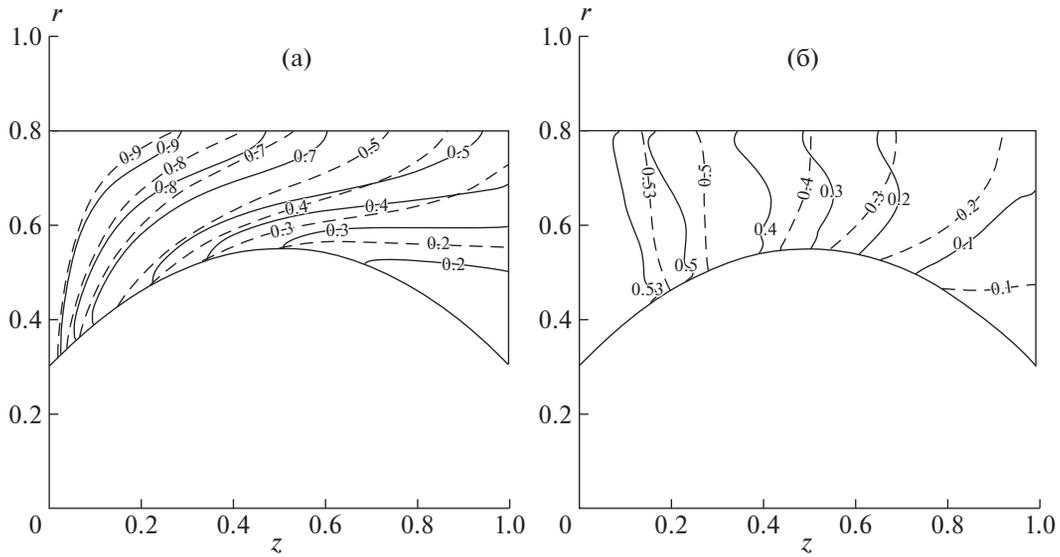


Рис. 6. Распределение плотности (а) и электрического тока (б) в канале с профилированным центральным электродом в присутствии продольного магнитного поля (сплошные линии) и без него (штриховые линии).

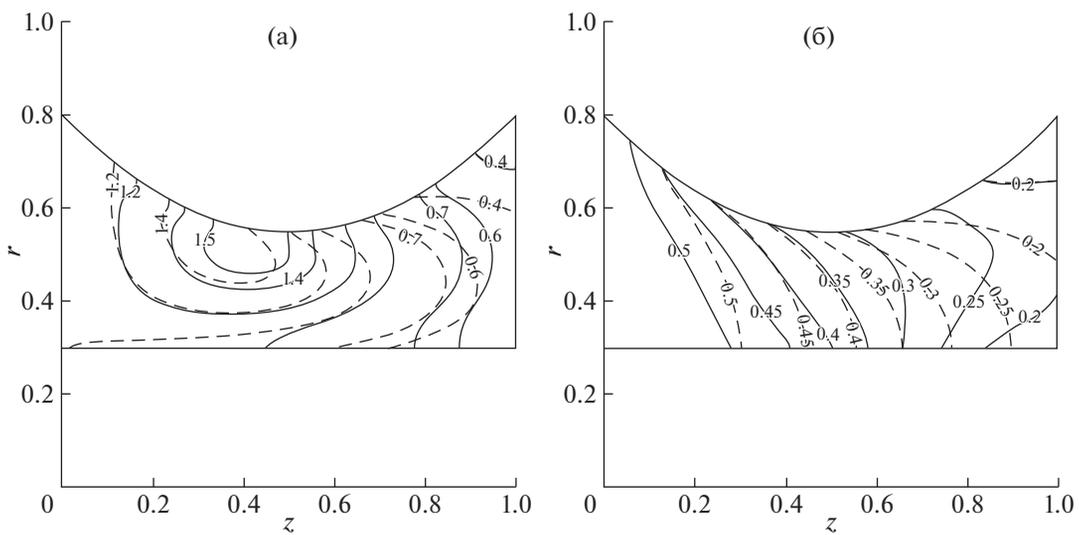


Рис. 7. Распределение плотности (а) и электрического тока (б) в каналах с профилированным внешним электродом в присутствии продольного магнитного поля (сплошные линии) и без него (штриховые линии).

5. ПЛАЗМОСТАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАВНОВЕСИЯ В МАГНИТНЫХ ЛОВУШКАХ ДЛЯ УДЕРЖАНИЯ ПЛАЗМЫ

Численные исследования равновесия плазмы в магнитном поле ловушек используют математический аппарат плазмостатики. Возможные конфигурации плазмы, поля и электрического тока полностью характеризуются распределением в пространстве трех функций: давления p , напряженности поля \mathbf{H} и плотности электрического то-

ка \mathbf{j} . Они удовлетворяют уравнению МГД-равновесия и двум уравнениям Максвелла

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{H}, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (9)$$

которые приведены здесь в безразмерной форме. Краевые задачи в заданных областях с заданными граничными условиями могут служить основой математических моделей рассматриваемых конфигураций. В общем виде они достаточно сложны, но в весьма распространенном круге вопро-

сов представляют интерес ловушки или их упрощенные аналоги, обладающие симметрией – плоской, осевой или винтовой, в результате чего уравнения (9) сводятся к одному скалярному уравнению с двумя независимыми переменными для функции потока магнитного поля. В случае осевой симметрии ($\partial/\partial\phi \equiv 0$ в цилиндрических координатах z, r, ϕ) оно называется уравнением Грэда–Шафранова [24, 25].

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + r^2 \frac{dp}{d\Psi} + I \frac{dI}{d\Psi} = 0, \quad (10)$$

где

$$rH_r = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad rH_z = \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad I = rH_\phi.$$

Его разновидности имеют вид: в случае плоской симметрии

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{dp}{d\Psi} + I \frac{dI}{d\Psi} = 0, \quad (11)$$

где $H_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$, $H_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$, $I = H_z$; в случае винтовой симметрии

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{\eta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \frac{dp}{d\Psi} - \frac{2\alpha I}{\eta^2} + \frac{I}{\eta} \frac{dI}{d\Psi} = 0, \quad (12)$$

где $\theta = \phi - \alpha z$, $rH_r = \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$, $H_\theta \equiv H_\phi - \alpha rH_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}$, $I = H_z + \alpha rH_\phi$, $\eta = 1 + \alpha^2 r^2$, $\alpha = 2\pi/L$, L – шаг винта [16, 45, 49, 50].

Каждая из разновидностей уравнения содержит две произвольные функции $p(\psi)$ и $I(\psi)$ искомым величинами ψ , которые должны быть заданы с помощью дополнительных требований к решению конкретной задачи или информации о нем. В этом проявляется некоторая недоопределенность краевых задач плазмостатики. Ее причина заключается в том, что при выводе уравнений (10)–(12) из (8) не использовано МГД-уравнение индукции магнитного поля (2), которое в равновесии означало бы $\nabla \times (\mathbf{v}_j) = 0$, т.е. не учтена проводимость плазмы, а также какие-либо дополнительные обстоятельства или источники, которые могли быть отражены в уравнениях МГД. Поэтому они в лучшем случае описывают строгое равновесие бесконечно проводящей плазмы. Равновесных решений существует бесконечно много, т.к. они зависят от выбора функций $p(\psi)$ и $I(\psi)$. Поскольку проводимость плазмы реально конечна, полученные любым способом идеальные равновесия фактически оказываются квазиравновесными и медленно разрушаются вследствие слабой диффузии магнитного поля [30, 31]. Применимость уравнения Грэда–Шафранова к описанию равновесия реальной плазмы в сильном

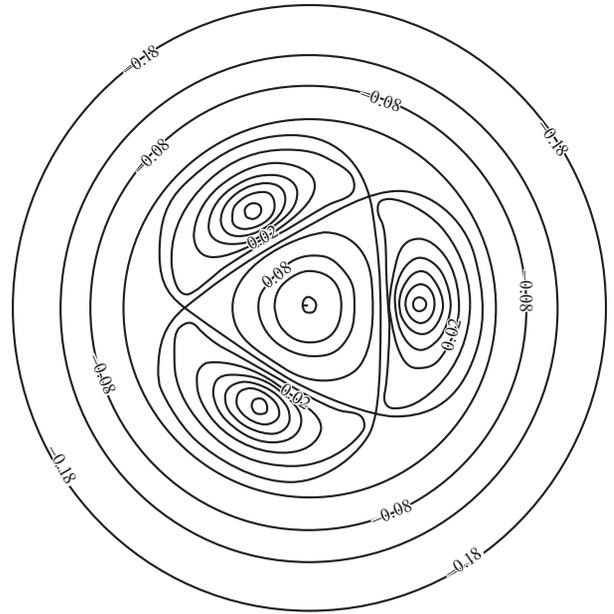


Рис. 8. Сечение магнитных поверхностей плоскостью $z = \text{const}$ в цилиндрической стелларатор-галатее.

магнитном поле подробно обсуждена в статье Л.Е. Захарова и В.Д. Шафранова [51].

А.И. Морозовым инициирован цикл работ по расчетам плазмостатических моделей конфигураций в ловушках-галатеех с погруженными в плазму проводниками с током. Чтобы не выделять из расчетной области островки с сечениями проводников, краевые задачи ставятся и решаются в односвязной области, охватывающей ловушку в целом, а ток в проводнике задается с помощью дополнительного слагаемого типа.

$$j^{\text{ex}}(x, y) = \sum_k j_0 \exp \left(-\frac{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}{r_c^2} \right) \quad (13)$$

в младших членах уравнений (10)–(12), где (x_k, y_k) – координаты центров проводников, r_c – их условный радиус, а коэффициент j_0 определяется требованием, чтобы интеграл по (x, y) от каждого слагаемого (13) соответствовал заданной величине тока в проводнике.

Первые работы упомянутого цикла посвящены расчетам цилиндрического плазменного шнура с тремя винтовыми проводниками в нем – “стелларатор-галатее” (СГ). Идея ловушки предложена в [52]. Винтовые проводники образуют сложную систему магнитных поверхностей, сечение которых плоскостью $z = \text{const}$ представлено на рис. 8. Дополнительно предполагается винтовая симметрия всей задачи с заданным шагом винта проводников. Функция $p(\psi)$ соответствует требованиям сосредоточить плазму в нужном ме-

сте и избежать ее соприкосновения с проводниками и внешней границей. Им удовлетворяет, например,

$$p(\psi) = p_0 \exp\left(-\left(\frac{\psi - \psi_0}{q}\right)^2\right) \quad (14)$$

Параметр ψ_0 равен значению ψ на магнитной поверхности, в окрестности которой предполагается расположить плазму. Рассмотрено две возможности выбора ψ_0 . Во-первых, $\psi_0 = \psi(0, 0)$ в центре области. При этом проводники фактически расположены вне плазменного шнура, и эта конфигурация аналогична традиционным стеллараторам. Во-вторых, $\psi_0 = \psi_{sep}$ — значение ψ на сепаратрисе магнитного поля, которая охватывает все три проводника, не касаясь их, т.е. плазменная конфигурация относится к классу галатей. Функция $I(\psi) = \alpha/2\pi$ соответствует постоянному значению винтовой компоненты напряженности магнитного поля. Краевая задача с уравнением (12), дополненным слагаемым типа (13), ставится в круге с условием $\psi = \text{const}$ на его непрозрачной для магнитного поля границе. Ее разностный аналог решается численно итерационным методом установления. Результатом расчетов являются геометрия и количественные характеристики равновесных магнитоплазменных конфигураций и их зависимость от параметров задачи — максимального давления p_0 , отнесенного к магнитной единице, и шага винта проводников. Из них можно сделать два основных вывода.

Во-первых, единственная при заданных условиях равновесная конфигурация устанавливается в итерационном процессе численного решения задач лишь при ограниченных сверху значениях давления

$$p_0 < p_0^{cr}. \quad (15)$$

Физический смысл его в том, что ловушка с заданными геометрией и величиной тока в проводниках способна удержать плазму лишь ограниченного давления. Подобного рода ограничения возникают в широком классе задач о моделях взаимодействия физических процессов реакции и диффузии, например, в теории горения [16, 45, 53]. Они имеют общую математическую природу. Решение краевых задач с уравнениями типа

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \Delta \psi + g(\psi, x, y) \quad (16)$$

с коэффициентами, не зависящими от времени t , и граничным условием $\psi = \psi_\Gamma$ стремится к равносному решению, если решение линейной задачи о погрешности итераций

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \frac{\partial g}{\partial \psi} u; \quad u|_\Gamma = 0 \quad (17)$$

стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Это имеет место тогда и только тогда, когда самосопряженный дифференциальный оператор линеаризованной задачи

$$L[u] = -\Delta u - \frac{\partial g}{\partial \psi} u; \quad u|_\Gamma = 0$$

положительно определен (см., например, [54]). В рассмотренных задачах плазмостатики подтверждено, что значению $p_0 = p_0^{cr}$ соответствует обращение в нуль первого собственного значения оператора L , которое легко определяется численным решением задачи (17) параллельно с исходной задачей (16). Таким образом, ограничение (15) связано не со случайно выбранным численным методом решения, а с глубокой общей природой самих задач.

Второй вывод относится к конкретной ловушке СГ. Из двух рассмотренных вариантов расположения плазмы предпочтительнее с точки зрения удержания оказался тот, в котором максимальное давление сосредоточено вдоль сепаратрисы: значения p_0^{cr} здесь оказались втрое выше, чем в конфигурациях, сосредоточенных в центре. Таким образом, расчеты подтвердили преимущества и перспективность концепции ловушек-галатей по сравнению с традиционными стеллараторами [55]. Расчеты конфигураций в СГ, связанные с ними соображения и соответствующая библиография изложены в [16, 27, 56–58].

Следующие работы “галатейного” цикла посвящены моделям и расчетам конфигураций в тороидальной ловушке “Галатейя-Пояс” с двумя кольцевыми проводниками внутри плазменного объема. Ловушка предложена А.И. Морозовым и А.Г. Франк [59] в связи с предполагаемым сходством с конфигурациями типа токового слоя, который является постоянной темой экспериментальных исследований в ИОФАН в развитие идей С.И. Сыроватского о природе солнечных вспышек [60]. Подробно исследован распрямленный в цилиндр квадратного сечения аналог “Пояса” с двумя проводниками, параллельными оси. Плазму предполагается сосредоточить вне проводников вдоль проходящей через центр магнитной сепаратрисы. В результате расчетов получено распределение поля и плазмы (рис. 9а). Плазменная конфигурация расположена в центре области и имеет форму криволинейного четырехугольника с выпуклыми внутрь границами, к которому примыкает тонкая периферия, окружающая проводники вдоль сепаратрисы. Электрический ток в плазме $j = -dp/d\psi$, отрицательный внутри сепаратрисы и положительный вне ее, взаимодействует с магнитным полем, ориентированным против часовой стрелки, и создает амперову силу $\mathbf{j} \times \mathbf{H}$, направленную в сторону сепаратрисы, ко-

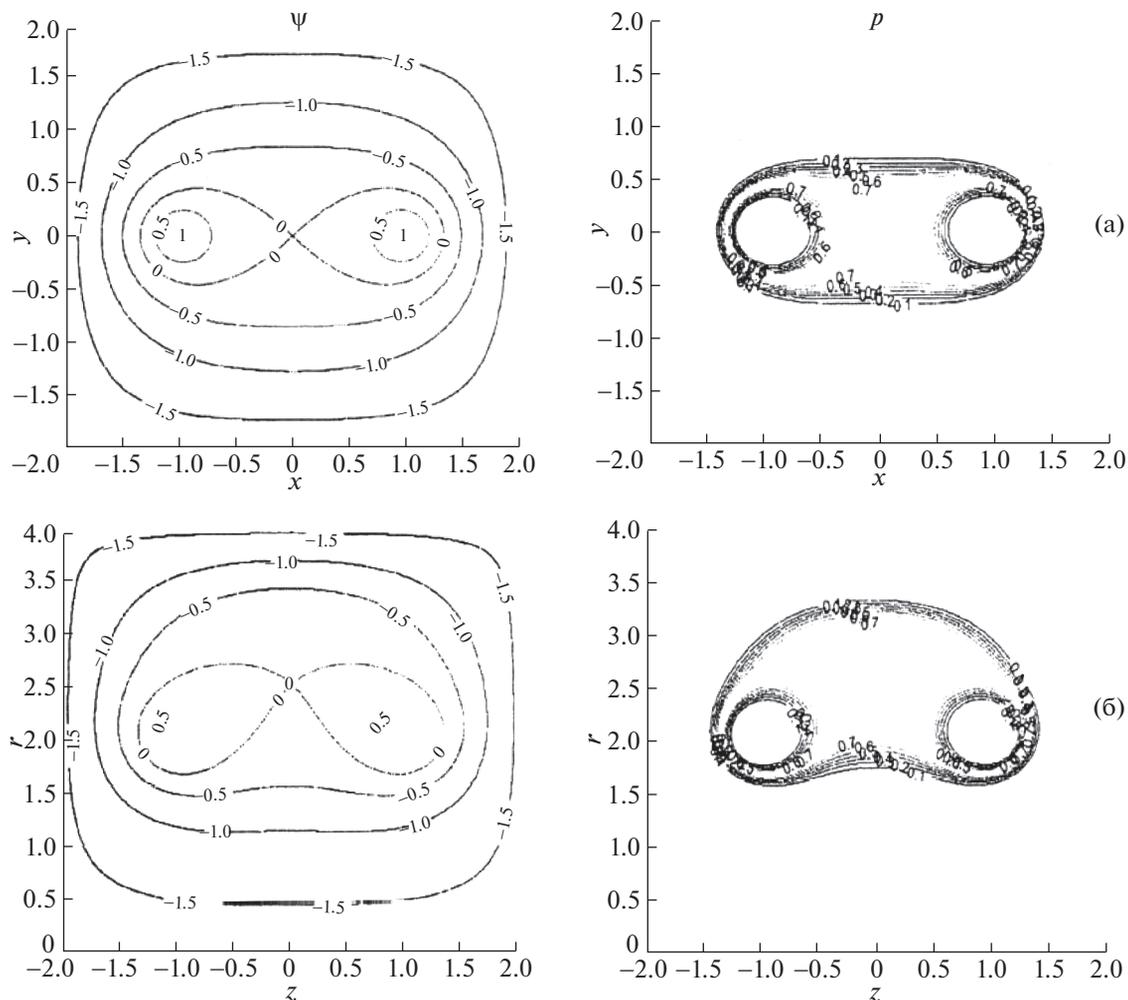


Рис. 9. Распределение магнитного поля и давления плазмы в цилиндрическом (а) и тороидальном (б) вариантах галатеи-пояса.

торая не позволяет плазме контактировать с проводниками [61, 62]. Распределение плазменного тока в “Поясе” в отличие от токовых слоев имеет характер “бислая”: ток равен нулю там, где давление плазмы максимально, а его величина разных знаков на внутренней и внешней границах конфигурации максимальна у этих границ. Сравнительный анализ плазموэстатических моделей конфигураций в галатее и токовом слое, а также плазмодинамических моделей их формирования представлен в [63].

Изложенные результаты для цилиндрического аналога “Пояса” характеризуют качественную природу и основные закономерности рассмотренных ловушек. Чтобы установить количественные характеристики тороидальной ловушки и их отличия от цилиндрической, проведены расчеты тех же конфигураций в торах квадратного сечения с разными значениями их большого радиуса и сопоставлены с аналогичными результатами в

цилиндре. Квадратная форма области выбрана для простоты расчетов в торе, что практически не влияет на результаты, т.к. плазменная конфигурация сосредоточена вдали от границы, совпадающей с магнитной поверхностью. Конфигурации в торе деформированы по сравнению с цилиндрическими и смещены в направлении большого радиуса, что иллюстрирует теоретические положения статьи [51]. Они также отличаются от последних уменьшением полоидального магнитного потока и критического значения p_0^{cr} . На рис. 9б приведено распределение магнитного поля и давления плазмы в торе для сравнения с аналогичной равновесной конфигурацией в цилиндре на рис. 9а. Подробная количественная информация о различии конфигураций в обоих вариантах геометрии представлена в [29, 64–66].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брагинский С.И., Гельфанд И.М., Федоренко Р.П. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций / Ред. М.А. Леонтович. Изд. АН СССР, 1958. Т. 4. С. 201.
2. Гельфанд И.М., Граев М.И., Зуева Н.М., Морозов А.И., Соловьев Л.С. // ЖТФ. 1961. Т. 31. № 10. С. 1164.
3. Гельфанд И.М., Граев М.И., Зуева Н.М., Михайлова М.С., Морозов А.И. // ДАН СССР. 1962. Т. 143. № 1. С. 81.
4. Гельфанд И.М., Граев М.И., Зуева Н.М., Михайлова М.С., Морозов А.И., // ДАН СССР. 1963. Т. 148. № 6. С. 1286.
5. Зуева Н.М., Михайлова М.С., Морозов А.И. // ДАН СССР. 1963. Т. 153. № 4. С. 801.
6. Морозов А.И., Соловьев Л.С. // Вопросы теории плазмы / Ред. М.А. Леонтович. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 2. С. 3.
7. Зуева Н.М., Соловьев Л.С. // Матем. моделирование. 1998. Т. 10. № 10. С. 88.
8. Морозов А.И. // Межд. семинар “Межд. сотрудничество в будущих космических полетах, использующих электродвигатели” Светлогорск, Россия, 15–16 сент. 2005.
9. Морозов А.И. // ЖЭТФ. 1957. Т. 32. Вып. 2. С. 305.
10. Арцимович Л.А., Лукьянов С.Ю., Подгорный И.М., Чуватин С.А. // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. Вып. 1. С. 3.
11. Морозов А.И. // Энциклопедия низкотемпературной плазмы / Ред. В.Е. Фортов. М.: Наука, 2000. Вводный том III. Раздел IX. С. 393.
12. Морозов А.И. Физические основы космических электрореактивных двигателей. М.: Атомиздат, 1978.
13. Морозов А.И. Введение в плазмодинамику. 2-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
14. Морозов А.И., Соловьев Л.С. // Вопросы теории плазмы / Ред. М.А. Леонтович. М.: Атомиздат, 1974. Вып. 8. С. 3.
15. Брушлинский К.В., Морозов А.И. // Вопросы теории плазмы / Ред. М.А. Леонтович. М.: Атомиздат, 1974. Вып. 8. С. 88.
16. Брушлинский К.В. Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2009.
17. Дьяконов Г.А., Тихонов В.Б. // Физика плазмы. 1994. Т. 20. № 6. С. 533.
18. Брушлинский К.В., Жданова Н.С., Стёпин Е.В. // ЖВМ и МФ. 2018. Т. 58. № 4. С. 607.
19. Брушлинский К.В., Козлов А.Н., Коновалов В.С. // ЖВМ и МФ. 2015. Т. 55. № 8. С. 1405.
20. Kozlov A.N., Kononov V.S. // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation (CN-SNS). 2017. V. 51. P. 169.
21. Архипов А.С., Ким В.П., Сидоренко Е.К. Стационарные плазменные двигатели Морозова. М.: МАИ, 2012.
22. Morozov A.I., Savelyev V.V. // Reviews of Plasma Physics / Ed. V.B. Kadomtsev and V.D. Shafranov. Consultant Bureau. NY, Boston, Dordrecht, London, Moscow. 2000. V. 21. P. 203.
23. Морозов А.И. // Физика плазмы. 2003. Т. 29. № 3. С. 261.
24. Шафранов В.Д. // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. Вып. 3(9). С. 710.
25. Grad H., Rubin H. // Proc. 2-nd United Nations Int. Conf. Peaceful Uses Atomic Energy. Geneva. 1958. V. 31. NY: Columbia Univ. Press. 1959. P. 190.
26. Морозов А.И. // Физика плазмы. 1992. Т. 18. Вып. 3. С. 305.
27. Брушлинский К.В., Зуева Н.М., Михайлова М.С., Морозов А.И., Пустовитов В.Д., Тузова Н.Б. // Физика плазмы. 1994. Т. 20. № 3. С. 284.
28. Морозов А.И., Савельев В.В. // УФН. 1998. Т. 168. № 11. С. 1153.
29. Брушлинский К.В., Кондратьев И.А. // Матем. моделирование. 2018. Т. 30. № 6. С. 76.
30. Брушлинский К.В., Чмыхова Н.А. // Матем. моделирование. 2010. Т. 22. № 6. С. 3.
31. Брушлинский К.В., Чмыхова Н.А. // Вестн. НИЯУ МИФИ. 2014. Т. 3. № 1. С. 40.
32. Арнольд В.И. // УМН. 1963. Т. 18. Вып. 6 (144). С. 91.
33. Ратникова Т.А. // Матем. моделирование. 1997. Т. 9. № 8. С. 3.
34. Oran E., Boris J.P. Numerical simulation of reactive flow. Elsevier. NY, Amsterdam, London. 1987 (перевод: Оран Э., Борис Дж. Численное моделирование реагирующих потоков. М.: Мир. 1990).
35. Белова И.В., Брушлинский К.В., Морозов А.И. // Матем. моделирование. 1992. Т. 4. № 10. С. 3.
36. Brushlinskii K.V., Styopin E.V. // J. Phys: Conf. Ser. 2017. V. 788. 012009.
37. Брушлинский К.В., Жданова Н.С. // Физика плазмы. 2008. Т. 34. № 12. С. 1120.
38. Брушлинский К.В., Ратникова Т.А. // Матем. моделирование. 1996. Т. 8. № 2. С. 75.
39. Брушлинский К.В., Ратникова Т.А. // Физика плазмы. 1995. Т. 21. № 9. С. 784.
40. Тихонов А.Н., Самарский А.А., Заключинский Л.А., Волосевич П.П., Дегтярев Л.М., Курдюмов С.П., Попов Ю.П., Соколов В.С., Фаворский А.П. // ДАН СССР. 1967. Т. 173. № 4. С. 808.
41. Брушлинский К.В. // Энциклопедия низкотемпературной плазмы / Ред. В.Е. Фортов. 2008. Сер. Б. Т. VII-1, Часть 2. С. 84.
42. Козлов А.Н. // Изв. АН. Механика жидкости и газа. 2000. № 5. С. 181.
43. Kozlov A.N. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2017. V. 59. № 11. 115004.
44. Брушлинский К.В., Жданова Н.С. // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 3. P. 135.
45. Брушлинский К.В. Математические основы механики жидкости, газа и плазмы. Долгопрудный: Изд. Дом “Интеллект”, 2017.
46. Стёпин Е.В. // Вестник НИЯУ МИФИ. 2014. Т. 3. № 5. С. 517.
47. Brushlinskii K.V., Styopin E.V. // J. Phys: Conf. Ser. 2017. V. 937. 012007.
48. Козлов А.Н. // Физика плазмы. 2012. Т. 38. № 1. С. 15.
49. Johnson J.L., Oberman C.R., Kulsrud R.M., Frieman E.A. // Phys. Fluids. 1958. V. 1. № 4. P. 281.

50. *Пустовитов В.Д., Шафранов В.Д.* // Вопросы теории плазмы / Ред. Б.Б. Кадомцев. М.: Энергоиздат. 1987. Вып. 15. С. 146.
51. *Захаров Л.Е., Шафранов В.Д.* // Вопросы теории плазмы / Ред. М.А. Леонтович и Б.Б. Кадомцев. М.: Энергоиздат, 1982. Вып. 11. С. 118.
52. *Морозов А.И., Пустовитов В.Д.* // Физика плазмы. 1991. Т. 17. Вып. 10. С. 1276.
53. *Ильгисонис В.И., Поздняков Ю.И.* // Физика плазмы. 2004. Т. 30. № 12. С. 1064.
54. *Арсенин В.Я.* Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1974.
55. *Брушлинский К.В., Морозов А.И., Петровская Н.Б.* // Матем. моделирование. 1998. Т. 10. № 11. С. 29.
56. *Брушлинский К.В., Зуева Н.М., Михайлова М.С., Петровская Н.Б.* // Матем. моделирование. 1995. Т. 7. № 4. С. 73.
57. *Брушлинский К.В., Савельев В.В.* // Матем. моделирование. 1999. Т. 11. № 5. С. 3.
58. *Brushlinskii K.V.* // Comp. Phys. Comm. 2000. V. 26. P. 37.
59. *Морозов А.И., Франк А.Г.* // Физика плазмы. 1994. Т. 20. № 11. С. 982.
60. *Франк А.Г.* // УФН. 2010. Т. 180. № 9. С. 982.
61. *Брушлинский К.В., Игнатов П.А.* // ЖВМиМФ. 2010. Т. 50. № 12. С. 2184.
62. *Брушлинский К.В., Гольдич А.С., Десятова А.С.* // Матем. моделирование. 2012. Т. 24. № 8. С. 81.
63. *Брушлинский К.В., Гольдич А.С., Давыдова Н.А.* // Матем. моделирование. 2016. Т. 28. № 7. С. 107.
64. *Брушлинский К.В., Гольдич А.С.* // Дифф. уравнения. 2016. Т. 52. № 7. С. 887.
65. *Brushlinskii K.V., Goldich A.S.* // J. Phys.: Conf. Ser. 2017. V. 788. 012008
66. *Brushlinskii K.V., Kondratyev I.A.* // J. Phys.: Conf. Ser. 2017. V. 937. 012006.