ФИЗИКА ПЛАЗМЫ, 2019, том 45, № 12, с. 1157–1164

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ

УДК 533.951

О МГД-КОЛЕБАНИЯХ ПЛАЗМЕННОГО ШНУРА КОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ СКАЧКА ПАРАМЕТРОВ В ПРИСТЕНОЧНОЙ ОБЛАСТИ

В. В. Арсенин*

Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", Москва, Россия

**e-mail: Arsenin_VV@nrcki.ru*

Поступила в редакцию 14.05.2019 г.
После доработки 20.06.2019 г.
Принята к публикации 25.06.2019 г.

В модели прямого цилиндра в сильном продольном магнитном поле рассматриваются МГД-колебания плазмы конечной проводимости в ситуации, когда в плазме отсутствует резонансная поверхность, на которой компонента волнового вектора возмущения вдоль поля обращается в нуль. При высокой проводимости имеются крупномасштабные, с радиальной длиной волны порядка радиуса шнура колебания, во всем объеме мало отличающиеся от тех, что описываются идеальной МГД. Показано, что при наличии скачка плотности и электронной температуры на некоторой магнитной поверхности около стенки, наряду с такими колебаниями, благодаря конечности проводимости возможно существование другой МГД-моды. В этой моде возмущения крупномасштабны и почти идеальны в большей части объема плазмы, но мелкомасштабны по радиальной координате и не идеальны в пристеночной области.

Ключевые слова: МГД, конечная проводимость, пристеночная плазма, крупномасштабная и мелкомасштабная составляющие колебаний

DOI: 10.1134/S0367292119120011

1. ВВЕДЕНИЕ

При высокой, но конечной проводимости плазмы вдоль магнитного поля радиальная собственная функция МГД-колебаний плазменного шнура включает две составляющие: крупномасштабную, которая при $\sigma_\parallel \to \infty$ переходит в движение, описываемое идеальной МГД, и мелкомасштабную, характерный радиальный масштаб которой определяется величиной проводимости. Мелкомасштабная часть возмущения может быть локализована: около резонансной магнитной поверхности $k_\parallel = \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}/B = 0$, если таковая находится в плазме; около поверхностей резкого изменения параметров плазмы по радиусу; около стенки. Первый случай реализуется, в частности, в тиринг-неустойчивости. Вычисления мелкомасштабной составляющей в тиринг-неустойчивости при ограничении проводимости столкновениями проделаны в [1, 2], этой неустойчивости посвящена обширная литература. Подход [1, 2] применим и при другом механизме ограничения проводимости – из-за инерции электронов [3]. Локализация возле стенки имеет место при плавных радиальных профилях невозмущенных величин в отсутствие в плазме резонансной поверхности, причем в этом случае амплитуда мелкомасштабной составляющей мала по сравнению с крупномасштабной, и возмущение в целом мало отличается от идеальной МГД-моды [4]. В настоящей работе изучается роль конечности проводимости в колебаниях шнура в ситуации, когда резонанс $k_\parallel = 0$ в плазме отсутствует, но есть резкое изменение проводимости на некоторой поверхности $r = \mathrm{const}$ вблизи стенки. В таком случае в МГД, помимо решения, всюду близкого к идеальной МГД-моде, при определенного вида дисперсии продольной проводимости может быть и другое крупномасштабное решение. Оно почти во всем объеме плазмы мало отличается от решения в идеальной МГД, однако содержит значительную мелкомасштабную неидеальную составляющую, локализованную в пристеночном слое.

2. УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ

Рассматриваем МГД-колебания длинного тонкого шнура плазмы конечной проводимости. Используем модель прямого цилиндра плазмы низкого давления, $\beta = 8\pi p/B^2 \ll 1$, в сильном аксиальном магнитном поле, $B_z \gg B_\vartheta$. В предположении, что тензор проводимости диагональный и $\sigma_\parallel \gg \sigma_\perp$(значок $\perp$ относится к направлениям поперек $\mathbf{B}$), длинноволновые по z возмущения $\propto \exp(im\vartheta - ik_z z - i\omega t)$ (при моделировании тонкого тороидального шнура $k_z = n/R$, R – большой радиус тора, n – тороидальное волновое число) электрического потенциала и вектор-потенциала магнитного поля описываются системой уравнений (см. [5, 6]) из z-компоненты уравнения Максвелла

$$\Delta_\perp \tilde{A}_z - \frac{4\pi}{c} i\sigma_\parallel \left(k_\parallel \tilde{\varphi} - \frac{\omega}{c}\tilde{A}_z\right) = 0 \quad (1)$$

и уравнения квазинейтральности ($\nabla \cdot \tilde{\mathbf{j}} = 0$)

$$-\nabla_\perp \cdot (\sigma_\perp \nabla_\perp \tilde{\varphi}) + \frac{im}{rB_z}\frac{dj_z}{dr}\tilde{A}_z + k_\parallel \sigma_\parallel \left(k_\parallel \tilde{\varphi} - \frac{\omega}{c}\tilde{A}_z\right) = 0. \quad (2)$$

Здесь $k_\parallel = \mathbf{k}\cdot\mathbf{B}/B = B_\vartheta(m - nq)/rB_z$ – проекция волнового вектора на направление $\mathbf{B}$, $q(r)$ – запас устойчивости, j_z – невозмущенная плотность тока, c – скорость света, $\nabla_\perp = \nabla - \frac{\mathbf{B}}{B}\left(\frac{\mathbf{B}}{B}\cdot\nabla\right)$, $\Delta_\perp = \frac{d}{rdr}r\frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2}$. Принято во внимание, что с точностью $\sim(k_z a)^2$, где a – радиус шнура, z – компонента плотности тока возмущения равна $\tilde{j}_\parallel$, а лапласиан $\Delta\tilde{A}_z$ сводится к $\Delta_\perp \tilde{A}_z$. Сделаем еще несколько пояснений. Величины $\tilde{j}_{r,\vartheta}$ малы по сравнению с $\tilde{j}_z$, поэтому компонентами $\tilde{A}_{r,\vartheta}$ в возмущении вектор-потенциала и с ними возмущением z-компоненты магнитного поля, $\tilde{B}_z$, пренебрежено – происходит только изгибание силовых линий с появлением $\tilde{B}_r$, $\tilde{B}_\vartheta$, без сгущения/разрежения. Влияние малой кривизны невозмущенного магнитного поля на колебания игнорируется. Поперечная проводимость $\sigma_\perp = -(i\omega/4\pi)\omega_{pi}^2/\omega_{ci}^2$, где ω_{pi} и ω_{ci} – ионные плазменная и циклотронная частоты, связана с инерцией ионов (поляризационным током); частоты колебаний много меньше ω_{ci}, длины волн в направлении перпендикулярном $\mathbf{B}$ много больше ионного ларморовского радиуса ρ_i, конечностью ρ_i пренебрегается, так что движение поперек $\mathbf{B}$ гидродинамическое $\tilde{\mathbf{v}}_\perp = c\tilde{\mathbf{E}}_\perp \times \mathbf{B}/B^2$, дрейфовые эффекты не учитываются. Если рассматривается ситуация (как в разд. 4), когда имеется слой с резким радиальным изменением этих величин, в котором дрейфовые эффекты могли бы быть важны, мы, чтобы остаться в рамках принятой модели, можем ограничиться случаем $m = 0$. У $\sigma_\parallel$ есть, вообще говоря, не только временная, но и связанная с тепловым движением пространственная дисперсия, $\sigma_\parallel = \sigma_\parallel(r, \omega, k_\parallel)$.

Исключением

$$\tilde{\varphi} = \frac{\omega}{k_\parallel c}\tilde{A}_z + \frac{c}{4\pi i k_\parallel \sigma_\parallel}\Delta_\perp \tilde{A}_z \quad (3)$$

система (1), (2) приводится к одному уравнению четвертого порядка для $\tilde{A}_z$

$$\nabla_\perp \cdot \left[\varepsilon \nabla_\perp \left(\frac{\omega}{k_\parallel c}\tilde{A}_z + \frac{c}{k_\parallel \omega \eta}\Delta_\perp \tilde{A}_z\right)\right] + \frac{4\pi}{\omega}\frac{m}{rB_z}\frac{dj_z}{dr}\tilde{A}_z = \frac{k_\parallel c}{\omega}\Delta_\perp \tilde{A}_z, \quad (4)$$

где введены компоненты диагонального тензора диэлектрической проницаемости $\varepsilon = 4\pi i\sigma_\perp/\omega$ и $\eta = 4\pi i\sigma_\parallel/\omega$. Считается

$$4\pi\left|\sigma_{\perp,\parallel}/\omega\right| \gg 1, \quad (5)$$

и вакуумное слагаемое в диэлектрическом тензоре в расчет не принимается. Неравенства (5) предполагаем выполненными вплоть до стенки, окружающей плазму. Саму стенку $r = a$ для простоты полагаем идеально проводящей.

Граничные условия на оси – ограниченность возмущения

$$\tilde{A}_z\big|_{r=0} < \infty, \quad (6)$$

$$\tilde{\varphi}\big|_{r=0} < \infty. \quad (7)$$

На стенке

$$\tilde{A}_z\big|_{r=a} = 0, \quad (8)$$

$$\tilde{\varphi}\big|_{r=a} = 0, \quad (9)$$

что обеспечивает обращение в нуль тангенциальной компоненты электрического поля, которая в стенке равна нулю и должна быть непрерывной (иначе $\tilde{\mathbf{B}} = (c/i\omega)\nabla\times\tilde{\mathbf{E}}$ не будет ограничено). Имея в виду соотношение (3) и выполнение (8), условие (9) можно записать как

$$(\Delta_\perp \tilde{A}_z)_{r=a} = 0. \quad (9')$$

3. ДВА ТИПА РЕШЕНИЙ

При бесконечной продольной проводимости, $\eta = \infty$, уравнение (4) переходит в уравнение второго порядка

$$\nabla_\perp \cdot \left[\varepsilon \nabla_\perp \left(\frac{\omega}{k_\parallel c}\tilde{A}_z\right)\right] + \frac{4\pi}{\omega}\frac{m}{rB_z}\frac{dj_z}{dr}\tilde{A}_z = \frac{k_\parallel c}{\omega}\Delta_\perp \tilde{A}_z. \quad (10)$$

Дополненное граничными условиями (6), (8), оно дает спектр возмущений в идеальной ($\tilde{\varphi} = (\omega/k_\parallel c)\tilde{A}_z$) МГД, зависящий от профиля тока и положения стенки [7]. Если невозмущенные величины изменяются по r на длинах $\gtrsim a$, где a – радиус шнура, то характерная частота (или при неустойчивости, инкремент) порядка альфвеновской. В рассматриваемом случае, когда в плазме отсутствует поверхность $k_\parallel = 0$, характерная длина волны по r порядка a.

При высокой, но конечной продольной проводимости, $(k_\parallel a)^{-2} \ll |\eta/\varepsilon| < \infty$, уравнение (4) представляет собой уравнение с малым параметром при старших производных. Из четырех частных решений для двух – крупномасштабных по радиусу – слагаемое с η^{-1} в (4) мало. Эти решения близки к решениям уравнения (10).

Два другие частные решения мелкомасштабные, сильно изменяющиеся по радиусу на расстоянии $\lambda \ll a$; для этих решений главными в уравнении (4) являются члены с радиальными производными. Если на длине λ вариации невозмущенных величин, включая $d\ln k_\parallel/dr$, малы, то мелкомасштабные решения можно искать в квазиклассическом приближении $\tilde{A}_z \propto g\exp\left(\int \kappa dr\right)$, где

$$\kappa = |k_\parallel|\left[\frac{\eta}{\varepsilon}\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_A^2}\right)^{-1}\right]^{1/2}, \tag{11}$$

$\omega_A = |k_\parallel| c/\varepsilon^{1/2}$ – альфвеновская частота, $\left|\kappa^{-1} d\ln g/dr\right| \ll 1$. Формула (11) получается, когда в (4) оставлены только упомянутые главные члены. Два различающиеся решения соответствуют двум значениям квадратного корня. Величина λ имеет порядок $\left|\kappa^{-1}\right|$. Если $|\kappa|\rho_i \ll 1$, то и при наличии мелкомасштабной составляющей движение поперек **B** описывается МГД. Однако присутствие значительной мелкомасштабной составляющей делает неприменимой идеальную МГД, поскольку в (3) становится существенно слагаемое с лапласианом, так что $\tilde{\varphi} \neq (\omega/k_\parallel c)\tilde{A}_z$.

В радиальную собственную функцию, удовлетворяющую условиям (6)–(9), входят, вообще говоря, все четыре частные решения, причем их комбинация в разных областях по r (например, разделенных поверхностью с разрывом параметров) может быть разной. При плавных, без резких изменений на расстояниях $\lesssim\lambda$, профилях компонент диэлектрического тензора ε, η собственная функция, помимо крупномасштабной составляющей, содержит только одно, привязанное к стенке и спадающее от нее внутрь плазмы, мелкомасштабное решение. Его амплитуда мала по сравнению с характерным значением крупномасштабной составляющей в объеме плазмы (что следует из необходимости соблюдения условия (9')), так что в целом собственная функция близка к идеальной моде [4]. Наша задача – рассмотреть ситуацию, когда величины ε, η не плавные, а со скачкообразным поведением в слое толщиной $\lesssim\lambda$. Нет ли в этом случае собственных МГД-колебаний, сильно отличающихся от идеальной моды, в которых мелкомасштабная составляющая $\tilde{A}_z$ сравнима по величине с крупномасштабной?

4. МОДЕЛЬ СО СКАЧКОМ ПРОВОДИМОСТЕЙ ОКОЛО СТЕНКИ

Пусть η и ε как функции радиальной координаты испытывают внутри плазмы, в окрестности $r = b$, скачки – перепады на расстоянии $\lesssim\lambda$. Считаем, что вне этой окрестности параметры плазмы, и с ними η, ε меняются плавно – на длинах $\gtrsim a$. Поскольку $\varepsilon = (\omega_{pi}/\omega_{ci})^2$, то разрыв ε, если он есть, обязан разрыву плотности плазмы. В поведении $\eta(r)$ может играть роль и радиальная зависимость температуры. Пусть $D = a - b \ll a$. Примем для простоты, что на радиальной периферии шнура, которой принадлежит поверхность $r = b$ и в которой локализована мелкомасштабная составляющая $\tilde{A}_z$, плотность невозмущенного тока j_z равна нулю.

Предполагаем, что для данных m и k_z величина $k_\parallel$ в плазме не обращается в нуль и что для рассматриваемой частоты нет альфвеновского резонанса $\omega = \omega_A$.

При $r = b$ в возмущениях должны соблюдаться:

– непрерывность $\tilde{A}_z$

$$\tilde{A}_z\big|_{r=b+0} = \tilde{A}_z\big|_{r=b-0}, \tag{12}$$

так как скачок $[\tilde{A}_z]$ величины $\tilde{A}_z$ означал бы существование в тонком переходном слое δr большого поля $\tilde{B}_\vartheta \sim [\tilde{A}_z]/\delta r$, энергия которого $\propto[\tilde{A}_z]^2/\delta r$ при $\delta r \to 0$ стремится к бесконечности;

– следующая из непрерывности тангенциальной составляющей $\tilde{\mathbf{E}}$ непрерывность $\tilde{\varphi}$

$$\tilde{\varphi}\big|_{r=b+0} = \tilde{\varphi}\big|_{r=b-0}, \tag{13}$$

что можно записать в другой форме (напоминаем (3))

$$(\eta^{-1}\Delta_\perp \tilde{A}_z)_{r=b+0} = (\eta^{-1}\Delta_\perp \tilde{A}_z)_{r=b-0}; \tag{13'}$$

– непрерывность $\partial\tilde{A}_z/\partial r$ (означающая непрерывность $\tilde{B}_\vartheta$)

$$\left.\frac{\partial \tilde{A}_z}{\partial r}\right|_{r=b+0} = \left.\frac{\partial \tilde{A}_z}{\partial r}\right|_{r=b-0}, \tag{14}$$

вытекающая из (1) благодаря ограниченности правой части;

— непрерывность радиальной компоненты электрической индукции

$$\left[\varepsilon\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\omega}{k_\parallel c}\tilde{A}_z + \frac{c}{\omega k_\parallel \eta}\Delta_\perp \tilde{A}_z\right)\right]_{b-0}^{b+0} = 0 \qquad (15)$$

получается интегрированием (4).

4.1. Решения в пристеночной области

Величины, относящиеся к крупномасштабной составляющей возмущения, помечаем индексом L, к мелкомасштабной — индексом S. Чтобы не загромождать запись, индекс z у $\tilde{A}_z$ в дальнейшем опускаем.

Будем интересоваться возмущениями, в которых мелкомасштабная составляющая локализована около стенки и поверхности $r = b$. Длина ее экспоненциального спада от этих поверхностей привязки составляет $\Lambda = |\mathrm{Re}\,\kappa|^{-1}$. Пусть на каждом из двух участков по r: в примыкающем к поверхности $r = b$ промежутке толщиной $\sim\Lambda$ при $r < b$ и в слое $b < r < a$ — относительные изменения невозмущенных величин и $k_\parallel$ малы (в частности, ввиду тонкости пристеночного слоя, $D \ll a$, можно считать величины η и ε в нем равными соответственно $\eta|_{r=a}$ и $\varepsilon|_{r=a}$, каковые значения, напоминаем, полагаются отличными от нуля). В пренебрежении этими изменениями мелкомасштабная составляющая $\tilde{A}$ выглядит так:

при $r < b$

$$\tilde{A}_S = \tilde{A}_S^{(-)}\exp\left[\kappa^{(-)}(r-b)\right], \qquad (16)$$

где $\tilde{A}_S^{(-)}$ — постоянная, $\kappa^{(-)} = |k_\parallel| \times [\eta^{(-)}/\varepsilon^{(-)}(1-\omega^2/\omega_A^{(-)2}]^{1/2}$, $\eta^{(-)} = \eta|_{r=b-0}$, $\varepsilon^{(-)} = \varepsilon|_{r=b-0}$, причем берется значение квадратного корня (11) с $\mathrm{Re}\,\kappa^{(-)} > 0$, с тем чтобы с удалением от $r = b$ в сумме $\tilde{A} = \tilde{A}_L + \tilde{A}_S$ осталось (при $a\,\mathrm{Re}\,\kappa^{(-)} \gg 1$) только $\tilde{A}_L$ и тем самым при $\tilde{A}_L|_{axis} < \infty$ обеспечивалось выполнение граничных условий на оси;

при $b < r < a$

$$\tilde{A}_S = \tilde{A}_S^{(+)}\frac{\mathrm{sh}\left(\kappa^{(+)}(a-r)\right)}{\mathrm{sh}\left(\kappa^{(+)}(a-b)\right)}, \qquad (17)$$

где $\tilde{A}_S^{(+)}$ — постоянная, $\kappa^{(+)} = |k_\parallel| \times [\eta^{(+)}/\varepsilon^{(+)}(1-\omega^2/\omega_A^{(+)2}]^{1/2}$, $\eta^{(+)} = \eta|_{r=b+0}$, $\varepsilon^{(+)} = \varepsilon|_{r=b+0}$, и взята такая линейная комбинация решений $\exp(\pm\kappa^{(+)}r)$, чтобы выполнялось условие $\tilde{A}_S|_{r=a} = 0$.

Что касается крупномасштабных частей, $\tilde{A}_L$, то в области $r < b$ берется крупномасштабное решение (4), ограниченное на оси, а в промежутке $b < r < a$ —решение, принимающее нулевое значение при $r = a$. Вообще говоря, эти функции — их вид мы уточним ниже — не составляют единого по всему радиусу крупномасштабного, без присутствия $\tilde{A}_S$, решения, удовлетворяющего условиям (6), (8) одновременно. Как упомянуто в разд. 3, при $\gamma \equiv (k_\parallel a)^2|\eta/\varepsilon| \gg 1$ и плавных профилях η, ε уравнение (4) имеет решения, в которых величина $\tilde{A}_S$ мала по сравнению с характерным (например, среднеквадратичным) значением $\tilde{A}_L(r)$ в сечении плазмы. Они мало отличаются от собственных функций $\tilde{A}_{ideal}$ задачи (10), (6), (8). По крайней мере в случае, когда на описываемой радиальной периферии плотность плазмы значительно меньше, чем в основном объеме, так что локальная альфвеновская частота на периферии сильно превышает собственную частоту,

$$\omega_A|_{\mathrm{periph}} \gg |\omega|, \qquad (18)$$

колебания, близкие к идеальной МГД-моде, имеются и при наличии скачка. В самом деле, при $\gamma \gg 1$, пренебрежении членом с η^{-1} и соблюдении (18) уравнение (4) на бестоковой периферии имеет одинаковый вид ($\Delta_\perp\tilde{A} = 0$) независимо от радиального хода параметров. В этом приближении, если профили невозмущенных величин различаются только на разреженной периферии, то для них собственная функция возмущения почти одинакова и $\approx\tilde{A}_{ideal}$. Мы сейчас ищем решение, отличающееся от такого почти идеального: не предполагаем малости $\tilde{A}_S$ по сравнению с характерной величиной $\tilde{A}_L$ в плотной области, $\tilde{A}_L^{(0)}$, и малости $\tilde{A}_L$ при $r \geq b$ по сравнению с $\tilde{A}_L^{(0)}$. По одну сторону от разрыва параметров крупномасштабная составляющая

$$\tilde{A}_L = \tilde{A}_L^{(-)}F\left(\frac{r}{a}\right), \quad r < b, \qquad (19)$$

где $\tilde{A}_L^{(-)}$ — постоянная, а F — плавная функция, равная единице при $r = b$ и ограниченная на оси. Она близка к решению уравнения второго порядка (10) с теми же граничными условиями. (Конкретный вид этого решения задачи идеальной МГД для нас несуществен. Важно лишь, что оно мало изменяется на длине Λ. В дальнейшем будет фигурировать только амплитуда $\tilde{A}_L^{(-)}$ — значение $\tilde{A}_L$ при $r = b - 0$.) По другую сторону разрыва, в тонком, $D \ll a$, слое $b < r < a$ функцию $\tilde{A}_L$ с нулем на стенке можно представить разложением

$$\tilde{A}_L = \tilde{A}_L^{(+)} \frac{a-r}{D}\left(1 + O\left(\frac{a-r}{a}\right)\right), \quad r > b, \tag{20}$$

$\tilde{A}_L^{(+)}$ – постоянная.

Будем полагать амплитуды $\tilde{A}_L^{(-)}$, $\tilde{A}_L^{(+)}$, $\tilde{A}_S^{(-)}$, $\tilde{A}_S^{(+)}$ одного порядка по параметру λ/a. При этом, поскольку в области локализации $\tilde{A}_S$ главный вклад в $\Delta_\perp \tilde{A}$ вносит слагаемое $\partial^2 \tilde{A}_S/\partial r^2$, а согласно (17) величина $(\partial^2 \tilde{A}_S/\partial r^2)_{r=a} = 0$, то на стенке выполняются не только условие (8), но в главном порядке и требование (9'). Условия (6), (7) тоже удовлетворяются, так как величина мелкомасштабной составляющей колебаний $\tilde{A}_S$ (16) становится пренебрежимо малой вблизи оси плазменного цилиндра.

4.2. Сшивка решений при $r = b$

Запишем условия сшивки, используя малость λ по сравнению с длинами изменения крупномасштабной составляющей $\tilde{A}$ и невозмущенных величин вне переходного слоя.

Около поверхности $r = b$, в областях $0 < |(r-b)\kappa| \lesssim 1$, лапласиан $\Delta_\perp \tilde{A}_L$, фигурирующий в (13), (15), много меньше $\Delta_\perp \tilde{A}_S$, а в равенстве (14) можно опустить, как малое $\sim D/a$, слагаемое $\partial \tilde{A}_L/\partial r\big|_{r=b-0}$. Пусть выполняется неравенство (18), тогда в (15) существенны только члены с $\Delta_\perp \tilde{A}_S$. В результате соотношения (12)–(15) сводятся к

$$\tilde{A}_L^{(-)} + \tilde{A}_S^{(-)} = \tilde{A}_L^{(+)} + \tilde{A}_S^{(+)}, \tag{21}$$

$$\frac{\kappa^{(-)2}}{\eta^{(-)}}\tilde{A}_S^{(-)} = \frac{\kappa^{(+)2}}{\eta^{(+)}}\tilde{A}_S^{(+)}, \tag{22}$$

$$\kappa^{(-)}\tilde{A}_S^{(-)} = -D^{-1}\tilde{A}_L^{(+)} - [\kappa^{(+)}\operatorname{cth}(\kappa^{(+)}D)]\tilde{A}_S^{(+)}, \tag{23}$$

$$\frac{\varepsilon^{(-)}}{\eta^{(-)}}\kappa^{(-)2}\kappa^{(-)}\tilde{A}_S^{(-)} = -\frac{\varepsilon^{(+)}}{\eta^{(+)}}\kappa^{(+)2}[\kappa^{(+)}\operatorname{cth}(\kappa^{(+)}D)]\tilde{A}_S^{(+)}, \tag{24}$$

причем в $\kappa^{(-)}$ и $\kappa^{(+)}$ нужно множитель $(1-\omega^2/\omega_A^2)^{-1}$ положить, раз предполагается (18), равным единице.

Равенства (22), (24) совместимы, если

$$\varepsilon^{(-)}\kappa^{(-)} = -\varepsilon^{(+)}\kappa^{(+)}\operatorname{cth}(\kappa^{(+)}D). \tag{25}$$

Входящие в $\kappa^{(-)}$, $\kappa^{(+)}$ величины $\eta^{(-)}$, $\eta^{(+)}$ зависят от частоты, и в случае разрешимости относительно ω (это возможно не при всяких $\eta^{(-)}$, $\eta^{(+)}$; решения нет, в частности, если $\eta^{(-)}$, $\eta^{(+)}$ вещественны и положительны) уравнение (25) дает собственную частоту, примеры будут приведены ниже. При этом отношение амплитуд $\tilde{A}_S^{(+)}$ и $\tilde{A}_S^{(-)}$ есть

$$\frac{\tilde{A}_S^{(+)}}{\tilde{A}_S^{(-)}} = \frac{\varepsilon^{(+)}}{\varepsilon^{(-)}}, \tag{26}$$

а из (21)–(23) получаем связь $\tilde{A}_S^{(-)}$, $\tilde{A}_S^{(+)}$ и $\tilde{A}_L^{(+)}$ с $\tilde{A}_L^{(-)}$:

$$\tilde{A}_S^{(-)} = \frac{\varepsilon^{(-)}}{\varepsilon^{(+)} - \varepsilon^{(-)}}\tilde{A}_L^{(-)}, \tag{27}$$

$$\tilde{A}_S^{(+)} = \frac{\varepsilon^{(+)}}{\varepsilon^{(+)} - \varepsilon^{(-)}}\tilde{A}_L^{(-)}, \tag{28}$$

$$\tilde{A}_L^{(+)} = 0. \tag{29}$$

Подчеркнем, что хотя практически во всем объеме плазмы, $r < b - \xi\Lambda$, где ξ – несколько единиц, движение крупномасштабное ($\tilde{A} \approx \tilde{A}_L$) и почти идеальное, частота, находимая из (25), отлична от собственной частоты ω_{ideal} идеальной моды (10), (6), (8), так что радиальный ход $\tilde{A}$ существенно отличается от $\tilde{A}_{ideal}$. При приближении к стенке не происходит, как у функции $\tilde{A}_{ideal}$, падения $\tilde{A}$ до малых значений еще при $r < b - \xi\Lambda$. (Заметим в связи с этим, что для моды, близкой к $\tilde{A}_{ideal}$, мы не могли бы перейти от (14) к (23), так как порядок слагаемого $(\partial \tilde{A}_L/\partial r)_{r=b-0}$ в (14) был бы $\tilde{A}_L\big|_{r=b-0}/D$.)

4.3. Примеры разрешимости (25)

Разрешимость уравнения (25) и тем самым существование решения, в котором амплитуды $\tilde{A}_L^{(+)}$, $\tilde{A}_S^{(-)}$, $\tilde{A}_S^{(+)}$ того же порядка по λ/a, что $\tilde{A}_L^{(-)}$, зависит от вида функций $\eta^{(-)}(\omega)$ и $\eta^{(+)}(\omega)$. Ниже даны два примера, когда разрешимость имеет место[1].

4.3.1. Пусть температура электронов в пристеночном промежутке $b < r < a$ много меньше, чем при $r < b$. Рассмотрим область частот

$$\left|k_\parallel v_{Te}^{(-)}\right| \gg |\omega| \gg \left|k_\parallel v_{Te}^{(-)}(m_e/m_i)^{1/2}\right|, \quad \left|k_\parallel v_{Te}^{(+)}\right|, \tag{30}$$

v_{Te} – тепловая скорость. В бесстолкновительном приближении продольная компонента диэлек-

[1] Реализация рассматриваемых типов дисперсии $\eta^{(-)}(\omega)$ и $\eta^{(+)}(\omega)$ в конкретных установках здесь не обсуждается.

трического тензора в окрестности поверхности $r = b$ при $|\mathrm{Im}\,\omega/\mathrm{Re}\,\omega| \ll 1$ выглядит как

$$\eta^{(-)} = \eta'^{(-)} + i\eta''^{(-)}, \quad \eta'^{(-)} = \frac{2\omega_{pe}^{(-)2}}{k_\parallel^2 v_{Te}^{(-)2}},$$
$$\left|\frac{\eta''^{(-)}}{\eta'^{(-)}}\right| \ll 1, \quad \omega\eta''^{(-)} > 0, \quad r = b - 0, \tag{31а}$$

$$\eta^{(+)} = \eta'^{(+)} + i\eta''^{(+)}, \quad \eta'^{(+)} = -\frac{\omega_{pe}^{(+)2}}{\omega^2},$$
$$\left|\frac{\eta''^{(+)}}{\eta'^{(+)}}\right| \ll 1, \quad \omega\eta''^{(+)} > 0, \quad r = b + 0, \tag{31б}$$

см., например, [8]. В пренебрежении малой антиэрмитовой частью η имеем

$$\kappa^{(-)} = K^{(-)}, \quad K^{(-)} = \frac{1}{\rho_i^{(-)}}\sqrt{\frac{T_i^{(-)}}{T_e^{(-)}}}, \tag{32}$$

$$\kappa^{(+)} = iK^{(+)}, \quad K^{(+)} = \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}|k_\parallel|\frac{\omega_{ci}}{|\omega|}, \tag{33}$$

и уравнение (25) принимает вид

$$\varepsilon^{(-)}K^{(-)} = -\varepsilon^{(+)}K^{(+)}\,\mathrm{ctg}(K^{(+)}D). \tag{34}$$

При этом условие гидродинамичности $|\kappa^{(-)}|\rho_i^{(-)} \ll 1$ требует, чтобы было $T_i^{(-)} \ll T_e^{(-)}$. Для малости $|\kappa^{(+)}|\rho_i^{(+)}$ достаточно (поскольку $|\omega/k_\parallel v_{Te}^{(+)}| \gg 1$), чтобы $T_i^{(+)} \lesssim T_e^{(+)}$. Отметим также, что для $\kappa^{(-)}$ (32) величина Λ того же порядка, что λ.

Из (34) получаем связь частоты с толщиной пристеночного слоя D

$$\omega^2 = \frac{m_i}{m_e}\left(\omega_{ci}\frac{k_\parallel D}{\alpha}\right)^2, \tag{35}$$

где α – один из корней уравнения

$$\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha = -\frac{\varepsilon^{(-)}}{\varepsilon^{(+)}}K^{(-)}D. \tag{36}$$

В функции $\omega(D)$ допустимые D – такие, чтобы значение ω принадлежало интервалу $|\omega| < \min\omega_A$, так что альфвеновский резонанс невозможен[2].

Поясним роль связи (34). В области $0 < r < b - \xi\lambda$ функция $\tilde{A}$, сводящаяся там к $\tilde{A}_L$, подчиняется фактически (ввиду того, что в крупномасштабных колебаниях член с η^{-1} в (4) мал) уравнению второго порядка (10), при соблюдении (6) ход $\tilde{A}(r)$ в этой области предопределен частотой ω. Если последняя не близка к собственной частоте ω_{ideal} в задаче (10), (6), (8), то продолжение этого решения в область $r > b - \xi\lambda$ не будет удовлетворять условию (8) на стенке. При выполнении (34) функция $\tilde{A}_L|_{r<b-\xi\lambda}$ может быть сшита с решением $\tilde{A}|_{r>b-\xi\lambda}$ полного уравнения четвертого порядка (4), удовлетворяющим требованиям (8), (9'). Эти требования выполняются благодаря тому, что в периферийной области в колебаниях участвует неидеальная мелкомасштабная составляющая. Отметим, что для небольших $\alpha \sim \pi$ расстояние D, при котором существует наше решение, порядка длины λ. Если интересоваться колебаниями выявленного типа с частотой, равной некоторой доле ς от альфвеновской частоты, рассчитанной по плотности n_0 в центральной области плазменного цилиндра, то они возможны при $D \sim \varsigma(r_0 n_0)^{-1/2}$, где $r_0 = e^2/m_e c^2$ – классический радиус электрона.

Радиальная зависимость возмущения около стенки показана на рис. 1.

При учете $\eta''^{(+)}$, $\eta''^{(-)}$, из-за которых появляются $\mathrm{Im}\,\kappa^{(-)}$ и $\mathrm{Re}\,\kappa^{(+)}$, собственная частота приобретает мнимую добавку, соответствующую затуханию. Из (25) несложно найти декремент

$$\Gamma = \frac{\varepsilon^{(+)}}{\varepsilon^{(-)}}\left[(1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha)K^{(-)}D + \frac{\varepsilon^{(+)}}{\varepsilon^{(-)}}\right]^{-1}\frac{\omega\eta''^{(-)}}{2\eta'^{(-)}} + \frac{\omega\eta''^{(+)}}{2|\eta'^{(+)}|}. \tag{37}$$

4.3.2. Другой пример разрешимости (25). Пусть, как и в предыдущем пункте, температура $T_e^{(-)}$ существенно больше $T_e^{(+)}$, но рассматривается область частот $|\omega/k_\parallel v_{Te}| \gg 1$. При этом по обе стороны от поверхности $r = b$ имеем $\eta \approx \eta' = -\omega_{pe}^2/\omega^2$. Вклад же в η черенковского взаимодействия волны с частицами $\eta'' \propto \exp(-(\omega/k_\parallel v_{Te})^2)$, и, поскольку $v_{Te}^{(-)} > v_{Te}^{(+)}$, то $|\eta''^{(-)}/\eta'^{(-)}| \gg |\eta''^{(+)}/\eta'^{(+)}|$. Имея в виду последнее неравенство, слагаемым $\eta''^{(+)}$ в $\eta^{(+)}$ пренебрежем, а $\eta''^{(-)}$ в $\eta^{(-)}$ оставим. Будем предполагать, что $|\mathrm{Im}\,\omega/\mathrm{Re}\,\omega| \ll 1$ и

$$\eta''^{(-)}\,\mathrm{Re}\,\omega \gg 2[\omega_{pe}^{2(-)}/(\mathrm{Re}\,\omega)^2]|\mathrm{Im}\,\omega|, \tag{38}$$

так что и при $\mathrm{Im}\,\omega \neq 0$ мнимая часть $\eta^{(-)}$ определяется именно величиной $\eta''^{(-)}$. Тогда при $r < b$ требование спада мелкомасштабной составляю-

[2] Есть также ограничение на D сверху из-за того, что вследствие комплексности $\eta^{(+)}$ величина $\mathrm{Re}\,\kappa^{(+)} \neq 0$. Перейти от (25) к (34) можно, если $D|\mathrm{Re}\,\kappa^{(+)}| \ll 1$. В связи с этим ограничены допускаемые корни (36): $|\alpha| \ll |K^{(+)}/\mathrm{Re}\,\kappa^{(+)}|$.

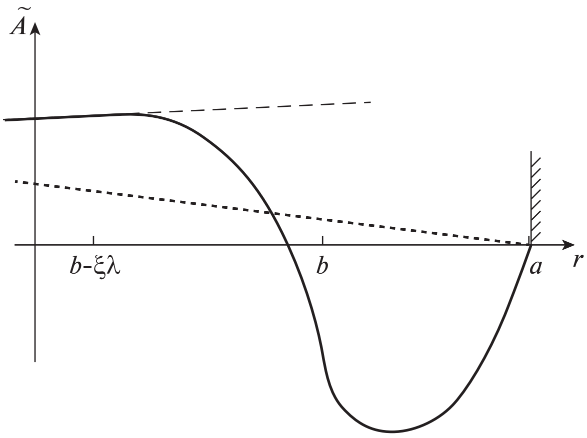

Рис. 1. Радиальная зависимость вектор-потенциала возмущения в пристеночной области при $\eta^{(-)}$ (31а) и $\eta^{(+)}$ (31б) в случае $\varepsilon^{(+)} < \varepsilon^{(-)}$. Сплошная линия – $\tilde{A}$ при $\omega \neq \omega_{ideal}$. В области $r < b - \xi\lambda$ изменение $\tilde{A}$ на длине λ слабое, $\lambda\left|d\ln\tilde{A}/dr\right| \ll 1$. Штриховая линия – продолжение $\tilde{A}_L^{(-)}$ в область $r > b - \xi\lambda$. Пунктир – ход крупномасштабной моды, близкой к идеальной ($\omega \approx \omega_{ideal}$).

щей вглубь шнура, $\mathrm{Re}\,\kappa^{(-)} > 0$, оставляет из двух значений $\kappa = |k_\parallel|(\eta/\varepsilon)^{1/2}$ одно:

$$\kappa^{(-)} \approx i\bar{K}\left(1 - \frac{i\eta''^{(-)}}{2\left|\eta'^{(-)}\right|}\right)\mathrm{sign\,Re}\,\omega, \tag{39}$$

где $\bar{K} = |k_\parallel|\sqrt{\left|\eta'^{(-)}\right|/\varepsilon^{(-)}}$, $\eta'^{(-)} = -\omega_{pe}^{(-)2}/(\mathrm{Re}\,\omega)^2$ и второе слагаемое в скобках по абсолютной величине $\ll 1$. В пренебрежении этим слагаемым соотношение (25) сведется к

$$i\varepsilon^{(-)}\bar{K}\,\mathrm{sign\,Re}\,\omega = -\varepsilon^{(+)}\kappa^{(+)}\,\mathrm{cth}(\kappa^{(+)}D), \tag{40}$$

здесь

$$\kappa^{(+)} = \left(-\frac{k_\parallel^2\omega_{pe}^{(+)2}}{\varepsilon^{(+)}\omega^2}\right)^{1/2} \approx i\sqrt{\frac{k_\parallel^2\omega_{pe}^{(+)2}}{\varepsilon^{(+)}(\mathrm{Re}\,\omega)^2}}\left(1 - \frac{i\,\mathrm{Im}\,\omega}{\mathrm{Re}\,\omega}\right). \tag{41}$$

Пусть $\varepsilon^{(+)} \ll \varepsilon^{(-)}$. Интересуемся решением (40) с $\left|\kappa^{(+)}\right| D \gtrsim 1$. Учитывая, что $\bar{K}/\left|\kappa^{(+)}\right| \approx 1$ (входящее в κ отношение η'/ε не зависит от плотности), в первом приближении по $\varepsilon^{(+)}/\varepsilon^{(-)}$имеем

$$\sqrt{\frac{m_i}{m_e}}\frac{\omega_{ci}}{|\,\mathrm{Re}\,\omega\,|}|k_\parallel|\,D\left(1 - i\frac{\mathrm{Im}\,\omega}{\mathrm{Re}\,\omega}\right) = \\ = \pi + i\frac{\varepsilon^{(+)}}{\varepsilon^{(-)}}\mathrm{sign\,Re}\,\omega; \tag{42}$$

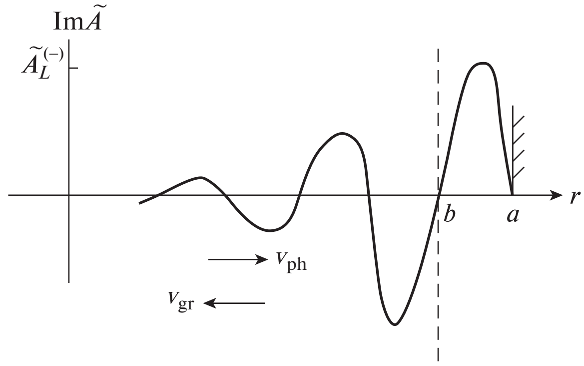

Рис. 2. $\mathrm{Im}\,\tilde{A}$ как функция радиальной координаты при вещественном $\tilde{A}_L^{(-)} > 0$ в случае $\eta'^{(-,+)} = -\omega_{pe}^{(-,+)2}/\omega^2$.

взят наименьший отличный от нуля корень $\alpha = \pi$ уравнения $\mathrm{tg}\,\alpha = 0$ (для простоты и в согласии с примечанием 2 мы ограничились самым длинноволновым по r решением в области $b < r < a$). Отсюда

$$(\mathrm{Re}\,\omega)^2 = \frac{m_i}{m_e}\left(\omega_{ci}\frac{k_\parallel D}{\pi}\right)^2, \tag{43}$$

$$\mathrm{Im}\,\omega = -\frac{\varepsilon^{(+)}}{\pi\varepsilon^{(-)}}|\mathrm{Re}\,\omega|. \tag{44}$$

При малых $\varepsilon^{(+)}/\varepsilon^{(-)}$ исходное предположение $|\mathrm{Im}\,\omega/\,\mathrm{Re}\,\omega| \ll 1$ и условие (38) выполняются.

Обратим внимание на то, что в мнимую добавку (44) величины $\eta''^{(-,+)}$ не входят. Наличие у η антиэрмитовой компоненты проявилось, однако, в отборе (39), в результате которого мелкомасштабная составляющая $\tilde{A}$ в области $b - \xi\Lambda < r < b$ представляет собой в первом приближении по η''/η' волну, бегущую по r: мнимая часть величины $\kappa^{(-)}$ (39) отлична от нуля (она даже много больше действительной части). Радиальная фазовая скорость волны направлена к поверхности $r = b$, а групповая скорость и вместе с нею поток энергии – от этой поверхности. Именно бегущий характер мелкомасштабной составляющей при $r < b$, в конечном счете обязанный резистивности, обуславливает затухание колебаний (43), имеющих положительную энергию. Радиальная структура возмущения иллюстрируется рис. 2, на котором для случая вещественного и положительного $\tilde{A}_L^{(-)}$ показано поведение $\mathrm{Im}\,\tilde{A}(r)$. Что касается $\mathrm{Re}\,\tilde{A}$, то при $r < b - \xi\Lambda$ она близка к $\tilde{A}_L^{(-)}$ (которая в свою очередь близка к $\tilde{A}_{L\,ideal}^{(-)}$), в промежутке $b - \xi\Lambda < r < b$ по мере приближения к $r = b$

уменьшается, испытывая осцилляциии по r, а при $b < r < a$ мала, как $(\varepsilon^{(+)}/\varepsilon^{(-)})A_L^{(-)}$.

4.4. Дополнительные замечания

1. В предположении (18) соотношение $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{j}} = 0$ (4) для мелкомасштабной составляющей в области $b - \xi\Lambda < r < a$ есть уравнение почти потенциальных ($\tilde{\mathbf{E}} \approx -\nabla\tilde{\varphi}$) колебаний

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_\perp \cdot \left[\varepsilon\nabla_\perp\left(\frac{c}{k_\parallel\omega\eta}\Delta_\perp\tilde{A}\right)\right] - \frac{k_\parallel c}{\omega}\Delta_\perp\tilde{A} \approx \\ &\approx \frac{\partial}{\partial r}\left[\varepsilon\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{c}{k_\parallel\omega\eta}\left(\frac{\partial^2\tilde{A}}{\partial r^2}\right)\right)\right] - \frac{k_\parallel c}{\omega}\frac{\partial^2\tilde{A}}{\partial r^2} = \\ &= \frac{c}{k_\parallel\omega\eta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\varepsilon\frac{\partial}{\partial r}\left(\left(\frac{\partial^2\tilde{A}}{\partial r^2}\right)\right)\right] - \eta k_\parallel^2\frac{\partial^2\tilde{A}}{\partial r^2}\right\} = \\ &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\varepsilon\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial r}\right) - \eta k_\parallel^2\tilde{\varphi}, \end{aligned} \tag{45}$$

где выражение для возмущения потенциала, $\tilde{\varphi} = (c/k_\parallel\omega\eta)\partial^2\tilde{A}/\partial r^2$, согласуется с (3), так как $\Delta_\perp\tilde{A} \approx \partial^2\tilde{A}/\partial r^2 = \kappa^2\tilde{A}$ и первое слагаемое в правой части (3) мало. При этом, однако, присутствие почти идеальной крупномасштабной составляющей $\tilde{A}_L^{(-)}$ в колебаниях обязательно: без нее невозможна непрерывность $\tilde{A}$ при $r = b$.

2. Для рассмотренной мелкомасштабной составляющей, поперечные волновые числа в которой имеют порядок $|\kappa| \sim \left|k_\parallel(\sigma_\parallel/\sigma_\perp)^{1/2}\right|$, заложенное в относительно простую модель колебаний (1), (2) представление о важности лишь диагональных компонент диэлектрического тензора (так что z-компонента плотности тока возмущения $\tilde{j}_z \approx \sigma_\parallel\tilde{E}_\parallel$, а вклады $\sigma_{zr}\tilde{E}_r$, $\sigma_{z\vartheta}\tilde{E}_\vartheta$ в нее, связанные с недиагональными компонентами тензора проводимости, малы), является оправданным, поскольку выполняется неравенство $|\sigma_{zr}|^2 \ll |\sigma_\perp\sigma_\parallel|$.

3. В описанной моде энергия магнитного поля возмущения, сосредоточенная около стенки, оказывается, благодаря большому вкладу компоненты $\tilde{B}_\vartheta$, пропорциональному $(\partial\tilde{A}/\partial r)^2$, много больше, чем во всем остальном объеме плазмы. В отличие от идеальной МГД-моды, где при $|\omega/k_\parallel c| \ll 1$ плотность магнитной энергии $\tilde{B}^2/8\pi$ много больше $\tilde{E}^2/8\pi$, в решении с неидеальной мелкомасштабной составляющей, локализованной на радиальной периферии, в этой области величина $\tilde{E}^2/8\pi$ может быть больше $\tilde{B}^2/8\pi$.

4. В разобранных примерах конечность продольной проводимости (ограниченность η), которая обеспечивает существование мелкомасштабной составляющей у возмущения, не связана с резистивностью плазмы: диэлектрической проницаемости (31а) отвечает емкостный характер импеданса, а (31б) – индуктивный.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, в плазме высокой, но конечной проводимости, кроме колебаний, мало отличающихся во всем объеме шнура от идеальной МГД-моды $\omega = \omega(m, k_z)$, возможно (по крайней мере при $m = 0$, когда дрейфовые эффекты не важны) – при наличии скачка плотности и электронной температуры в окрестности некоторой магнитной поверхности, находящейся на малом, порядка длины изменения мелкомасштабной составляющей возмущения, расстоянии D от стенки, – существование другой МГД-моды, почти идеальной в большей части объема и неидеальной (почти потенциальной) в пристеночной области. Ее частота связана с этим расстоянием: $\omega = \omega(k_z, D)$.

Автор благодарен А.М. Какурину, А.С. Кукушкину и А.В. Тимофееву за обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Furth H.P., Killeen J., Rosenbluth M.N.* // Phys. Fluids. 1963. V. 6. P. 459.
2. *Johnson J.L., Green J.M., Coppi B.* // Phys. Fluids. 1963. V. 6. P. 1169.
3. *Погуце О.П., Юрченко Э.И.* // Физика плазмы. 1977. Т. 3. С. 504. [O.P. Pogutse, E.I. Yurchenko // Sov. J. Plasma Phys. **3**, 283 (1977)]
4. *Арсенин В.В.* // Физика плазмы. 2018. Т. 44. С. 855. [V.V. Arsenin // Plasma Phys. Rep. **44**, 967 (2018)]
5. *Кадомцев Б.Б., Погуце О.П.* Вопросы теории плазмы. Вып. 5 / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1967. С. 209. [B.B. Kadomtsev, O.P. Pogutse. Reviews of Plasma Physics. Vol. 5 / Leontovich M.A., Ed. Consultants Bureau, New York, London, 1970]
6. *Rutherford P.H., Furth H.P., Rosenbluth M.N.* // Plasma Phys. Controlled Nuclear Fusion Res. (Proc. IV IAEA Conf., Madison, 1971. CN 28/F-16). Vienna: IAEA, 1971. V. II. P. 553.
7. *Шафранов В.Д.* // ЖТФ. 1970. Т. 40. С. 241. [V.D. Shafranov // Sov. Phys. Tech. Phys. **15**, 175 (1970)]
8. *Шафранов В.Д.* Вопросы теории плазмы. Вып. 3 / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. С. 3. [V.D. Shafranov. Reviews of Plasma Physics. Vol. 3 / Leontovich M.A., Ed. Consultants Bureau, New York, 1967]